

朱渝春 编

开口薄壁杆 理论基础及程序

● 重庆大学出版社

V014.4

Z91

346817

沈

开口薄壁杆理论基础及程序

朱渝春 编



重庆大学出版社

内 容 简 介

薄壁杆系结构在工程中应用广泛。本书将经典结构力学理论扩展到薄壁杆系结构领域。不仅深入浅出地重点阐述了开口薄壁杆弯扭理论，薄壁杆系结构的力法和位移法，还介绍了这类结构计算的有限单元法，提供了行之有效的微机源程序，可供教学实习和解决诸如汽车底架计算等工程实际问题。每章后面附有习题及答案。

本书适合作工科院校机械、建筑、道桥、汽车、铁道车辆、船舶、航空及航天结构、工程力学专业学生和研究生《薄壁杆理论》课程的教材或主要教学参考书，也可供上述专业从事有关结构设计制造的工程技术人员和教师参考。

0199/20 07



开口薄壁杆理论基础及程序

朱渝春 编

责任编辑 周任

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

重庆大学出版社印刷厂印刷

开本：787×1092 1/16 印张：10.5 字数：262千

1990年6月第1版 1990年1月第6次印刷

印数：1—2500

标准书号：ISBN 7-5624-0274-4 定价：2.14元

O·44

前 言

由于一系列明显的优点,薄壁杆系结构在工程中得到十分广泛的应用,特别是在航空、船舶及车辆制造、矿山及工程机械、高层建筑等行业更是如此。但又由于各种原因,长期以来,薄壁杆理论却未能得到人们足够的重视。目前有关这方面的书籍很少,且内容大都过于单薄、陈旧或深奥,不能适应当今时代的飞速发展和技术进步(特别是电子计算机广泛应用)的迫切要求。

为满足当前理工科院校开设《薄壁杆理论》课程的需要,作者吸取手头现有资料的优点,在教学讲义的基础上,结合自己的心得体会和工作编写了这本书。同时作者也期望这本书能对广大工程技术人员重新认识和学习薄壁杆理论有所帮助、利用本书提供的程序去解决工程实际问题有所收益和启迪。

全书共分四章。第一章叙述薄壁杆件的弯曲与扭转理论,其中着重讨论了开口薄壁杆件的约束扭转,这是薄壁杆弯扭理论的基础。从第二章开始转为上述理论的应用:依次讨论了薄壁杆系结构的力法和位移法的原理及计算方法,给出了大量图表和解题实例;最后在第四章讨论了空间开口薄壁杆平面板架结构的有限单元法,阐明基本原理,提供实用程序,介绍使用方法。为加深理解,每章末尾还有一定数量的习题和答案。

学习本书只要求读者具有材料力学和结构力学基础知识,对学习起点的要求不高。在内容上主要着眼于计算机应用,但又不忽视基础理论;在编排上注意循序渐进,既便于系统讲授,又便于自学。全书内容大致适合于24~36学时的教学需要,必要时还可酌情取舍。经我校工程力学系工程力学专业83、84级学生教学试用效果良好。

在本书编写过程中,作者力图做到:概念准确、符号清楚、叙述流畅、前后呼应。但因学识及时间有限实难如愿,且错漏之处亦恐难免,恳请使用本书的同志们不吝批评指正。

本书稿承上海交通大学陈伯真教授、重庆大学张培源副教授认真审阅,他们都提出了很好的意见和建议,此外,本书的出版,还得到许多同志的热情支持和帮助,特一并致以深切的谢忱。

朱渝春

1988.5于重庆大学

目 录

第一章 薄壁杆弯曲与扭转理论基础	(1)
§ 1-1 引言.....	(1)
§ 1-2 薄壁杆件的弯曲.....	(4)
§ 1-3 开口薄壁杆件截面的弯心.....	(12)
§ 1-4 开口薄壁杆件的自由扭转.....	(17)
§ 1-5 开口薄壁杆件的约束扭转.....	(19)
§ 1-6 开口薄壁杆件约束扭转的基本假定和变形计算.....	(20)
§ 1-7 约束扭转时的应力.....	(23)
§ 1-8 开口薄壁截面的扇性几何特征.....	(25)
§ 1-9 法应力、剪应力和内力素间的关系.....	(32)
§ 1-10 约束扭转微分方程及其解.....	(36)
§ 1-11 开口薄壁杆件约束扭转与直梁纵横弯曲的比拟.....	(45)
§ 1-12 开口薄壁杆件在复杂受力状态下的应力计算.....	(49)
§ 1-13 圣维南原理在薄壁杆理论中的应用.....	(60)
§ 1-14 闭口薄壁杆件扭转概述.....	(61)
习 题.....	(63)
第二章 薄壁杆系结构的位移计算和力法	(67)
§ 2-1 薄壁杆系结构的力法计算原理和特殊性.....	(67)
§ 2-2 计算位移的一般公式和简化公式.....	(68)
§ 2-3 位移计算示例和实施方法.....	(73)
§ 2-4 连续多跨开口薄壁杆扭转时的力法计算.....	(76)
§ 2-5 开口薄壁杆件平板架的力法计算.....	(90)
习 题.....	(96)
第三章 薄壁杆系结构计算的位移法	(98)
§ 3-1 薄壁杆系结构的位移法计算原理和特殊性.....	(98)
§ 3-2 仅计及薄壁因素的杆件刚度矩阵——薄壁形常数的确定.....	(100)
§ 3-3 薄壁杆件在跨间载荷作用下引起的固端反力——载常数的计算.....	(111)
§ 3-4 连续多跨开口薄壁杆扭转时的位移法计算.....	(114)
§ 3-5 开口薄壁杆件平板架的位移法计算.....	(123)
习 题.....	(127)
第四章 薄壁杆系结构的有限单元法	(129)
§ 4-1 概述.....	(129)

