YINGYONG FEIXIANXING ZHENDONGLIXUE XITI YUXUANJIE

应用非线性振动力学习题与选解

宫心喜 臧剑秋 编

中国铁道出版社

应用非线性振动力学习题与选解

官心喜　臧剑秋　编

中国铁道出版社
1986年·北京

内 容 提 要

本书包括非线性振动的基本理论、基本方法和工程应用方面的各种类型的习题，共五章，256题，大部分题都给出了题解，全部计算题都有答案。习题主要取材于现行教学用书和国内常见的中外文参考书，可供高等理工科院校师生和从事非线性振动计算工作的工程技术人员学习参考。

应用非线性振动力学习题与选解

宫心喜　臧剑秋　编

中国铁道出版社出版

责任编辑　宋黎明

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092毫米 $\frac{1}{32}$　印张：13.125　字数：302千

1986年1月第1版　第1次印刷

印数：0001—3，500册　定价：2.45元

前　言

非线性振动问题是近代物理学和技术科学许多领域中的重要课题。非线性振动理论已日益成为理工科院校许多专业的一门必修理论课程，以及工程技术人员工作中所需要的基础知识。我们知道，无论是在学校里学习或者是自学，除了必须有较好的教材和参考书以外，通过一定数量的例题和习题来理解、巩固和深化课程的基本内容也是一个很重要的环节。为此，编者结合教学而编写了这本习题集，希望能在这方面有所裨益。

本书包括非线性振动和运动稳定性的一些基本内容。习题主要取材于本书参考书目中所列的各书，可以与这些书配合起来学习。在选题和解答时，重点放在巩固、深化基本概念和基本方法以及提高分析问题、解决问题和自学的能力上。每章的题目尽可能按不同类型而由浅入深地作出安排。数字计算题采用了国际单位制。

本书在编写过程中，始终得到铁道科学研究院基础理论室冯登泰老师的指导、帮助和支持。我室臧剑秋同志曾提供80个习题。初稿写完后，由我院杨熙冲副教授对全部题解进行了审阅，提出了修改建议，并补充了30个习题及其解答。我的老师、天津大学李骊教授和我的同学刘谟轩、陈予恕副教授也给了不少指导和帮助。此外，还得到了中国铁道出版社编辑部同志们的指导，并协助解决描图问题。编者在

此深表谢意。由于编者水平所限，书中肯定会有错误和不妥之处，衷心地希望读者指正。

北京钢铁学院
数学力学系理论力学教研室　宫心喜　1984年12月9日

目　　录

第一章　非线性系统振动微分方程的建立

一、非线性系统振动微分方程的常见类型

（一）一般形式

1. 最一般的形式

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f(x,\frac{dx}{dt},t)$$

2. 非自治的小参数形式

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\varepsilon f(x,\frac{dx}{dt},t,\varepsilon)\quad 0<\varepsilon\ll 1$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\varepsilon f(x,\frac{dx}{dt},t)\quad 0<\varepsilon\ll 1$$

3. 非自治的非小参数形式

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f(x,\frac{dx}{dt})+f_0(t)$$

4. 自治的小参数形式

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\varepsilon f(x,\frac{dx}{dt})\quad 0<\varepsilon\ll 1$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\varepsilon f(x,\frac{dx}{dt},\varepsilon)\quad 0<\varepsilon\ll 1$$

5. 自治的非小参数形式

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f(x,\frac{dx}{dt})$$

6. 其　它

（二）特殊形式

1. 普通数学摆

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2\sin x=0 \qquad k=\cos st$$

2. 范德波（Van der Pol）方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=(1-x^2)\ \frac{dx}{dt}$$

3. 库伦（Coulomb）摩擦振动方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\mu N sign\ \frac{dx}{dt}+f(x)$$

4. 希尔（Hill）方程

$$\ddot{\theta}+\left[-\frac{g}{l}+\frac{1}{l}p(t)\right]\theta=0$$

5. 马奇乌（Mathieu）方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2(1+h\cos\gamma t)x=0$$

6. 其　它

以上所列举的几种类型，只是非线性振动微分方程常见类型中的一少部分，其它类型的方程还很多，可阅读参考书〔1〕*中第一章。

二、建立非线性系统振动微分方程的常用理论

（一）力学理论

常用力学理论有牛顿定津、达朗贝尔原理、动量定理、质心运动定理、动量矩定理、刚体绕定轴转动微分方程、动能定理、机械能守恒定津、刚体平面运动微分方程、虚位移原理、拉格朗日方程和哈密顿变分原理等。

