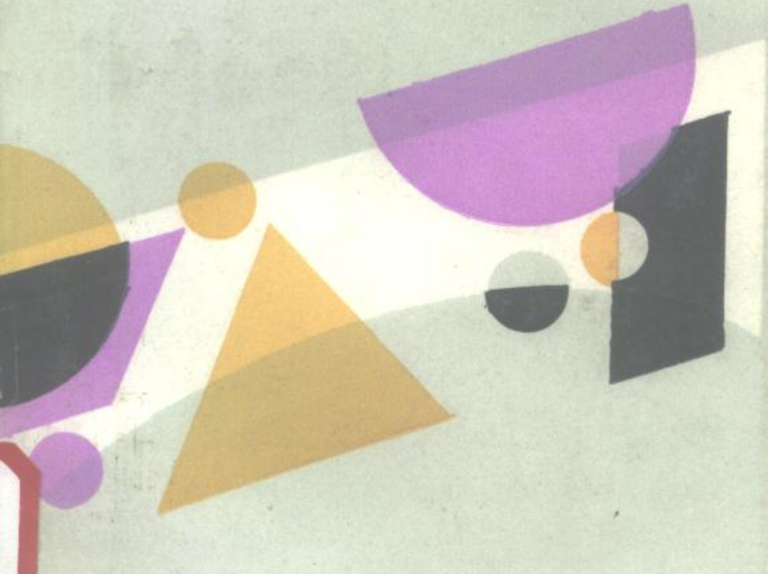
高等数学提要与习题集

GAODENGSHU
XUETIYAO
YUXITIJI

高等学校教材

王佩荔 等编



天津大学出版社

高等数学提要与习题集

王佩荔　王开业　何银兰　李君湘　编

天津大学出版社

内 容 提 要

本书是蔡高厅、叶宗泽主编的《高等数学》（上、下册）的配套用书，是在天津大学出版社历年《高等数学习题集》版本基础上重新组织编写而成的。

全书按章、节编排。每节均配有内容提要和典型例题与教学内容相呼应。习题的编排与教材顺序一致。各章末有综合性练习题供教学选用。书末附有全书的习题参考答案、常见的平面曲线图形和曲面所围成的立体图形。

本书是高等工业院校本科生《高等数学》课程的教学用书，也可供科技人员参考用书。

(津)新登字012号

高等数学提要与习题集

王佩荔　王开业
何银兰　李君湘　编

天津大学出版社出版
（天津大学内）
河北省邮电印刷厂印刷
新华书店天津发行所发行

开本：850×1168毫米1/32　印张：17 6/8　字数：458 千字
1994 年 7 月 第 一 版　　1994年 7 月第一次印刷
印数：1-10 000
ISBN 7-5618-0605-1
O·62
定价：13.80元

前　言

本书是在参考了天津大学数学系及兄弟院校历年编写与使用的“高等数学”有关教材，在吸取了天津大学数学系广大教师的教学经验基础上编写而成的教学用书.

全书对高等数学的内容和方法作了比较系统的总结和概括. 书中每节在概要叙述了本节涉及的内容的基础上，注意针对初学者在学习中常会产生的问题和疑难，选择典型例题进行分析、示范，以帮助读者学会综合运用有关知识去分析问题，解决问题，逐步加深对基本概念、基本理论的深入理解，培养和提高计算能力以及抽象思维和逻辑论证能力. 节末配有适当的习题. 每章最后的练习题，是为了帮助读者进一步理解和运用各章的基本内容与方法而选配的，用以提高读者综合解题的能力.

本书在编写过程中，得到天津大学数学系和天津大学出版社的热情支持和帮助，对此表示深切的感谢.

本书的缺点与错误，恳望读者批评指正.

编　者

1994.2

目　　录

第一章　函数

§1　集合与函数

一　集合概念

一般把具有某种共同性质的一些事物组成的全体，称之为集合．集合中的事物称为元素，若a是集合A的元素，记为$a\in A$，否则记作$a\notin A$.

设A、B是两个集合，则

并集：$A\cup B=\{x\,|x\in A$或$x\in B\}$；

交集：$A\cap B=\{x\,|x\in A$且$x\in B\}$；

差集：$A\setminus B=\{x\,|x\in A$且$x\notin B\}$.