§ 4-2 开口薄壁杆平面板架单元的单刚计算.....	(130)
§ 4-3 坐标变换.....	(132)
§ 4-4 边界条件的处理.....	(134)
§ 4-5 单元局部杆端力的计算.....	(135)
§ 4-6 开口薄壁杆平面板架结构有限元计算的源程序.....	(135)
§ 4-7 程序使用说明.....	(148)
§ 4-8 程序算例.....	(150)
习 题.....	(154)
附录 1 常用截面扇性几何特性表.....	(155)
附录 2 常用双曲函数公式.....	(156)
习题答案.....	(157)
参考书目.....	(160)

第一章 薄壁杆弯曲与扭转理论基础

§1-1 引言

工程中大量采用薄壁杆件结构。因为采用薄壁杆件可以减轻结构自重，合理利用材料，显著提高经济效益，并且使得结构外形美观。正是由于这些明显的优点，目前在航空、船舶、车辆、起重机和高层建筑等方面，薄壁杆件结构的应用已经日益广泛。因此，学习《薄壁杆理论》不仅有很大的实际意义和应用价值，而且还可以进一步加深对普通实心杆件弯曲问题的理解。

薄壁杆件结构是由若干薄壁杆件构成的。如果弹性杆件的长度 l 、横截面平均尺寸(横截面高度 h 或宽度 b) 和横截面壁厚 δ 都是不同级的量，则此种杆件称为薄壁杆件(图1-1)。薄壁杆件可看成是一种长柱形壳体，通常情况下应满足：

$$h:\delta=5\sim10; \quad l:h\geq10$$

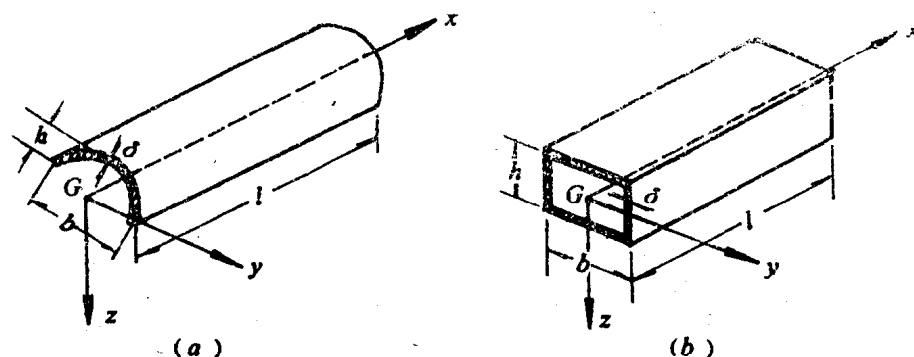


图1-1 薄壁杆件

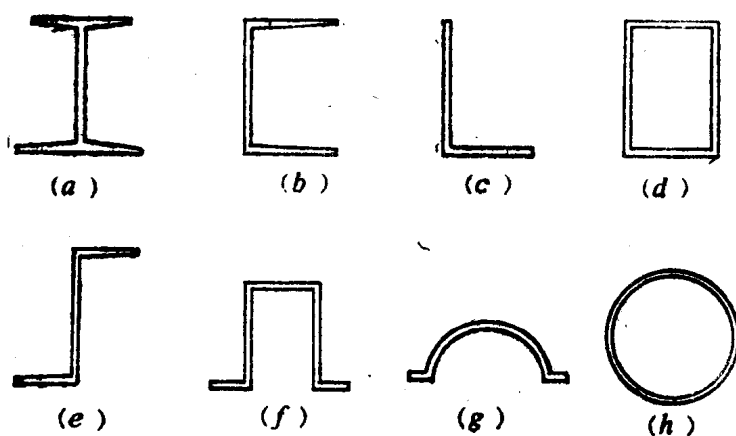


图1-2 横截面的形状

实际工程中遇到的多数薄壁杆件，其横截面由几个狭长矩形组成，如工字钢、槽钢、角钢、箱形梁等(图1-2a、b、c、d)；另外也有一些薄壁杆件的横截面是圆弧形或曲线形的，如图1-2g、h所示。

薄壁杆件按截面外形特征可以分为两类：图1-2中a、b、c、e、f、g所示的杆件截面形状不封闭，亦即弹性力学中之“单连域截面”，称为开口截面薄壁杆件；而图1-2中d、h所示的杆件截面是封闭形的，亦即弹性力学中之“双连域截

面”，故称为闭口截面薄壁杆件。今后，我们将重点讨论开口薄壁杆件，或泛称薄壁杆件。

对薄壁杆件，我们采用如图1-1中所示的直角坐标系来描述：将坐标原点放在杆件截面的形心 G ， x 轴沿杆长方向， y 、 z 轴所决定的平面与杆件横截面平行，并在截面上互相正交。

因此，对等截面薄壁杆件而言， x 轴就是杆件截面形心的连线，即杆的轴线。

在薄壁杆件中，平分截面壁厚的曲面称为中曲面或中间层。中间层与截面的交线称为截面中线，其形状为折线或曲线，它反映了薄壁杆件截面的形状。由于壁厚 δ 通常很小，故一般常用截面中线来代替截面并进行计算。

由结构力学已知，杆件在空间载荷作用下，将产生拉伸或压缩、剪切、弯曲及扭转变形，但主要为弯、扭变形。因此，本章所讨论的薄壁杆件问题，将只涉及杆件的弯曲和扭转这两个方面，且只限于弹性小变形的情形。