（二）电学理论

*〔1〕表示书末所附第一本参考书，以后书中出现〔1〕—〔22〕，都表示所附参考书的号码。

常用电学理论有基尔希霍夫第一和第二定律、欧姆定律、楞次定律和法拉第定律等。

三、习题〔1—1〕～〔1—34〕

【题1—1】 已知小球质量m很小，放在长度为$2l$的拉紧着的竖直钢丝AB的中点C处（见图1—1(a)），钢丝的横截面积为A，弹性模量为E，初始拉力为T_0，质量不计。试求小球沿水平方向作自由振动的振动微分方程。

【解】 坐标轴x水平设置，原点在小球的静平衡位置C点处。当小球偏离C点的距离为x时，钢丝AB和BC都增长了Δl，因此，钢丝的拉力增大到$T_0+AE\cdot\Delta l/l$。小球的受力图如图1—1(b)所示。由于质量m很小，故小球重力可不计。

根据牛顿定律在x轴上的投影式，可得小球的振动微分方程：

$$m\ddot{x}=-2\left(T_0+\frac{AE\cdot\Delta l}{l}\right)\sin\theta \tag{1}$$

式中θ角为钢丝与竖直线之间的夹角。由图中几何关系可知：

$$\left.\begin{aligned}\Delta l&=\sqrt{l^2+x^2}-l\\ \sin\theta&=x/\sqrt{l^2+x^2}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

把式（2）代入式（1），得：

$$m\ddot{x}+2\left[T_0+\frac{AE(\sqrt{l^2+x^2}-l)}{l}\right]\frac{x}{\sqrt{l^2+x^2}}=0 \tag{3}$$

此即小球的振动微分方程式。当x较小时，此式可进一步简化如下。

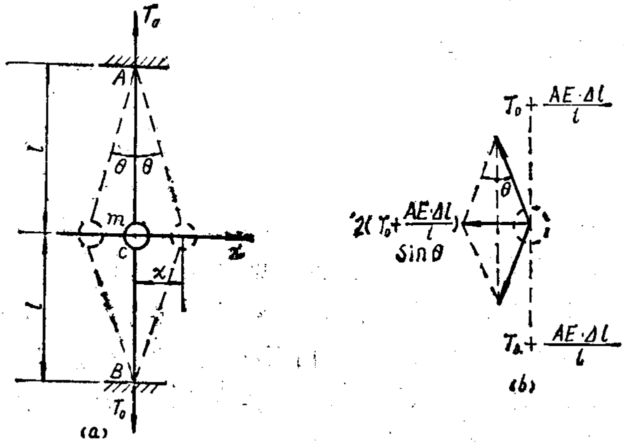

图 1—1

将$\sqrt{l^2+x^2}$展开为泰勒级数：

$$\sqrt{l^2+x^2}=l+\frac{x^2}{2l}-\frac{1}{8}\cdot\frac{x^4}{l^3}+\cdots\cdots$$

因x较小，故可只取级数的前两项，因此，钢丝的伸长增量为：

$$\left.\begin{aligned}&\Delta l=\sqrt{l^2+x^2}-l\approx x^2/2l\\&\sin\theta\approx x/l\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

把式（4）代入式（3），可得：

$$m\ddot{x}+2T_0x/l+AEx^3/l^3=0$$

或

$$\ddot{x}+2T_0x/(ml)+AEx^3/(ml^3)=0$$

【题1—2】已知质量很小而长度为l_1的刚性杆CD，其上端悬挂在固定点C处，下端D与一重量为W的重物相连，且D点与一条初始拉力为T_0的水平钢丝AB相连接，如图1—2所示。设钢丝横截面积为A，长度为$2l$，弹性模量为E。试求重物的自由振动微分方程。

