

高等数学提要

GAODENGSHU
XUETIYAO
YUXITIJI

与习题集

高等学校教材 ● 王佩荔等编

天津大学出版社

高等数学提要与习题集

王佩荔 王开业 何银兰 李君湘 编

天津大学出版社

内 容 提 要

本书是蔡高厅、叶宗泽主编的〈高等数学〉(上、下册)的配套用书,是在天津大学出版社历年〈高等数学习题集〉版本基础上重新组织编写而成的。

全书按章、节编排。每节均配有内容提要 and 典型例题与教学内容相呼应。习题的编排与教材顺序一致。各章末有综合性练习题供教学选用。书末附有全书的习题参考答案、常见的平面曲线图形和曲面所围成的立体图形。

本书是高等工业院校本科生〈高等数学〉课程的教学用书,也可供科技人员参考用书。

(津)新登字012号

高等数学提要与习题集

王佩荔 王开业
何银兰 李君湘 编

天津大学出版社出版
(天津大学内)
河北省邮电印刷厂印刷
新华书店天津发行所发行

开本: 850×1168毫米1/32 印张: 17 1/2 字数: 458 千字
1994年7月 第 一 版 1994年7月第一次印刷

印数: 1-10 000

ISBN 7-5618-0605-1

O·62

定价: 13.80元

前 言

本书是在参考了天津大学数学系及兄弟院校历年编写与使用的“高等数学”有关教材，在吸取了天津大学数学系广大教师的教学经验基础上编写而成的教学用书。

全书对高等数学的内容和方法作了比较系统的总结和概括。书中每节在概要叙述了本节涉及的内容的基础上，注意针对初学者在学习中常会产生的问题和疑难，选择典型例题进行分析、示范，以帮助读者学会综合运用有关知识去分析问题，解决问题，逐步加深对基本概念、基本理论的深入理解，培养和提高计算能力以及抽象思维和逻辑论证能力。节末配有适当的习题。每章最后的练习题，是为了帮助读者进一步理解和运用各章的基本内容与方法而选配的，用以提高读者综合解题的能力。

本书在编写过程中，得到天津大学数学系和天津大学出版社的热情支持和帮助，对此表示深切的感谢。

本书的缺点与错误，恳望读者批评指正。

编 者

1994.2

目 录

第一章 函数	(1)
§ 1 集合与函数.....	(1)
习题1—45	(3)
§ 2 复合函数与初等函数.....	(7)
习题46—75.....	(9)
练习题76—80.....	(12)
第二章 极限	(13)
§ 1 数列极限.....	(13)
习题1—16	(15)
§ 2 函数极限.....	(17)
习题17—44.....	(20)
§ 3 极限的性质与运算法则.....	(22)
习题45—90.....	(26)
§ 4 极限存在准则 无穷小的比较.....	(29)
习题91—145	(32)
§ 5 函数的连续性.....	(36)
习题146—195.....	(39)
练习题196—210.....	(43)
第三章 导数与微分	(46)
§ 1 导数概念.....	(46)
习题1—30	(48)
§ 2 微分法.....	(51)
习题31—182	(55)
§ 3 微分及其在近似计算中的应用.....	(63)

习题183—230·····	(65)
§ 4 隐函数与参量函数微分法·····	(68)
习题231—265·····	(71)
练习题266—280·····	(73)
第四章 导数的应用 ·····	(76)
§ 1 微分中值定理·····	(76)
习题1—26 ·····	(77)
§ 2 罗比塔法则·····	(80)
习题27—67·····	(83)
§ 3 函数的增减性与极值	
函数的最大值和最小值·····	(86)
习题68—121 ·····	(89)
§ 4 曲线的凹凸性与拐点	
渐近线和函数作用·····	(92)
习题122—151·····	(96)
§ 5 台劳公式·····	(98)
习题152—175·····	(100)
§ 6 弧微分 曲率·····	(103)
习题176—196·····	(106)
§ 7 方程的近似根·····	(107)
习题197—199·····	(109)
练习题200—215·····	(109)
第五章 不定积分 ·····	(112)
§ 1 不定积分的概念·····	(112)
习题1—20 ·····	(115)
§ 2 基本积分法·····	(116)
习题21—102 ·····	(122)
§ 3 几类函数的积分法·····	(126)
习题103—145·····	(133)