下面，我们先对材料力学中杆件弯曲及扭转的知识作一简单的回顾。

通常我们称主要承受弯曲变形的杆件为梁。若梁截面内力只有弯矩，则称为纯弯曲；如果除弯矩外还有剪力，则称为一般弯曲或剪切弯曲。

1. 对称弯曲——材料力学中简单梁的平面弯曲。

如图1-3所示，简支梁 AB （中性轴 y 及其对称竖轴 z 为梁横截面形心主轴，是对称梁）具有轴向对称平面（ xz 面），假定横向载荷作用于该面内，则梁将发生在 xz 面内的弯曲，叫对称弯曲。

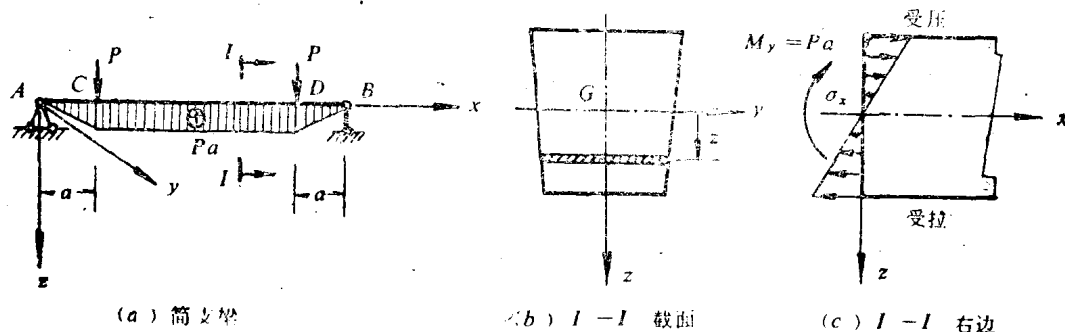


图1-3 梁的对称弯曲

在上述条件下，梁的变形满足平截面假定，有大家熟悉的下列弯曲公式：

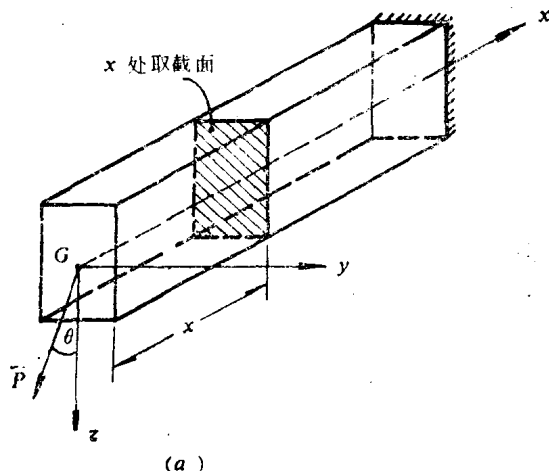
$$\varepsilon_x = \frac{z}{\rho} \quad (1-1)$$

$$\sigma_x = \frac{M_y \cdot z}{J_y} \quad (1-2)$$

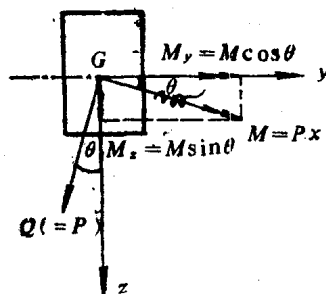
2. 非对称弯曲——当与上述对称弯曲中的假定不符时梁所产生的弯曲。通常可按以下几种情况讨论：

(1) 对称梁（横截面有两条对称轴者）受斜载荷（载荷作用方向与对称轴斜交）作用。

如图1-4所示，我们可以把斜载荷 P 分解为作用于对称平面内的两个分量，然后对每一分量载荷分别求解弯曲问题，最后再把两者的结果叠加而得到最终的应力及挠度结果。注意这里 y 、 z 是截面的形心主轴。



(a)



(b) x 处截面上的内力

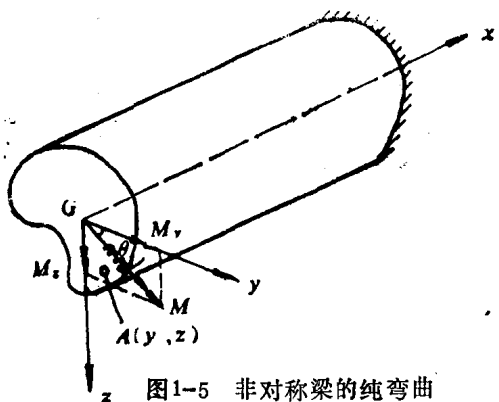


图1-5 非对称梁的纯弯曲

图1-4 对称梁受斜载荷作用

(2) 非对称梁 (梁横截面不对称者) 受任意弯矩 M 作用——纯弯下的非对称弯曲。

如图 1-5 所示。其解决办法是：先找出横截面的形心 G ，然后据“惯性积为零”的条件找出主轴方向，让它过 G 相垂直，即找到截面形心主轴 y 和 z 。将力矩 M 分解为沿这些方向的分量 M_y 和 M_z ，并规定 M_y 和 M_z 以使横截面 yz 上的第一象限微元受拉为正。

它们分别作用于 xz 和 xy 面内并产生相应面内的纯弯曲，注意图中 M_y 应取负值。于是截面上任一点 $A(y, z)$ 处的弯曲正应力为

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} \cdot z + \frac{M_z}{J_z} \cdot y \quad (1-3)$$

上式中，
$$\left. \begin{aligned} J_y &= \int_F z^2 dF \\ J_z &= \int_F y^2 dF \end{aligned} \right\} \text{是截面对 } y、z \text{ 轴的惯性矩。}$$