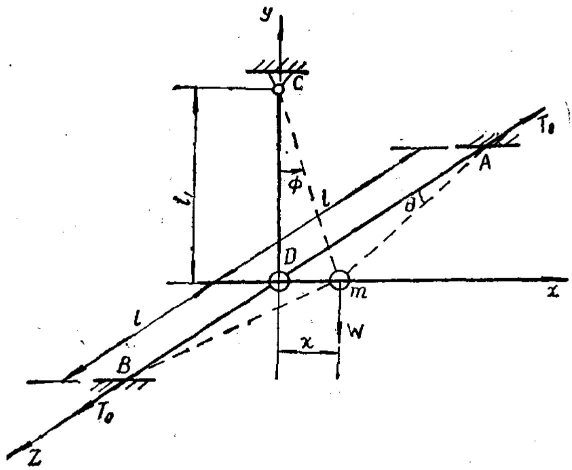

图 1—2

【解】首先不考虑钢丝AB的作用，而只考虑摆长为l_1的单摆的重力作用，可得单摆的振动微分方程为：

$$\ddot{\phi}+\frac{g}{l_1}\sin\phi=0 \tag{1}$$

若将$\sin\phi$展开为级数，并只取其前两项，即取$\sin\phi\approx\phi-\phi^3/6$，则式（1）可写为：

$$\ddot{\phi}+\frac{g}{l_1}(\phi-\frac{\phi^3}{6})=0 \tag{2}$$

把$x\approx l_1\phi$，即$\phi\approx x/l_1$代入式（2），得：

$$\ddot{x}+\frac{g}{l_1}\ (x-\frac{x^3}{6l_1^2})=0 \tag{3}$$

此处恢复力随x增加而减少，属于软弹簧性质。而由上题已知重物在钢丝恢复力作用下的振动微分方程为：

$$\ddot{x}+\frac{2T_0}{ml}x+\frac{AE}{ml^3}x^3=0$$

因$W=mg$，故代入上式，可得

$$\ddot{x}+\frac{2T_0g}{Wl}x+\frac{AEg}{Wl^3}x^3=0 \tag{4}$$

此恢复力随x增加而增加，属于硬弹簧性质。这两种性质不同的恢复力相结合，能得到近似的等时振动。

当图1—2中的ϕ角不是很大时，可近似地得到重物的振动微分方程：

$$\ddot{x}+\left(\frac{2T_0g}{Wl}+\frac{g}{l_1}\right)x+\left(\frac{AEg}{Wl^3}-\frac{1}{6l_1^2}\right)x^3=0 \tag{5}$$

当$AEg/Wl^3=1/6l_1^2$时，式（5）可写为：

$$\ddot{x}+\left(\frac{2T_0g}{Wl}+\frac{g}{l_1}\right)x=0 \tag{6}$$

由上式可知，因两个非线性恢复力一软一硬，趋于互相补偿，故可得到所谓等时振动的较好近似值，可见参考书〔2〕。

【题1—3】 已知图1—3中重量为W的摆由弹簧和柔绳来约束，绳长为l_1。在静平衡位置时，OB_0为竖直线，弹簧原长为l_2。已知弹簧刚度为k，试确定：（a）大摆动的非线性振动微分方程；（b）大摆动的近似非线性振动微分方程；（c）小摆动的近似线性振动微分方程。

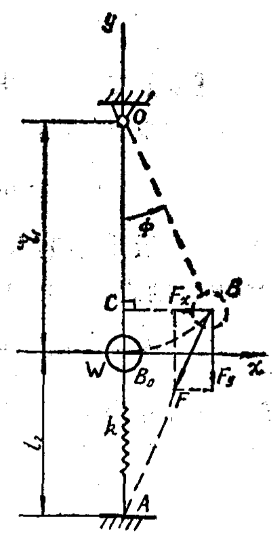

图 1—3

【解】 取静平衡位置OB_0为广义坐标ϕ的起始位置（见图）。并设在

任意位置时弹簧 AB 的总长为 l，则弹簧的伸长为：

$$\Delta l = l - l_2$$

其中

$$l = \sqrt{l_2^2 + 2l_1(l_1 + l_2)(1 - \cos\phi)} \qquad (1)$$

弹簧恢复力 F 的大小为 $k(l-l_2)$，它可分解为水平分力 F_x 和竖直分力 F_y，分力的大小分别为：

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \frac{k(l-l_2)l_1\sin\phi}{l} \\ F_y &= \frac{k(l-l_2)[l_2 + l_1(1-\cos\phi)]}{l} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

（a）根据质点动量矩定理，可得摆的大摆动非线性振动微分方程为：

$$\frac{W}{g} l_1^2\ddot{\phi} = -Wl_1\sin\phi - F_x \cdot l_1\cos\phi - F_y \cdot l_1\sin\phi \qquad (3)$$

把式（1）、（2）代入式（3），可得：

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l_1}\sin\phi + \frac{kg}{Wl_1}(l_1 + l_2)\left[1 - \frac{l_2}{\sqrt{l_2^2 + 2l_1(l_1+l_2)(1-\cos\phi)}}\right]\sin\phi = 0 \qquad (4)$$

（b）把 $l_2/\sqrt{l_2^2 + 2l_1(l_1+l_2)(1-\cos\phi)}$ 展开为级数，并利用近似式 $\cos\phi \approx 1 - \phi^2/2$，可得：

$$\begin{aligned} & l_2/\sqrt{l_2^2 + 2l_1(l_1+l_2)(1-\cos\phi)} \\ &= 1 - l_1(l_1 + l_2)\phi^2/2l_2^2 \end{aligned} \qquad (5)$$

把近似式 $\sin\phi \approx \phi - \phi^3/6$ 和式（5）代入式（4）并取到 ϕ^3 项，可得摆的大摆动近似非线性微分方程为：

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l_1}\phi + \frac{g}{2}\left[\frac{k}{W}\left(\frac{l_1}{l_2} + 1\right)^2 - \frac{1}{3l_1}\right]\phi^3 = 0$$