练习题146—175	(136)
第六章 定积分	(139)
§ 1 定积分的概念和性质	(139)
习题1—16	(144)
§ 2 定积分与原函数的关系	(146)
习题17—38	(149)
§ 3 定积分的计算方法	(151)
习题39—82	(159)
§ 4 定积分的近似计算方法	(162)
习题83—85	(165)
§ 5 广义积分与 Γ 函数初步	(166)
习题86—110	(169)
§ 6 定积分的应用	(172)
习题111—145	(183)
练习题146—174	(186)
第七章 空间解析几何与向量代数	(190)
§ 1 空间直角坐标系	(190)
习题1—5	(192)
§ 2 向量代数	(192)
习题6—30	(199)
§ 3 平面及其方程	(200)
习题31—48	(203)
§ 4 空间直线及其方程	(204)
习题49—70	(208)
§ 5 常见的曲面及其方程	(211)
习题71—90	(216)
§ 6 空间曲线的方程	(217)
习题91—98	(219)
练习题99—110	(220)

第八章 多元函数微分学	(222)
§ 1 多元函数的概念.....	(222)
习题1—30	(226)
§ 2 偏导数.....	(229)
习题31—60.....	(232)
§ 3 全微分及其应用.....	(235)
习题61—86.....	(237)
§ 4 多元复合函数微分法.....	(240)
习题87—114	(242)
§ 5 隐函数微分法.....	(246)
习题115—135.....	(249)
§ 6 方向导数和梯度.....	(251)
习题136—145.....	(253)
§ 7 偏导数的几何应用.....	(254)
习题146—165.....	(258)
§ 8 多元函数的极值.....	(260)
习题166—190.....	(263)
§ 9* 二元函数的台劳公式.....	(265)
习题191—193.....	(267)
练习题194—200.....	(268)
第九章 重积分	(270)
§ 1 二重积分的概念及算法.....	(270)
习题1—55	(278)
§ 2 三重积分的概念及算法.....	(285)
习题56—75.....	(293)
§ 3 重积分的应用.....	(297)
习题76—91.....	(302)
练习题92—97.....	(303)
第十章 曲线积分与曲面积分	(305)

§ 1	第一类曲线积分和第二类曲线积分	(305)
	习题1—30	(313)
§ 2	格林公式 平面曲线积分与路径无关的条件	(317)
	习题31—52	(321)
§ 3	第一类曲面积分和第二类曲面积分	(325)
	习题53—77	(333)
§ 4	奥—高公式, 曲面积分与路径无关的条件, 斯托克斯公式, 空间曲线积分与路径无关的条件	(336)
	习题78—91	(342)
§ 5	矢量场的散度和旋度	(344)
	习题92—102	(348)
	练习题103—112	(348)
第十一章	级数	(351)
§ 1	无穷级数的基本概念	(351)
	习题1—23	(356)
§ 2	正项级数	(359)
	习题29—74	(364)
§ 3	任意项级数敛散性的判别法	(367)
	习题75—91	(373)
§ 4	幂级数	(374)
	习题92—117	(381)
§ 5	函数的幂级数展开	(383)
	习题118—146	(392)
§ 6	傅立叶级数	(394)
	习题147—157	(402)
§ 7	正弦级数与余弦级数	(404)
	习题153—164	(409)
§ 8	以 $2l$ 为周期的函数的傅立叶级数	(410)

习题165—175	(415)
练习题176—196	(418)
第十二章 微分方程	(422)
§ 1 微分方程的基本概念	(422)
习题1—13	(422)
§ 2 一阶微分方程的解法	(423)
习题14—90	(433)
* § 3 一阶微分方程的近似解法——欧拉折线法	(439)
习题91—92	(441)
§ 4 可降阶的高阶微分方程的解法	(442)
习题93—110	(445)
§ 5 常系数线性微分方程的解法	(446)
习题111—163	(455)
§ 6 变系数线性微分方程的解法	(458)
习题164—181	(464)
§ 7 常微分方程的幂级数解法	(465)
习题182—186	(468)
练习题187—195	(468)
答案	(470)

第一章 函数

§ 1 集合与函数

一 集合概念

一般把具有某种共同性质的一些事物组成的全体，称之为集合。集合中的事物称为元素，若 a 是集合 A 的元素，记为 $a \in A$ ，否则记作 $a \notin A$ 。

设 A 、 B 是两个集合，则

并集： $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ ；

交集： $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ ；

差集： $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 。

如果 U 是一全集，则 A 的余集为

$$\overline{A} = \{x \mid x \in U \text{ 且 } x \notin A\}.$$

二 映射

(1) 映射定义

设 A 、 B 是两个集合， f 是某种确定的对应规律，若对于每一个元素 $x \in A$ ，通过 f 都有唯一的元素 $y \in B$ 与之对应，则称 f 为由 A 到 B 的映射，记为

$$x \xrightarrow{f} y \quad \text{或} \quad f(x) = y.$$

由 A 到 B 的映射也记作

$$A \xrightarrow{f} B \quad \text{或} \quad f: A \rightarrow B.$$

其中 A 称为 f 的定义域， $B_f = \{y \mid y = f(x), x \in A\}$ 称为 f 的

值域.