将 M_y 和 M_z 所产生的应力和挠度叠加，就可得到合成的最终结果。

(3) 非对称梁受任意横向载荷作用——一般情况下的非对称弯曲。此时，梁截面内力除弯矩 M 外尚有剪力 Q 。

为简便起见，取图 1-6 所示的工字梁为例。梁的截面上有一对称 y 轴，但 z 轴非对称轴，故它仍是非对称梁。

由于图中横向载荷 P 沿 z 方向，故梁中任一截面上将有两个内力：绕 y 轴的弯矩 M_y 和沿 z 方向的剪力 Q_z ，它们分别由于截面法应力 σ_x 和剪应力 τ 而产生。其截面上合成剪力的作用线将通过 y 轴上的某点 C 。一般地说，这个点不与形心点 G 相重合，称为截面的剪切中心或弯曲中心 (简称弯心，见 § 1-3)。如果横向外载荷不通过点 C ，则将出现扭转力矩 $M_x = Pa$ ，使梁发生扭转。于是得到下述重要结论：作用于非对称梁上的横向载荷通常将使梁产生弯曲

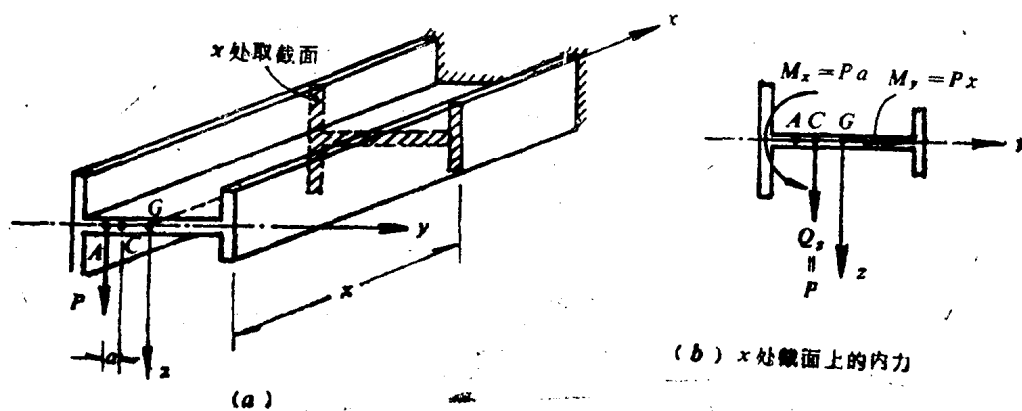


图1-6 非对称梁的一般弯曲

和扭转联合作用。仅当横向载荷通过截面弯心时，才没有扭转而只产生通常的弯曲。

3. 扭转——杆件受扭矩作用，自然将产生扭转变形，这是毫无疑问的。

综上分析，我们可得到如下结论：

开口和闭口薄壁杆件的纯弯曲与普通实心梁（如矩形截面梁）的纯弯曲没有什么差别。但在一般弯曲（即剪切弯曲）情况下，开口薄壁杆件截面内力除了由弯曲正应力 σ_x 合成的弯矩外，还出现了由剪应力 τ 合成的剪力，并且它通常并不通过截面上的某确定点——即所谓弯曲中心，于是杆件除弯曲外还将发生扭转。至于杆件受扭矩作用，则显然会发生扭转变形。因此，研究开口薄壁杆件的扭转问题，无论在杆件受扭或者受弯的情形下都是十分必要的。

还需指出，关于扭转分析，对开口薄壁杆件又有特殊之处：由于扭转时杆件截面有翘曲，故平截面假定不适用。且当这种翘曲被阻止时，截面上会产生可观的约束法向应力和约束剪应力，即发生所谓“约束扭转”。这是开口薄壁杆件独有的一种特殊的扭转，是本章今后主要讨论的内容。至于普通非圆管形闭口薄壁杆件，扭转时截面也要产生翘曲，一般也会发生约束扭转，但由于受截面周期性条件的限制，这种翘曲是不大的，另外其计算又远较开口薄壁杆约束扭转复杂，故对闭口薄壁杆件的扭转问题，可不计其约束扭转特性，仍按纯扭转计算（见§1-14）。

薄壁杆理论，更确切地说主要指开口薄壁杆件的约束扭转理论，是本世纪40年代发展起来的一个力学分支。它随薄壁杆件结构的广泛应用研究而建立，并在实践中得到进一步的发展。1905年，S.铁木辛柯首先研究了工字型截面杆的约束扭转问题。1936年，苏联的B.3.符拉索夫采用了一些变形假设，以确定开口薄壁杆件约束扭转时截面上的应力分布规律，从而较合理地简化了计算方法，建立了适合于具有任意载荷和边界条件的各种形状的开口薄壁杆理论。本章主要介绍这种实用理论。

§1-2 薄壁杆件的弯曲

薄壁杆件，不论开口或闭口的，其截面往往是不对称的。因此，薄壁杆件的弯曲问题，完全可以参照前节所述的方法（2.非对称弯曲中（2）和（3））进行处理。注意这里仍近似地采用了平截面假定进行计算，

在上一节的分析方法中, 需要我们确定截面的主轴位置, 然后将任意弯矩分解成沿这些主轴方向的分量。之所以这样作, 是基于只有使用主轴时, 我们才能应用通常梁弯曲理论中的应力和挠度等公式, 再将结果进行叠加。

然而, 在很多情况下使用截面的非主轴进行计算将更为有利。例如对图 1-7 所示的 Z 形截面, 图中的 y 、 z 轴都不是主轴, 但用它们计算较用主轴更为简便。在这一节里, 我们将导出与主轴无关的较为一般性的弯曲理论方程, 以供计算薄壁杆件的弯曲时使用。

一、广义弯曲公式

图 1-8 a 所示为任意等截面直梁 (自然包括任意开口或闭口薄壁截面杆在内) 受弯矩 M_y 、 M_z 作用。设截面形心为 G , y 、 z 是形心非主轴, 中性轴为 GN , 截面上任意一点 $A(y, z)$ 处的微面积为 dF , 它到中性轴 GN 的距离为 ξ , 则由几何关系有

