

塑性理论简明教程

习题解答

徐秉业 陈森灿 编

52.551
499

清华大学出版社

说 明

这本习题解答是为了配合“塑性理论简明教程”一书教学的需要而编写的，读者在掌握塑性力学基本概念的基础上，应能独立地分析书中所给出的习题。本习题解答实为例题，可供读者解题时参考。

2166/24

塑性理论简明教程习题解答

徐秉业 陈森灿编



清华大学出版社出版

北京 海淀 清华园

清华大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行、各地新华书店经售



开本：850×1168 1/32 印张 4 3/4 字数 134 (千字)

1981年10月 第一版 1981年11月第一次印刷

印数：1—25000

统一书号：15235·11 定价：0.65元

7166/24

前 言

塑性理论是一门技术基础课程。在塑性理论中,变形体的数学模型较多,处理问题也比较复杂,需要建立许多基本概念。在这些概念未建立之前,初学这门课程的读者往往感到许多问题难于理解,遇到问题时,无从入手。

为了加深对课程中所涉及的一些基本概念的理解、巩固所学知识,提高分析问题和解决问题的能力,非常需要作一定数量的习题。我们在编写《塑性理论简明教程》时,选择了各种典型和难易程度不同的习题以便读者练习。由于这门课程内容多,有的题目有一定难度,为了帮助读者尽快地掌握它的基本内容,我们又整理编写了这本习题解答,供读者在解题时参考。

在编写这本习题解答的过程中,除参考了正式发表的教材和书刊外,还由湖南大学熊祝华教授所编写的“塑性力学讲课题纲”以及北京农业机械化学院黄文彬副教授所编写的“塑性力学基础习题解答”中选用了部份题目;清华大学刘信声同志和陈季筠同志曾验算了部分习题,并提出了改进意见,作者谨对以上同志表示衷心地感谢。

在习题解答中,许多问题分析还嫌不够,错误和不妥之处仍恐难免,诚恳地欢迎读者批评指正。

作者 于清华园

1981.2

目 录

前 言

第一章	基本概念	1
第二章	屈服条件	16
第三章	形变理论	28
第四章	增量理论	41
第五章	简单弹塑性问题	63
第六章	塑性平面应变问题和滑移线场理论	80
第七章	极值定理及其应用	104
第八章	塑性极限分析	120
参考书目		145

*

*

*

附《塑性理论简明教程》第一版勘误表	147
-------------------	-----

第一章 基本概念

1. 已知材料的应力应变曲线为 $\sigma_T = B\epsilon^n$ 或 $\sigma_T = c\epsilon^m$

试证: $m = 1 - n$

证明: 现按如下三个步骤证明

$$(1) \quad P = \sigma_T F \quad (i)$$

σ_T 为真实应力, 用对数应变表示时 $\sigma_T = B\epsilon^n$

$$d\sigma_T = Bn\epsilon^{n-1}d\epsilon$$

在拉伸失稳时 $dP = 0$, 故微分 (i) 式后, 得

$$dP = \sigma_T dF + F d\sigma_T = B\epsilon^n dF + F Bn\epsilon^{n-1}d\epsilon = 0 \quad (ii)$$

失稳前, 根据体积不变的假设有

$$Fl = \text{常数} \quad (iii)$$

微分 (iii) 式后, 得

$$d(Fl) = Fdl + ldF = 0$$

$$\text{故} \quad \frac{dF}{F} = -\frac{dl}{l} = -d\epsilon \quad (iv)$$

将 (iv) 式结果代入 (ii) 式后, 得

$$\epsilon^n (-d\epsilon) + n\epsilon^{n-1}d\epsilon = 0$$

$$\text{或写成} \quad (n - \epsilon)\epsilon^{n-1}d\epsilon = 0$$

$$\epsilon^{n-1}d\epsilon \text{ 一般不等于零, 因此 } n - \epsilon = 0 \quad (v)$$

故 $n = \epsilon$, 即失稳时对数应变值 ϵ 等于常数 n 。

100347

• 1 •

(2) 当用工程应变表示时 $\sigma_T = c\varepsilon^m$

$$d\sigma_T = cm\varepsilon^{m-1}d\varepsilon \quad (\text{vi})$$

$P = \sigma_T F$, 在拉伸失稳时 $dP = c\varepsilon^m dF + F cm\varepsilon^{m-1}d\varepsilon = 0$