(2) 一一映射

设 $f: A \rightarrow B$, 如果 $B_f = B$ 则称 f 是满射的; 对于任意的 $x_1, x_2 \in A$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 是单射的; 如果 f 既是单射又是满射, 则称 f 为一一映射.

(3) 逆映射

如果 $f: A \rightarrow B$ 是一一映射, 那么由 B 到 A 的映射也存在, 此映射称为 f 的逆映射, 记为

$$f^{-1}: B \rightarrow A.$$

三 函数概念

设 $f: A \rightarrow B$, 如果 A, B 是两个实数集, 则称 f 为从 A 到 B 的函数, 记为

$$y = f(x).$$

其中 A 称为函数的定义域, B_f 称为函数值域, x 叫做自变量, y 叫做因变量.

函数的几种性质:

有界性: 若存在数 $M > 0$, 使得

$$|f(x)| \leq M, \quad x \in I,$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界.

单调性: 对任意的 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 有

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ (或 } f(x_1) > f(x_2) \text{)},$$

则称 $f(x)$ 在 I 上单调增 (或单调减).

奇偶性: 设 $f(x)$ 定义在 $(-a, a)$ 上, 若

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数; 如果

$$f(-x) = -f(x)$$

则称 $f(x)$ 为奇函数.

周期性: 设 $f(x)$ 定义在 $(-\infty, +\infty)$, 如果

$$f(x+T) = f(x) \quad (T > 0 \text{ 的常数}),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为周期.

例 1 求函数 $y = \sqrt{x+1} + \frac{1}{\lg(1-x)}$ 的定义域.

解 当 $x \geq -1$ 时 $\sqrt{x+1}$ 有意义, 而 $\frac{1}{\lg(1-x)}$ 仅当 $x < 1$ 且 $x \neq 0$ 时才有意义. 所以函数定义域是 $x \geq -1$ 与 $x < 1$ 且 $x \neq 0$ 的公共部分: $-1 \leq x < 0$ 与 $0 < x < 1$.

例 2 设 $f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = \cos x + 1$, 求 $f(x)$, $f\left(\cos \frac{x}{2}\right)$.

解 $f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = \cos x + 1 = 2\left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right)$.

令 $u = \sin \frac{x}{2}$, 得

$$f(u) = 2(1 - u^2). \text{ 所以}$$

$$f(x) = 2(1 - x^2),$$

$$f\left(\cos \frac{x}{2}\right) = 2\left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right) = 2 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

求初等函数的定义域一般要考虑以下几个方面:

- (1) 在分式中要除去使分母为零的那些 x 值;
- (2) 在开偶次方的根式中, 要除去根号下为负数的那些 x 值;
- (3) 在对数中, 要除去使真数小于或等于零的那些 x 值;
- (4) 注意利用反三角函数的定义域:

$y = \arcsin x$ 及 $y = \arccos x$ 的定义域是 $-1 \leq x \leq 1$.

$y = \operatorname{arctg} x$ 及 $y = \operatorname{arccotg} x$ 的定义域是 $-x < x < +\infty$.

习 题

1 设 $A = [0, 1]$, $B = [1, 3]$, 求 $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus$

B.

2 设 $U = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, c, f\}$, 求 $\overline{A}$, $\overline{B}$.

3 证明: $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

4 下列映射都是由 R 到 R 的映射, 哪一个是满射, 哪一个是单射, 哪一个是一一映射?

(1) $f(x) = 2x + 5$; (2) $f(x) = x^2$;

(3) $f(x) = 2^x$.

5 $x \mapsto x^2$ 是一个由 R 到 R_f 的映射, 求 R_f 中下列集合的原象.

(1) $B_1 = \{0\}$; (2) $B_2 = \{4\}$.

6 设 $f(x) = 1 + x^2$, $0 \leq x \leq 1$, $g(x) = 1 + x^2$, $0 \leq x \leq 3$ 是同一个映射吗?

在 (7—12) 中解不等式:

7 $x^2 + x > 2$; 8 $(x^2 - 1)(x + 3) > 0$;

9 $|x - 2| > 1$; 10 $1 < |x - 4| < 2$;

11 $\left| \frac{1}{x+2} \right| < 2$; 12 $\frac{1}{(x-3)^2} > 100$.