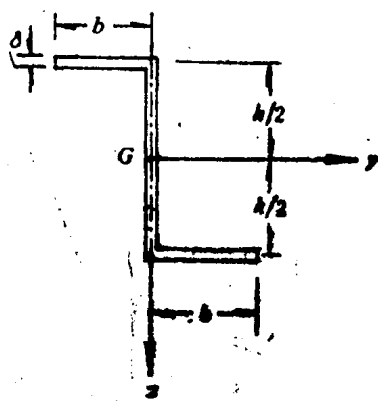
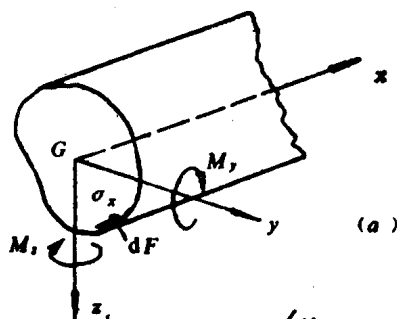


图 1-7

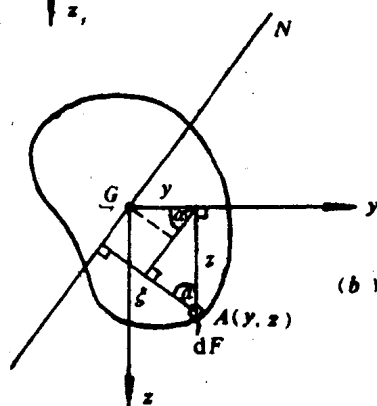


图 1-8

$$\xi = y \sin \alpha + z \cos \alpha \quad (a)$$

又由虎克定律 $\sigma_x = E \cdot \epsilon_x$

且知 $\epsilon_x = \frac{\xi}{\rho}$ [参见式(1-1)], 代入上式中得

$$\sigma_x = E \cdot \frac{\xi}{\rho} \quad (b)$$

式中: ρ ——中性层曲率半径

由于弯矩引起的应力在截面上轴向投影之和应为零, 即有

$$\int_F \sigma_x \cdot dF = 0$$

将式(b)代入上式, 得

$$\int_F E \cdot \frac{\xi}{\rho} \cdot dF = 0$$

$$\therefore \int_F \xi dF = 0 \quad (c)$$

$$\text{将式(a)代入(b)中, 得 } \sigma_x = \frac{E y}{\rho} \sin \alpha + \frac{E z}{\rho} \cos \alpha \quad (d)$$

由合力矩定理得

$$\begin{aligned} M_y &= \int_F \sigma_x \cdot z dF = \int_F \frac{E y z}{\rho} \sin \alpha dF + \int_F \frac{E z^2}{\rho} \cos \alpha dF \\ &= \frac{E \sin \alpha}{\rho} J_{yz} + \frac{E \cos \alpha}{\rho} J_z \end{aligned} \quad (e)$$

上式中, $J_{yz} = \int_F y z dF$ 是截面的惯性积。

$$\text{同理 } M_z = \int_F \sigma_x \cdot y dF = \frac{E \sin \alpha}{\rho} J_y + \frac{E \cos \alpha}{\rho} J_{yz} \quad (f)$$

将(e)、(f)两式联立, 可解得

$$\begin{aligned} \frac{E \sin \alpha}{\rho} &= \frac{\begin{vmatrix} M_y & J_y \\ M_z & J_{yz} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} J_{yz} & J_y \\ J_y & J_{yz} \end{vmatrix}} = \frac{M_y J_{yz} - M_z J_y}{J_{yz}^2 - J_y J_z} \\ \frac{E \cos \alpha}{\rho} &= \frac{\begin{vmatrix} J_{yz} & M_y \\ J_y & M_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} J_{yz} & J_y \\ J_y & J_{yz} \end{vmatrix}} = \frac{M_z J_{yz} - M_y J_z}{J_{yz}^2 - J_y J_z} \end{aligned}$$

把它们再代入式(d)中, 整理后可得

$$\sigma_x = \frac{\bar{M}_y}{J_y} \cdot z + \frac{\bar{M}_z}{J_z} \cdot y \quad (1-4)$$

$$\bar{M}_y = \frac{M_y - M_z J_{yz} / J_z}{1 - J_{yz}^2 / J_y J_z}$$

其中:

$$\bar{M}_z = \frac{M_z - M_y J_{yz} / J_y}{1 - J_{yz}^2 / J_y J_z} \quad (1-5)$$

式(1-4)称为广义弯曲公式。当绕任意两条互相正交的形心轴(不必为形心主轴)的弯矩 M_y 、 M_z 已知时, 任意截面梁中的弯曲法应力 σ_x 可用这个公式求得。式(1-5)中的 $\bar{M}_y$ 及 $\bar{M}_z$ 称为等效弯矩, 因为它们分别代替 M_y 、 M_z 后所得 σ_x 的计算式(1-4)有和式(1-3)完全相同的形式。

特殊地, 若 y 、 z 为截面形心主轴——即有 $J_{yz} = 0$ 时, 则

$$\begin{cases} \bar{M}_y = M_y \\ \bar{M}_z = M_z \end{cases}$$

可见此时式(1-4)变成通常的形式, 即式(1-3)。

若考虑剪切弯曲, 则相应可得

$$\begin{cases} \bar{Q}_y = \frac{Q_y - Q_z J_{yz}/J_y}{1 - J_{yz}^2/J_y J_z} \\ \bar{Q}_z = \frac{Q_z - Q_y J_{yz}/J_z}{1 - J_{yz}^2/J_y J_z} \end{cases} \quad (1-6)$$