（c）对于小摆角ϕ，可略去ϕ^3项，而得到摆的小摆动近似线性微分方程得：

$$\ddot{\phi}+g\phi/l_1=0$$

按照以上三题的方法，读者可自己解答以下四题。

【题1—4】图1—4中重量为W的摆由弹簧和柔绳来约束，绳长为l_1，静平衡时OB_0为竖直线，弹簧原长为l_2。若弹簧的刚度系数为k，试确定：（a）大摆动的非线性振动微分方程；（b）小摆动的近似线性振动微分方程。

提示：取图示静平衡位置为坐标原点，角ϕ为广义坐标，利用动量矩定理。

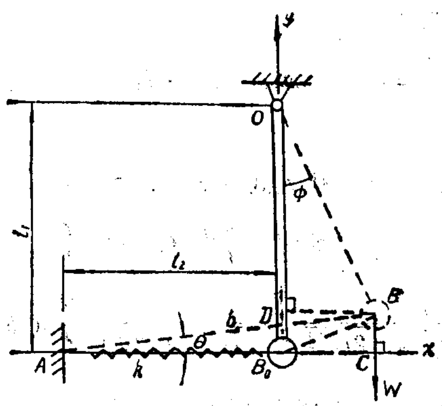

图 1—4

答案：

（a）摆的大摆动非线性振动微分方程为：

$$\ddot{\phi}+\frac{g}{l_1}\left[\sin\phi+\frac{F}{W}\cos(\phi-\theta)\right]=0$$

式中

$$F=k\left(\frac{l_2+l_1\sin\phi}{\cos\theta}-l_2\right)$$

$$\theta=\operatorname{arctg}\left[\frac{l_1(1-\cos\phi)}{l_2+l_1\sin\phi}\right]$$

（b）摆的小摆动近似线性微分方程为：

$$\ddot{\phi}+\left(\frac{1}{l_1}+\frac{k}{W}\right)g\phi=0\text{。}$$

【题1—5】图1—5所示为一个借末变形时长度为l的倾斜弹簧约束着质量m的装置示意图。在质量m的稳定平衡位置处，弹簧与水平轴x的夹角为θ。已知弹簧刚度为k，试写出此质量m沿x方向的大位移非线性振动微分方程。

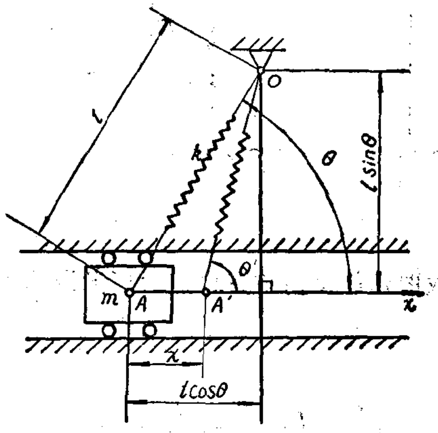

图 1—5

答案：

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}\left[x-l\cos\theta+\frac{l(l\cos\theta-x)}{\sqrt{l^2-2lx\cos\theta+x^2}}\right]=0$$

【题1—6】在图1—6中表示着一个由四根线性弹簧（两根水平，两根竖直）约束住的微小质量m。图中每一根弹簧的刚度均为k，无变形时的弹簧原长皆为l。试确定：（a）该质量顺x方向的大位移非线性振动微分方程；（b）

对大位移的近似的非线性振动微分方程；（c）对小位移的近似的线性振动微分方程。

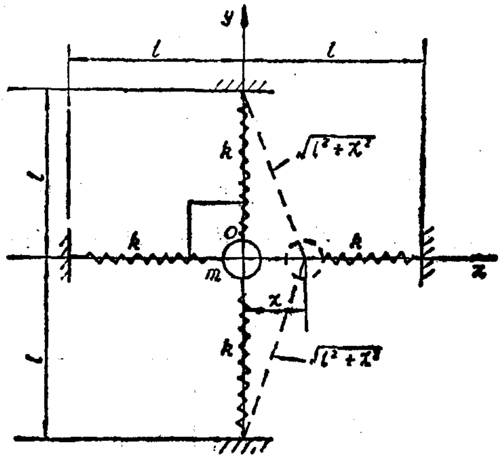

图 1—6

提示：取图示静平衡位置O点为广义坐标x的原点，不计重力。

答案：

（a）　$$\ddot{x}+\frac{2kx}{m}\left(2-\frac{l}{\sqrt{l^2+x^2}}\right)=0$$

（b）　$$\ddot{x}+\frac{2k}{m}x+\frac{k}{l^2}x^3=0$$

（c）　$$\ddot{x}+\frac{2k}{m}x=0$$

【题 1—7】在图 1—7 所示系统中，每根线弹性弹簧与水平轴x的夹角皆为45°，每根弹簧的刚度皆为k，其原长皆为l，悬挂的微小质量为m。试确定：（a）质量m沿x方向的大位移非线性振动微分方程；（b）小位移的近似