如果U是一全集，则A的余集为

$$\overline{A}=\{x\,|x\in U\text{且}x\notin A\}.$$

二　映射

(1)映射定义

设A、B是两个集合，f是某种确定的对应规律，若对于每一个元素$x\in A$，通过f都有唯一的元素$y\in B$与之对应，则称f为由A到B的映射，记为

$$x\xrightarrow{f}y\quad\text{或}\quad f(x)=y.$$

由A到B的映射也记作

$$A\xrightarrow{f}B\quad\text{或}\quad f:A\to B.$$

其中A称为f的定义域，$B_f=\{y\,|y=f(x),\ x\in A\}$称为$f$的

值域.

（2）一一映射

设$f: A\to B$，如果$B_f=B$则称f是满射的；对于任意的x_1、$x_2\in A$，当$x_1\neq x_2$时$f(x_1)\neq f(x_2)$，则称f是单射的；如果f既是单射又是满射，则称f为一一映射.

（3）逆映射

如果$f: A\to B$是一一映射，那么由B到A的映射也存在，此映射称为f的逆映射，记为

$$f^{-1}: B\to A.$$

三　函数概念

设$f: A\to B$，如果A、B是两个实数集，则称f为从A到B的函数，记为

$$y=f(x).$$

其中A称为函数的定义域，B_f称为函数值域，x叫做自变量，y叫做因变量.

函数的几种性质：

有界性：若存在数$M>0$，使得

$$|f(x)|\leqslant M,\qquad x\in I,$$

则称函数$f(x)$在I上有界.

单调性：对任意的x_1、$x_2\in I$，当$x_1<x_2$时，有

$$f(x_1)<f(x_2)\ (\text{或} f(x_1)>f(x_2)),$$

则称$f(x)$在I上单调增（或单调减）.

奇偶性：设$f(x)$定义在$(-a, a)$上，若

$$f(-x)=f(x),$$

则称$f(x)$为偶函数；如果

$$f(-x)=-f(x)$$

则称$f(x)$为奇函数.

周期性：设$f(x)$定义在$(-\infty, +\infty)$，如果

$$f(x+T)=f(x)\qquad (T>0\text{的常数}),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为周期.

例 1 求函数 $y=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{\lg(1-x)}$ 的定义域.

解 当 $x\geqslant-1$ 时 $\sqrt{x+1}$ 有意义，而 $\dfrac{1}{\lg(1-x)}$ 仅当 $x<1$ 且 $x\neq 0$ 时才有意义. 所以函数定义域是 $x\geqslant-1$ 与 $x<1$ 且 $x\neq 0$ 的公共部分：$-1\leqslant x<0$ 与 $0<x<1$.

例 2 设 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=\cos x+1$，求 $f(x)$，$f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)$.

解 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=\cos x+1=2\left(1-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)$.

令 $u=\sin\dfrac{x}{2}$，得

$f(u)=2(1-u^2)$. 所以

$$f(x)=2(1-x^2),$$

$$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)=2\sin^2\frac{x}{2}.$$

求初等函数的定义域一般要考虑以下几个方面：

(1) 在分式中要除去使分母为零的那些 x 值；

(2) 在开偶次方的根式中，要除去根号下为负数的那些 x 值；

(3) 在对数中，要除去使真数小于或等于零的那些 x 值；

(4) 注意利用反三角函数的定义域：

$y=\arcsin x$ 及 $y=\arccos x$ 的定义域是 $-1\leqslant x\leqslant 1$.

$y=\mathrm{arctg}\,x$ 及 $y=\mathrm{arcctg}\,x$ 的定义域是 $-\infty<x<+\infty$.

习　题

1 设 $A=[0, 1]$，$B=[1, 3]$，求 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\setminus$

B.

2　设$U=\{a, b, c, d, e, f\}$，$A=\{a, b, c\}$，$B=\{a, c, f\}$，求$\overline{A}$，$\overline{B}$.

3　证明：$\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

4　下列映射都是由R到R的映射，哪一个是满射，哪一个是单射，哪一个是一一映射？

(1) $f(x)=2x+5$；　(2) $f(x)=x^2$；

(3) $f(x)=2^x$.

5　$x\xrightarrow{f}x^2$是一个由R到R_f的映射，求R_f中下列集合的原象.

(1) $B_1=\{0\}$；　(2) $B_2=\{4\}$.