相应地，它们被称为等效剪力。

例1-1 求图1-9a所示Z形截面薄壁梁在弯矩 M_y 作用下截面上的法向应力分布。

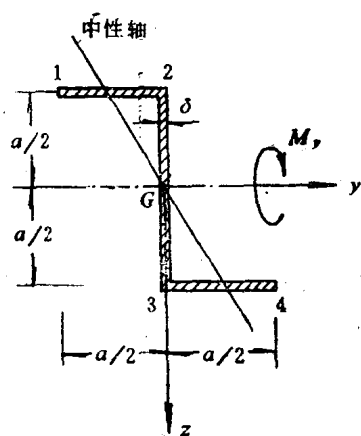
解：此截面为反对称，形心 G 在腹板中点，可按式(1-4)计算 σ_x 。

(1) 计算截面特征

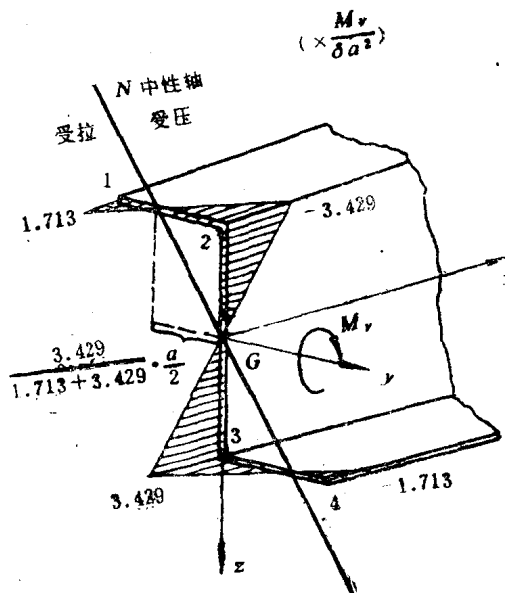
$$J_y = 2 \cdot \left(\frac{a}{2} \cdot \delta \right) \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} \delta \cdot a^3 = \frac{\delta}{3} a^3$$

$$J_z = 2 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \delta \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^3 \right] = \frac{1}{12} \delta \cdot a^3$$

$$J_{yz} = \left(\delta \cdot \frac{a}{2} \right) \cdot \left(-\frac{a}{4} \right) \left(-\frac{a}{2} \right) + \left(\delta \cdot \frac{a}{2} \right) \cdot \left(\frac{a}{4} \right) \left(\frac{a}{2} \right) = \frac{\delta}{8} a^3$$



(a)



(b)

图1-9

(2) 求有效弯矩〔用式(1-5)〕

$$\bar{M}_z = \frac{-M_y J_{yz}/J_y}{1 - J_{yz}^2/J_y J_z} = \frac{-M_y \cdot \frac{\delta}{8} a^3 / \frac{\delta}{3} a^3}{1 - \left(\frac{\delta}{8} a^3 \right)^2 / \frac{\delta}{3} a^3 \cdot \frac{\delta}{12} a^3} = -0.857 M_y$$

$$\bar{M}_y = \frac{M_y}{1 - J_{yz}^2/J_y J_z} = 2.286 M_y$$

(3) 求 σ_x

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\bar{M}_y}{J_y} \cdot z + \frac{\bar{M}_z}{J_z} \cdot y = \frac{2.286 \bar{M}_y}{\frac{\delta}{3} a^3} z + \frac{-0.857 \bar{M}_y}{\frac{\delta}{12} a^3} y \\ &= \frac{M_y}{\delta a^3} (-10.284y + 6.858z)\end{aligned}$$

(4) 求 σ_x 分布的具体表达式

在上翼缘板 1—2 上: $z = -\frac{a}{2}$, $-\frac{a}{2} \leq y \leq 0$.

$$\therefore \sigma_{x12} = \frac{M_y}{\delta a^3} (-10.284y - 3.429a)$$

由此求得点 1、2 处的法应力为

$$\begin{aligned}\sigma_{x1} &= \frac{M_y}{\delta a^3} \left[-10.284 \times \left(-\frac{a}{2} \right) - 3.429a \right] \\ &= \frac{1.713 M_y}{\delta a^2} \\ \sigma_{x2} &= \frac{M_y}{\delta a^3} [-10.284 \times (0) - 3.429a] \\ &= -\frac{3.429 M_y}{\delta a^2}\end{aligned}$$

在腹板 2—3 上: $y = 0$, $-\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2}$.

$$\therefore \sigma_{x23} = \frac{M_y}{\delta a^3} \times 6.858z$$

由此求得腹板上点 2、3 的法应力为

$$\begin{aligned}\sigma_{x2} &= \frac{M_y}{\delta a^3} \times 6.858 \cdot \left(-\frac{a}{2} \right) = -\frac{3.429 M_y}{\delta a^2} \\ \sigma_{x3} &= \frac{M_y}{\delta a^3} \times 6.858 \cdot \left(\frac{a}{2} \right) = \frac{3.429 M_y}{\delta a^2}\end{aligned}$$

在下翼缘板上的法应力可直接计算, 也可由反对称性获得 (从略)。于是可绘出 σ_x 的分布情况如图 1-9b 所示。

(5) 讨论

如果我们忽略斜弯曲的影响, 则由式 (1-3) 可得点 2 的法应力为

$$\sigma'_{x2} = \frac{M_y}{J_y} \cdot z = \frac{M_y}{\frac{\delta}{3} a^3} \cdot \left(-\frac{a}{2} \right) = -\frac{1.5 M_y}{\delta a^2}$$

而 $\frac{\sigma'_{x2}}{\sigma_{x2}} = \frac{-1.5}{-3.429} = 43.74\%$, 故可见误差很大, 不能容许这样的简化。