消去 $c\varepsilon^{m-1}$ 后, 可得

$$\varepsilon \frac{dF}{F} + m d\varepsilon = 0 \quad (\text{vii})$$

而 $\epsilon = \ln(1 + \varepsilon)$, $d\epsilon = \frac{1}{1 + \varepsilon}d\varepsilon$ (viii)

由式 (viii) 和式 (iv) 得

$$\frac{dF}{F} = -\frac{1}{1 + \varepsilon}d\varepsilon \quad (\text{ix})$$

再将 (ix) 式代入 (vii) 式后, 则有

$$\left(m - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}\right)d\varepsilon = 0$$

$d\varepsilon$ 是工程应变的微分, 一般不等于零,

即 $m - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} = 0$ 或 $\varepsilon = \frac{m}{1 - m}$ (x)

因此式是在拉伸失稳时导出的, 故上式亦可写为

$$m - \frac{\varepsilon_N}{1 + \varepsilon_N} = 0 \text{ 或 } \varepsilon_N = \frac{m}{1 - m},$$

拉伸失稳时工程应变值 ε_N 等于 $\frac{m}{1 - m}$

(3) 拉伸失稳时由 (v) 式知 $\epsilon = n$, 由 (x) 式知 $\varepsilon = \frac{m}{1 - m}$,

而 $\epsilon = \ln(1 + \varepsilon)$

$$\therefore n = \ln \left(1 + \frac{m}{1-m} \right) = \ln \frac{1}{1-m}$$

$$e^n = \frac{1}{1-m}$$

故

$$m = 1 - e^{-n} = 1 - \exp(-n)$$

2. 已知名义应力应变曲线, 试通过作图法求出真实应力应变曲线。

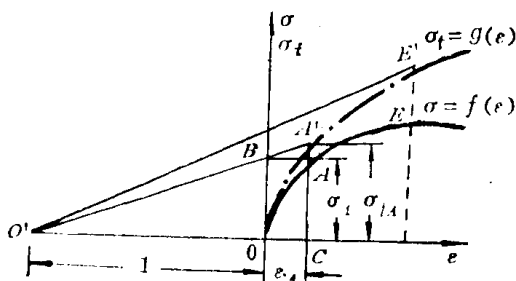


图 1.1

解:

设横坐标为应变而纵坐标为应力, 令原点为 O 点, 而 $\epsilon = -1$ 处为 O' , 取名义应力应变曲线上的某一点 A , A 点的应变为 ϵ_A , 通过 A 点作一平行于 ϵ 轴的直线 AB , 联结 $O'B$ 线, 并使 $O'B$ 线的延长线与平行于 σ 轴且通过 A 点的直线相交于 A' 点, 则 A' 点即为真应力应变曲线上的点。因为根据比例关系

$$\frac{A'C}{AC} = \frac{1 + \epsilon_A}{1}$$

因此可得

$$\sigma_{tA} = \sigma_A(1 + \epsilon_A)$$

重复上述作图法, 便可得到真应力应变曲线, 如图中虚线所示。

3. 已知材料的应力应变曲线为 $\sigma_T = 30\epsilon^{0.4}$ ，其中 ϵ 为自然应变（对数应变），若已知此杆在颈缩前工程应变为 0.25，试求当工程应变再增加多大时，杆件方能进入颈缩状态。

解：因已知 $n = 0.4$ ，故在颈缩时 $\epsilon = n = 0.4$ ，由对数应变的可加性，应有

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 = \ln \frac{l_1}{l_0} + \ln \frac{l_2}{l_1} = \ln \frac{l_2}{l_0} = 0.4 \quad (i)$$

但
$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \ln \frac{l_1}{l_0} = \ln(1 + e_1) \\ \epsilon_2 &= \ln \frac{l_2}{l_1} = \ln(1 + e_2) \end{aligned} \right\} \quad (ii)$$