6　设$f(x)=1+x^2$，$0\leqslant x\leqslant 1$，$g(x)=1+x^2$，$0\leqslant x\leqslant 3$是同一个映射吗？

在(7—12)中解不等式：

7　$x^2+x>2$；　8　$(x^2-1)(x+3)>0$；

9　$|x-2|>1$；　10　$1<|x-4|<2$；

11　$\left|\dfrac{1}{x+2}\right|<2$；　12　$\dfrac{1}{(x-3)^2}>100$.

13　证明不等式$|xy|\leqslant x^2+y^2$.

14　证明不等式

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|.$$

15　证明：当$x>-1$时，

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx \quad (n>1).$$

在(16—21)中用区间表示不等式：

16　$|x-1|\leqslant 3$；　17　$-3<x\leqslant 5$；

18　$|x+2|>1$；　19　$x\geqslant 2$；

20　3的1邻域；　21　-1的3邻域.

确定(22—31)中函数的定义域：

22　$y=x\sqrt{x^2-2}$；　　23　$y=\sqrt{-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$；

24　$y=\sqrt{\dfrac{x-3}{x+3}}$；　　25　$y=\sqrt{9-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$；

26　$y=\ln\dfrac{x+2}{2-x}$；　　27　$y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$；

28　$y=\ln\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$；　　29　$y=\sqrt{\sin 2x}$；

30　$y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}+\ln(2x-3)$；

31　$y=\arccos\dfrac{x-1}{2}+\sqrt{4-x^2}$.

32　设　$f(x)=\dfrac{1}{x-3}+\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x-2)}$，求：

(1) $f(x)$的定义域；

(2) $f(\ln x)$的定义域；

(3) $f(x+a)+f(x-a)$的定义域（$a>0$）.

33　设　$f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$，求$f(-x)$，$f(x+1)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

34　设

$$f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\leqslant 0,\\ 2^x, & x>0,\end{cases}$$

求$f(-2)$，$f(0)$，$f(2)$.

35　设

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & x\leqslant 0,\\ 2, & x>0,\end{cases}$$

(1)求$f(0)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(-1)$，$f(1)$，$f(4)$；

(2)作函数$y=f(x)$的图形.

36 若$f(x+1)=x^2-3x+2$，求$f(x)$，$f(x-1)$.

37 设$f(x)=2x^4-3x^3-5x^2+6x-10$，求

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

38 设 $F(x)=\lg(x+1)$，证明：

$$F(y^2-2)-F(y-2)=F(y).$$

39 下面各题中函数$f(x)$和$\varphi(x)$是否相同？

(1)$f(x)=x$，　　$\varphi(x)=\sqrt{x^3}$；

(2)$f(x)=x^3\sqrt{x-1}$，$\varphi(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$；

(3)$f(x)=\sqrt{1-\cos 2x}$，$\varphi(x)=\sin x$.

40 指出下列函数中哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些是非奇非偶函数.

(1)$f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$　$(a>0)$；

(2)$f(x)=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})$；

(3)$f(x)=(x+1)^2$；

(4)$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$；

(5)$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

(6)$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

41 设 $f(x)$ 满足条件 $2f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{a}{x}$（$a$ 为常数），证明：$f(x)$ 是奇函数.

42 下列函数中哪些是周期函数？如果是周期函数，指出它的周期：

（1） $y=\sin^2 x$；　　（2） $y=1+\mathrm{tg}\,x$；

（3） $y=x\cos x$；

（4） $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$.

43 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\omega)=-f(x)$（$\omega>0$），证明 $f(x)$ 是以 2ω 为周期的周期函数.

44 作下列函数的图形：

（1） $y=\frac{1}{2}(x+|x|)$；　　（2） $y=x|x|$；

（3） $y=x-[x]$.

45 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，且

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & -\pi<x<0, \\ 0, & 0\leqslant x<\pi, \end{cases}$$

试在（$-\infty$，$+\infty$）内作出函数 $y=f(x)$ 的图形.

§2　复合函数与初等函数

一　复合函数

设 $y=f(u)$ 是数集 B 上的函数，$u=\varphi(x)$ 是由数集 A 到数集 $B_f\subseteq B$ 的函数，于是对每一个 $x\in A$ 通过 u 都有唯一的 y 值与之对应，这时在 A 上产生一个新的函数，用 $f\circ\varphi$ 表示．称为 A 上的复合函数，记作

$$x\xrightarrow{f\circ\varphi}y \quad 或 \quad f\circ\varphi(x)=y.$$