二、开口薄壁杆在剪切弯曲时的剪力流计算

我们知道，梁在垂直于其轴线方向载荷作用下发生的弯曲叫剪切弯曲，这是梁弯曲较一般的情形，此时截面内力除弯矩外，尚有剪力 Q_y 、 Q_z 。于是，截面上除法应力 σ_x （由前述广义弯曲公式计算）外，还有剪应力 τ 发生。

对开口薄壁杆件，由于截面厚度 δ 很小，故可假定截面上的剪应力沿截面壁厚均匀分布。于是杆件截面上的剪应力就可用其合力 $\tau\delta$ 来代表，这就是剪力流 q 。可以看出， q 也就是沿薄壁杆件截面中心线单位长度上的剪力，即

$$q = \tau \cdot \delta \quad (1-7)$$

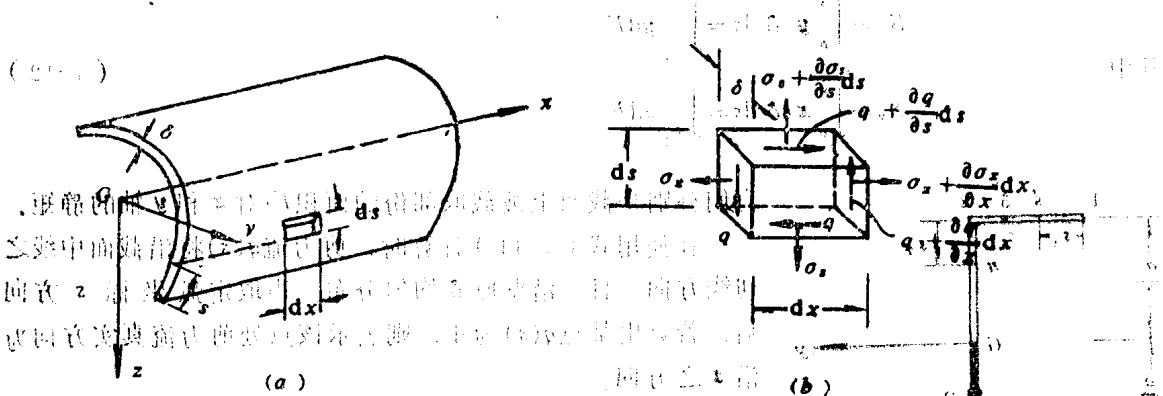


图1-10 剪切弯曲时薄壁梁的剪应力

图1-10 a 所示为任意开口薄壁梁，设横向剪力 Q_y 、 Q_z 通过截面形心 C ，故此时不会发生扭转。从梁中取出厚为 δ 的微元 $dx \times ds$ 研究，它必在图1-10 b 所示的法应力和剪力流作用下平衡（注意这里 σ_x 是由于弯曲引起的，而周向应力 σ_θ 通常假定为零）。

由微元在 x 方向上的平衡条件 $\sum F_x = 0$ ，得

$$\frac{\partial q}{\partial s} ds \cdot (dx) + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \cdot (ds \times \delta) = 0$$

即

$$\frac{\partial q}{\partial s} + \delta \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \quad (1-8)$$

由式(1-4)两端对 x 求导，有

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{M}_y}{J_y} z + \frac{\bar{M}_z}{J_z} y \right) = \frac{\partial \bar{M}_y}{\partial x} \cdot \frac{z}{J_y} + \frac{\partial \bar{M}_z}{\partial x} \cdot \frac{y}{J_z}$$

把它代入式(1-8)，得

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial s} &= -\delta \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \bar{M}_y}{\partial x} \cdot \frac{z \delta}{J_y} - \frac{\partial \bar{M}_z}{\partial x} \cdot \frac{y \delta}{J_z} \\ &= -\frac{\bar{Q}_y}{J_y} \cdot z \delta - \frac{\bar{Q}_z}{J_z} \cdot y \delta \end{aligned} \quad (1-9)$$

$$\bar{Q}_y = \frac{\partial \bar{M}_y}{\partial x}$$

其中，

$$\bar{Q}_z = \frac{\partial \bar{M}_z}{\partial x}$$

• 详见 § 1-3 中的讨论

它们是弯矩与剪力的微分关系。

如果选取截面某一开口边为计算弧坐标 s 的起点, 则有初始条件: $q|_{s=0} = 0$ 。将式(1-9)积分, 得

$$q(s) = -\frac{\bar{Q}_y}{J_z} \int_0^s y \delta ds - \frac{\bar{Q}_z}{J_y} \int_0^s z \delta ds$$

即

$$q(s) = -\frac{\bar{Q}_y}{J_z} \cdot S_z - \frac{\bar{Q}_z}{J_y} \cdot S_y \quad (1-11)$$

其中:

$$\begin{cases} S_z = \int_0^s y \delta ds = \int_{F_1} y dF \\ S_y = \int_0^s z \delta ds = \int_{F_1} z dF \end{cases} \quad (1-12)$$

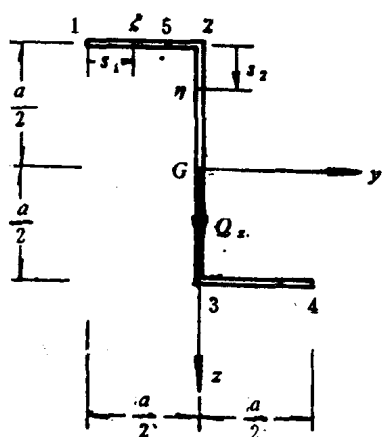


图1-11a

它们分别是截面上被截取部份的面积 F_1 对 z 和 y 轴的静矩。

在使用式(1-11)计算时, 剪力流 $q(s)$ 将沿截面中线之切线方向, 且 τ 沿壁厚 δ 均匀分布。当取定弧坐标 s 方向后, 若算出某点 $q(s)$ 为正, 则表示该点处剪力流真实方向为沿 s 之方向。