将 (ii) 式代入 (i) 式后有

$$\ln(1 + e_1) + \ln(1 + e_2) = 0.4$$

或
$$\ln(1 + e_2) = 0.4 - \ln(1 + 0.25) = 0.177 \quad (iii)$$

因此由式 (iii) 最后可得 $e_2 = 0.193$

4 已知应力应变曲线为 $\sigma_T = c\epsilon^n$ ，如材料的屈服极限为 σ_s ，强度极限为 σ_{nb} ，试证明比值 $\frac{\sigma_s}{\sigma_{nb}}$ 与硬化指数 n 有如下关系：

$$\ln \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_{nb}} \right) = n \ln \frac{\epsilon_s}{\epsilon_N} + \epsilon_N - \epsilon_s$$

证明：

$$\sigma_{Ts} = \sigma_s(1 + e_s)$$

σ_{Ts} 为对应于屈服极限 σ_s 的真实应力

$$\sigma_N = \sigma_{nb}(1 + e_N)$$

$$\frac{\sigma_s}{\sigma_{nb}} = \frac{\sigma_{Ts}}{\sigma_N} \cdot \frac{1 + \varepsilon_N}{1 + \varepsilon_s} = \frac{\varepsilon_s^n}{\varepsilon_N^n} \cdot \frac{1 + \varepsilon_N}{1 + \varepsilon_s}$$

$$\ln \frac{\sigma_s}{\sigma_{nb}} = \ln \left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_N} \right)^n + \ln \frac{1 + \varepsilon_N}{1 + \varepsilon_s} = n \ln \left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_N} \right) + \varepsilon_N - \varepsilon_s$$

5. 在拉杆中, 如 F_0 和 l_0 为初始截面面积和长度, 而 F 和 l 为拉伸后的截面面积和长度, 如截面收缩率为

$$\psi = \frac{F_0 - F}{F_0},$$

而应变
$$e = \frac{\Delta l_0}{l_0},$$

试证当体积不变时有如下关系:

$$(1 + e)(1 - \psi) = 1$$

证明: 将 e 和 ψ 的表达式代入上式后, 则有

$$\begin{aligned} (1 + e)(1 - \psi) &= \left(1 + \frac{l - l_0}{l_0} \right) \left(1 - \frac{F_0 - F}{F_0} \right) \\ &= \frac{l}{l_0} \cdot \frac{F}{F_0} = 1 \end{aligned}$$

6. 如 σ_N 为拉伸颈缩时的真实应力, 而 ε_N 为颈缩时的工程应变, 若材料的应力应变曲线为 $\sigma_T = c\varepsilon^m$

试证:
$$\sigma_T = \sigma_N \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_N} \right)^{1 + \varepsilon_N}$$

证: 由第 1 题已证, 颈缩时

$$m = \frac{\varepsilon_N}{1 + \varepsilon_N}$$

$$\sigma_T = c\varepsilon^m, \quad \sigma_N = c\varepsilon_N^m$$

$$\sigma_T = \frac{\sigma_N}{\varepsilon_N^m} \varepsilon^m = \sigma_N \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_N} \right)^m = \sigma_N \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_N} \right)^{\frac{\varepsilon_N}{1+\varepsilon_N}}$$

7. 如已知真实应力和颈缩时 ψ 之间关系为 $\sigma_T = c\psi^n$, 如 σ_N 为拉伸失稳 (颈缩) 时的真实应力, 而 σ_{nb} 为名义强度极限, 试证

$$\sigma_T = \frac{\sigma_{nb}}{1 - \psi'_N} \left(\frac{\psi'}{\psi'_N} \right)^{\frac{\psi'_N}{1 - \psi'_N}}$$

其中 ψ'_N 为颈缩时的截面收缩率。

证明: 由题知 $\sigma_T = c\psi^n$ (i)

微分 (i) 式后, 则有

$$\frac{d\sigma_T}{d\psi} = cn\psi^{n-1},$$

$$\left(\frac{d\sigma_T}{d\psi} \right)_{\psi = \psi'_N} = cn\psi'^{n-1}_N \quad (\text{ii})$$

由失稳时 $dP = 0$ 的条件可得:

$$dP = \sigma_T dF + F d\sigma_T = c\psi^n dF + F cn\psi^{n-1} d\psi = 0 \quad (\text{iii})$$