13 证明不等式 $|xy| \leq x^2 + y^2$.

14 证明不等式

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

15 证明: 当 $x > -1$ 时,

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (n > 1).$$

在 (16—21) 中用区间表示不等式:

16 $|x - 1| \leq 3$; 17 $-3 < x \leq 5$;

18 $|x + 2| > 1$; 19 $x \geq 2$;

20 3 的 1 邻域; 21 -1 的 3 邻域.

确定 (22—31) 中函数的定义域:

$$22 \quad y = x\sqrt{x^2-2}; \quad 23 \quad y = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{x+2}};$$

$$24 \quad y = \sqrt{\frac{x-3}{x+3}}; \quad 25 \quad y = \sqrt{9-x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}};$$

$$26 \quad y = \ln \frac{x+2}{2-x}; \quad 27 \quad y = \arcsin \frac{2x}{1+x};$$

$$28 \quad y = \ln \frac{x^2-3x+2}{x+1}; \quad 29 \quad y = \sqrt{\sin 2x};$$

$$30 \quad y = \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} + \ln(2x-3);$$

$$31 \quad y = \arccos \frac{x-1}{2} + \sqrt{4-x^2}.$$

$$32 \quad \text{设 } f(x) = \frac{1}{x-3} + \sqrt{\log \frac{1}{3}(x-2)}, \text{ 求:}$$

(1) $f(x)$ 的定义域;

(2) $f(\ln x)$ 的定义域;

(3) $f(x+a) + f(x-a)$ 的定义域 ($a > 0$).

$$33 \quad \text{设 } f(x) = \frac{1+x}{1-x}, \text{ 求 } f(-x), f(x+1), f\left(\frac{1}{x}\right).$$

34 设

$$f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \leq 0, \\ 2^x, & x > 0, \end{cases}$$

求 $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$.

35 设

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \leq 0, \\ 2, & x > 0, \end{cases}$$

(1) 求 $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(4)$;

(2) 作函数 $y=f(x)$ 的图形.

36 若 $f(x+1)=x^2-3x+2$, 求 $f(x)$, $f(x-1)$.

37 设 $f(x)=2x^4-3x^3-5x^2+6x-10$, 求

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

38 设 $F(x)=\lg(x+1)$, 证明:

$$F(y^2-2)-F(y-2)=F(y).$$

39 下面各题中函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 是否相同?

$$(1) f(x)=x, \quad \varphi(x)=\sqrt{x^2};$$

$$(2) f(x)=x^3\sqrt{x-1}, \quad \varphi(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3};$$

$$(3) f(x)=\sqrt{1-\cos 2x}, \quad \varphi(x)=\sin x.$$

40 指出下列函数中哪些是奇函数, 哪些是偶函数, 哪些是非奇非偶函数.

$$(1) f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x}) \quad (a>0);$$

$$(2) f(x)=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x});$$

$$(3) f(x)=(x+1)^2;$$

$$(4) f(x)=\ln \frac{1+x}{1-x};$$

$$(5) f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2});$$

$$(6) f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

41 设 $f(x)$ 满足条件 $2f(x) + f(\frac{1}{x}) = \frac{a}{x}$ (a 为常数),

证明: $f(x)$ 是奇函数.

42 下列函数中哪些是周期函数? 如果是周期函数, 指出它的周期:

(1) $y = \sin^2 x$; (2) $y = 1 + \lg x$;

(3) $y = x \cos x$;

(4) $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$.

43 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\omega) = -f(x)$ ($\omega > 0$), 证明 $f(x)$ 是以 2ω 为周期的周期函数.

44 作下列函数的图形:

(1) $y = \frac{1}{2}(x + |x|)$; (2) $y = x|x|$;

(3) $y = x - [x]$.

45 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 且

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & -\pi < x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < \pi, \end{cases}$$

试在 $(-\infty, +\infty)$ 内作出函数 $y = f(x)$ 的图形.

§ 2 复合函数与初等函数

一 复合函数

设 $y = f(u)$ 是数集 B 上的函数, $u = \varphi(x)$ 是由数集 A 到数集 B ($B \subseteq B$) 的函数, 于是对每一个 $x \in A$ 通过 u 都有唯一的 y 值与之对应, 这时在 A 上产生一个新的函数, 用 $f \circ \varphi$ 表示, 称为 A 上的复合函数, 记作

$$x \xrightarrow{f \circ \varphi} y \quad \text{或} \quad f \circ \varphi(x) = y.$$