例1-2 求图1-11a所示 Z 形截面薄壁梁受腹板平面内的剪力 Q_z 作用下的剪力流分布。

解: (1) 取腹板中心 (即形心 G) 为坐标原点, y 、 z 为形心轴, 如图中所示。由截面反对称知 G 为弯心, 由于 Q_z 过 G 点, 故不会发生扭转, 对照上例, 不必重复计算 J_y 、 J_z 和 J_{yz} , 而可直接求出等效剪力为

$$\begin{cases} \bar{Q}_z = \frac{Q_z}{1 - J_{yz}^2 / J_y J_z} = 2.286 Q_z \\ \bar{Q}_y = \frac{-Q_z J_{yz} / J_y}{1 - J_{yz}^2 / J_y J_z} = -0.857 Q_z \end{cases}$$

(2) 按公式(1-11)分段求 $q(s)$

在上翼缘板 1—2 上:

s_1 取点 1 为起始点, $0 \leq s_1 \leq \frac{a}{2}$ 。

$$\begin{aligned} \therefore S_{z12} &= \int_0^s y \delta ds = \delta \cdot \int_{s_1} \left(-\frac{a}{2} + s_1 \right) ds_1 \\ &= \delta \left(-\frac{a}{2} s_1 + \frac{s_1^2}{2} \right) \\ S_{y12} &= \int_0^s z \delta ds = \delta \cdot \int_{s_1} \left(-\frac{a}{2} \right) ds_1 \end{aligned}$$

$$= -\frac{\delta a}{2} s_1$$

$$\begin{aligned} q_{12}(s_1) &= -\frac{\overline{Q}_y}{J_z} S_{x12} - \frac{\overline{Q}_z}{J_y} S_{y12} \\ &= \frac{(-0.857Q_z)}{\frac{\delta}{12}a^3} \cdot \delta \left(-\frac{a}{2}s_1 + \frac{s_1^2}{2} \right) - \frac{2.286Q_z}{\frac{\delta}{3}a^3} \cdot \left(-\frac{\delta a}{2}s_1 \right) \\ &= \frac{Q_z}{a^3} (5.142s_1^2 - 1.713as_1) \end{aligned}$$

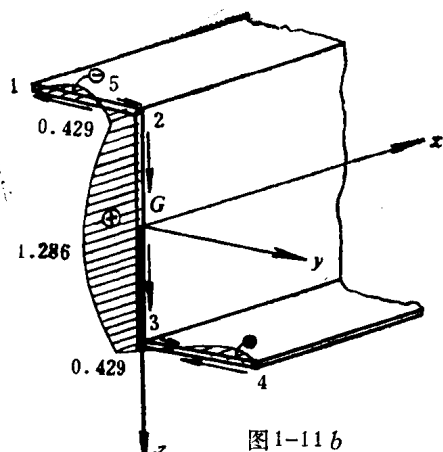


图1-11b

由上式可知，在上翼缘板上的剪力流呈抛物线分布。当 $s_1 = \frac{1.713a}{5.142} = 0.333a$ ，即点5处有 $q_5(s) = 0$ ，剪力流在点5发生符号改变。

在点1处， $s_1 = 0$ ， $\therefore q_1(s) = 0$

$$\begin{aligned} \text{在点2处，} s_1 = \frac{a}{2}, \therefore q_2(s) &= \frac{Q_z}{a^3} \left[5.142 \times \left(\frac{a}{2} \right)^2 - 1.713a \left(\frac{a}{2} \right) \right] = 0.429 \frac{Q_z}{a} \end{aligned}$$

在腹板2—3上：

s_2 取点2为起始点， $0 \leq s_2 \leq a$ 。

$$\begin{aligned} \therefore S_{x23} &= \int_0^s y \delta ds = \int_1^2 y \delta ds_1 + \int_2^s y \delta ds_2 = [S_{x12}]_0^{\frac{a}{2}} + \int_2^s 0 \cdot \delta ds_2 \\ &= \left[\delta \cdot \left(-\frac{a}{2}s_1 + \frac{s_1^2}{2} \right) \right]_0^{\frac{a}{2}} = -\frac{\delta a^2}{8} \\ S_{y23} &= \int_0^s z \delta ds = \int_1^2 z \delta ds_1 + \int_2^s z \delta ds_2 = [S_{y12}]_0^{\frac{a}{2}} + \delta \cdot \int_2^s \left(-\frac{a}{2} + s_2 \right) ds_2 \\ &= \left[-\frac{\delta a}{2}s_1 \right]_0^{\frac{a}{2}} + \delta \left(-\frac{a}{2}s_2 + \frac{s_2^2}{2} \right) = \frac{\delta}{2} \left(s_2^2 - as_2 - \frac{a^2}{2} \right) \\ \therefore q_{23}(s_2) &= -\frac{\overline{Q}_y}{J_z} S_{x23} - \frac{\overline{Q}_z}{J_y} S_{y23} = -\frac{(-0.857Q_z)}{\frac{\delta}{12}a^3} \left(-\frac{\delta a^2}{8} \right) - \frac{2.286Q_z}{\frac{\delta}{3}a^3} \cdot \frac{\delta}{2} \left(s_2^2 - as_2 - \frac{a^2}{2} \right) \\ &= \frac{Q_z}{a^3} (3.429s_2^2 - 3.429as_2 - 0.429a^2) \end{aligned}$$

由上式可知，在腹板上剪力流也呈抛物线分布，进而可知其关于 y 轴对称。

在点2处， $s_2 = 0$ ，

$$\therefore q_2(s) = 0.429 \frac{Q_z}{a}$$