$\therefore c \neq 0$, 由 (iii) 式有

$$\psi^n \frac{dF}{F} + n\psi^{n-1} d\psi = 0$$

而
$$\frac{dF}{F} = -d\varepsilon = -d[\ln(1+\varepsilon)] = -\frac{1}{1+\varepsilon} d\varepsilon,$$

$$(1+\varepsilon) = \frac{1}{1-\psi'}$$

$$d\varepsilon = d(1 + \varepsilon) = d\left(\frac{1}{1 - q}\right) = \frac{1}{(1 - q)^2} dq.$$

$$\frac{dF}{F} = - (1 - q) \frac{1}{(1 - q)^2} dq = - \frac{dq}{1 - q} \quad (\text{iv})$$

将式 (iv) 代入式 (iii) 后, 得

$$\left(nq^{n-1} - \frac{q^n}{1 - q}\right)d\psi = 0$$

由于 $d\psi \neq 0$ 故

$$n\psi^{n-1} = \frac{\psi^n}{1 - \psi} \quad (\text{v})$$

$$n = \frac{\psi}{1 - \psi}$$

此式是失稳时导出的, 所以应写为

$$n = \frac{\psi_N}{1 - \psi_N}$$

而由式 (i) 知 $\sigma_N = c\psi_N^n$ 并考虑

$$\sigma_N = \frac{\sigma_{nb}}{1 - \psi_N}$$

则有

$$\begin{aligned} \sigma_T = c\psi^n &= \frac{\sigma_N}{\psi_N^n} \psi^n = \sigma_N \left(\frac{\psi}{\psi_N}\right)^n \\ &= \frac{\sigma_{nb}}{1 - \psi_N} \left(\frac{\psi}{\psi_N}\right)^{\frac{\psi_N}{1 - \psi_N}} \end{aligned}$$

8. 由三根截面相同的杆件组成的结构, 受垂直载荷 P 的作用于 D 点, 如已知 AD 杆的应力应变曲线为 $\sigma_T = B_2 \varepsilon^{n_2}$, 而 BD

杆为 $\sigma_T = B_1 \varepsilon^{n_1}$ ，材料的合理使用，要求三杆同时达到拉伸失稳状态，试求布置杆件时，应使 θ 角为多大？

解：失稳时 BD 杆的应变为

$$\varepsilon_1 = \frac{n_1}{1 - n_1} = \frac{l_1' - l_1}{l_1},$$

$$l_1' = \frac{l_1}{1 - n_1}$$

AD 杆

$$\varepsilon_2 = \frac{n_2}{1 - n_2} = \frac{l_2' - l_2}{l_2},$$

$$l_2' = \frac{l_2}{1 - n_2}$$

$$\therefore \left(\frac{l_1}{1 - n_1} \right)^2 + h^2 = \left(\frac{l_2}{1 - n_2} \right)^2$$

其中 $h = AB = BC$

在初始时，同样有 $l_1^2 + h^2 = l_2^2$ ，消去 h ，得

$$\cos \theta = \frac{l_1}{l_2} = \frac{1 - n_1}{1 - n_2} \sqrt{\frac{n_2(2 - n_2)}{n_1(2 - n_1)}}$$

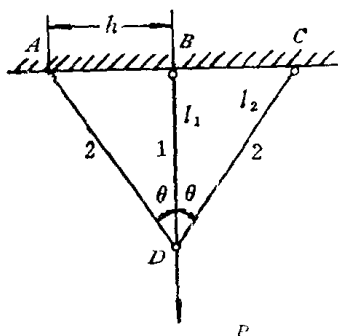


图 1.2

9. 设有如图 1.3 所示的由理想弹塑性材料制成的三杆桁架结构，在 D 点受竖向力 P 和水平力 Q 的作用。设杆件的截面 $F = 1$ ，试按如下两种变形路径求出变形各阶段的 P 、 Q 、 u 、 v 及各杆的应力 σ 的值。

(i) 先加竖向力 P ($\Delta u = 0$) 使桁架达到极限状态，保证 v 不变，再加上水平力 Q ，使桁架达到另一极限状态；

(ii) 先加水平力 Q ($\Delta v = 0$)，使桁架达到极限状态，保持

u 不变, 再加上竖向力 P , 使桁架达到另一极限状态。

其中 u 和 v 表示节点 D 的水平 (向右为正) 位移和竖向 (向下为正) 位移。

解: 跟踪变形路径应按应力和应变的增量进行计算, 首先写出基本方程如下:

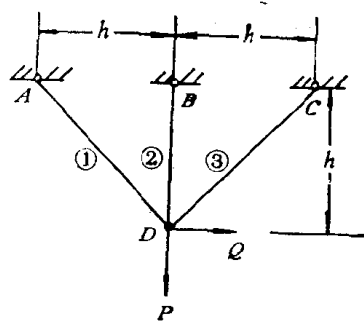


图 1.3

平衡方程为

$$\Delta P = \Delta \sigma_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} (\Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_3) \quad (i)$$

$$\Delta Q = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3) \quad (ii)$$

几何方程为

$$\left. \begin{aligned} \Delta \delta_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Delta u + \Delta v) = \sqrt{2} h \Delta \varepsilon_1 \\ \Delta \delta_2 &= \Delta v = h \Delta \varepsilon_2 \\ \Delta \delta_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Delta v - \Delta u) = \sqrt{2} h \Delta \varepsilon_3 \end{aligned} \right\} \quad (iii)$$

由式 (iii) 可解出

$$\Delta \varepsilon_1 = \frac{1}{2h} (\Delta u + \Delta v)$$

$$\Delta \varepsilon_2 = \frac{1}{h} \Delta v$$

$$\Delta \varepsilon_3 = -\frac{1}{2h} (\Delta v - \Delta u)$$

本构方程为

$$\Delta \sigma_j = E \Delta e_j, \quad \sigma_j^2 < \sigma_s^2 \text{ 或 } \sigma_j^2 = \sigma_s^2, \text{ 但 } e_j \Delta e_j < 0,$$

$$\Delta \sigma_j = 0, \quad \sigma_j = \sigma_s \text{ 且 } e_j \Delta e_j = 0$$

(i) 变形路径 I:

第一阶段, 初始值都是零 (自然状态), 因此, 所有增量都可以用全量来表示。本阶段变形史的特点是 $\Delta u = 0$, $\Delta Q = 0$, 于是根据基本方程可得

$$\sigma_1 = \sigma_3, \quad e_1 = e_3 = \frac{1}{2} e_2$$

由平衡方程得

$$P = \sigma_2 + \sqrt{2} \sigma_1$$

在 $\sigma_j < \sigma_s$ (此处 σ_j 系指 σ_1 、 σ_2 、 σ_3) 时, 各杆都是弹性的, $2\sigma_1 = \sigma_2$, 所以

$$P = \sigma_2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

杆 ② 首先屈服, 此时 $\sigma_2 = \sigma_s$,

$$e_2 = \frac{\sigma_2}{E} = \frac{v}{h} = e_s,$$

所以, 在本阶段之末可得

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{1}{2} \sigma_s, \quad \sigma_2 = \sigma_s, \quad \frac{v}{h} = e_s \quad (\text{iv})$$

$$u = 0, \quad P = \sigma_s \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad Q = 0$$

第二阶段、应力初始值为式 (iv), 如 P 继续增加, 由于是理想弹塑性材料, 故 $\Delta \sigma_2 = 0$, $\sigma_2 = \sigma_s$, 于是, 当 $\Delta \sigma_1$ 到达某一值,

使得 $\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{1}{2}\sigma_s + \Delta\sigma_1 = \sigma_s$ 时, 桁架到达极限状态, 所以, 本阶段内杆的应力增量为

$$\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_3 = \frac{1}{2}\sigma_s, \quad \Delta\sigma_2 = 0$$

代入平衡方程后, 得

$$\Delta P = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2}\sigma_s \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_s$$

而
$$\Delta\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\Delta\sigma_1 = \frac{\Delta v}{2h} = \frac{1}{2}\varepsilon_s$$

于是, 在本阶段的最后, 应力的值为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_s \\ P &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sigma_s + \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_s = (1 + \sqrt{2}) \sigma_s \\ Q &= 0, \quad \frac{v}{h} = 2\varepsilon_s, \quad u = 0 \end{aligned} \right\} \quad (v)$$

第三阶段, 应力的初始值为式 (v), 在本阶段 $\Delta v = 0$, 由基本方程可得

$$\Delta\varepsilon_1 > 0, \quad \Delta\varepsilon_2 = 0, \quad \Delta\varepsilon_3 < 0$$

因此杆 ①、② 应力保持不变, 杆 ③ 卸载, 即

$$\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_2 = 0, \quad \Delta\sigma_3 = E\Delta\varepsilon_3$$

当 $\sigma_3 = \sigma_s + \Delta\sigma_3 = -\sigma_s$ 时, 整个桁架又进入屈服状态, 所以在本阶段内

$$\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_2 = 0, \quad \Delta\sigma_3 = -2\sigma_s,$$

$$\Delta \varepsilon_3 = \frac{\Delta \sigma_3}{E} = -2 \varepsilon_s = -\frac{\Delta u}{2h}$$

代入平衡方程式后, 则有

$$\Delta P = \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta \sigma_3 = -\sqrt{2} \sigma_s$$

$$\Delta Q = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Delta \sigma_3 = \sqrt{2} \sigma_s$$

因此, 变形路径 I 的最后应力和应变各量的值为

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_s, \quad \sigma_3 = \sigma_s + \Delta \sigma_3 = -\sigma_s$$

$$\frac{v}{h} = 2\varepsilon_s, \quad \frac{v}{h} = \frac{\Delta u}{h} = 4\varepsilon_s$$

$$P = (1 + \sqrt{2}) \sigma_s - \sqrt{2} \sigma_s = \sigma_s$$

$$Q = \sqrt{2} \sigma_s$$

应用类似的步骤, 可以求出变形路径 II 内各阶段的结果, 现将其结果给出如下:

第一阶段: $\Delta v = 0, \quad \Delta P = 0$

$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma_1 = -\sigma_3 = \sigma_s$$

$$P = 0, \quad Q = \sqrt{2} \sigma_s$$

$$u = 2\varepsilon_s, \quad v = 0$$

第二阶段: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_s,$

$$P = (1 + \sqrt{2}) \sigma_s, \quad Q = 0$$

$$u = 2\varepsilon_s, \quad v = 4\varepsilon_s$$

10. 如图 1.4 所示的桁架, 三杆的材料和截面积都相同, 面积

为 F ，材料是弹性线性强化的，在节点 D 处受到竖向力 P 的作用，以 v 表示节点 D 的竖直位移（向下为正）， $\delta_j (j=1, 2)$ 表示杆的总伸长。

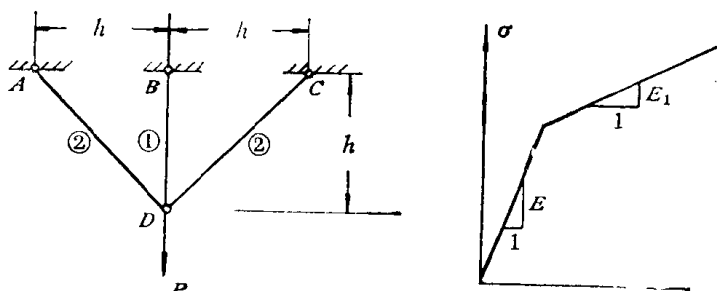


图 1.4

试求弹性阶段、塑性阶段、弹塑性阶段的 P 的表达式。

解：

(1) 基本方程

平衡方程式为

$$P = N_1 + \sqrt{2} N_2 = F (\sigma_1 + \sqrt{2} \sigma_2)$$

几何方程式为

$$\delta_1 = v, \quad \epsilon_1 = \frac{v}{h}$$

$$\delta_2 = \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad \epsilon_2 = \frac{v}{2h} = \frac{1}{2} \epsilon_1$$

本构方程式为

$$\sigma = E \epsilon \quad (\text{当 } \sigma \leq \sigma_s \text{ 时})$$

$$\sigma = \epsilon E_1 + \sigma_s (1 - \epsilon \epsilon), \quad \epsilon \epsilon = \frac{E_1}{E} \quad (\text{当 } \sigma > \sigma_s \text{ 时})$$

(2) 弹性解：当 $\sigma \leq \sigma_s$ 时，根据基本方程式可得