

# 水声传播原理

杨士莪 著



哈尔滨工程大学出版社

P733.2  
125

425307

# 水声传播原理

杨士莪 著

哈尔滨工程大学出版社

(黑)新登字第9号

内 容 简 介

本书系统地论述了现代常用的声场分析方法，并通过实例介绍了声在海洋中传播的一些基本规律与海底的基本特性。书中文字简洁，逻辑清楚，对已具有水声学和数理方法一般知识的科技工作者，可作为进行有关理论分析工作的参考。

水声传播原理

杨士莪 著

\*

哈尔滨工程大学出版社出版发行

新华书店经销

哈尔滨工程大学印刷厂印刷

\*

开本 787×1092 1/16 印张 6.25 字数 138 千字

1994年11月 第1版 1994年11月 第1次印刷

印数: 1-1000 册

ISBN 7-81007-497-0

O·30 定价: 4.00 元

133

# 前 言

本书是根据作者在哈尔滨船舶工程学院多年的教学科研工作基础上整理写就的。考虑到使用本书读者基础知识准备等方面的限制，所以仅能通过一些特例，进行声场分析若干最基本方法的介绍。虽然到今天为止国外已有不少声在海中传播方面的书籍，国内也出版过汪德昭、尚尔昌先生合著的水声学，这些书籍各有特点，不同书籍对有的问题的阐述也较深入。但这些书籍有的出版时间较早，对近年声传播方面研究进展反映不够，有的在选材上倚轻倚重，仅侧重于该作者个人的工作内容，均不太适合用作这方面的课程教材。

应该指出的是，海洋是具有随机起伏界面，且介质本身也具有强烈的随机不均匀特性，因而声传播过程中存在明显的起伏现象，这也是研究声传播所应该考虑的问题。但声传播起伏的研究内容丰富，难以在本书中以少量章节给出有价值的全貌介绍。故本书将不涉及此一问题，而仅限于讨论声波在确定性介质中传播的分析，这可在实际上理解为某种平均效果。

本书书稿的准备过程中承包玖红同志给予了极大的帮助。在此一并致谢。

杨士莪

1994.5

# 目 录

第一章 导 言 .....	1
§ 1.1 波动方程式和边界条件 .....	1
§ 1.2 声源及点源条件 .....	4
第二章 两层介质情况下的声传播 .....	6
§ 2.1 两层流体介质情况下的简正波解 .....	6
§ 2.2 脉冲声在两种介质情况下的传播 .....	13
§ 2.3 各向同性弹性海底介质时的声波传播情况 .....	16
§ 2.4 浅海声传播的部分一般特性 .....	19
第三章 深海声道中的声传播 .....	24
§ 3.1 深海声道中点源声场的形式解 .....	24
§ 3.2 深海声道中声场的简正波解 .....	30
§ 3.3 声场的射线形式解及会聚区 .....	34
§ 3.4 深海声影区分析 .....	37
§ 3.5 利用简正波进行声源定位的原理 .....	41
第四章 非分层介质中声场的分析 .....	46
§ 4.1 射线声学 .....	46
§ 4.2 非分层介质中简正波的耦合 .....	50
§ 4.3 逐次迭代逼近法 .....	56
第五章 声场分布的数值计算 .....	66
§ 5.1 二维抛物近似方法 .....	66
§ 5.2 二维抛物近似法的边界条件的表示 .....	69
§ 5.3 三维宽角抛物近似方法 .....	73
§ 5.4 非均匀介质中声源三维定位方法 .....	78
第六章 海底声学特性分析 .....	80
§ 6.1 海底的多孔性介质模型 .....	80
§ 6.2 海底声速和密度的测量 .....	82
§ 6.3 水声传播的逆问题 .....	88
参考文献 .....	92

# 第一章 导 言

海洋复盖了地球表面百分之七十以上的面积，蕴藏着丰富的生物和矿产资源，海洋资源的探测与开发，日益受到世界各国的重视。潜水艇的出现，战略核潜艇做为威慑力量的发展，更增加了海水介质中信息传递的重要性。但迄今为止，声波仍是海水介质中唯一有效远距离信息传递的载体，人们创造了各种不同的水声设备，用来进行水下探测、识别、导航、定位、通讯和遥感、遥控。

由于海洋环境条件的复杂多变，使声信号在海洋信道中的传递存在着强烈的畸变和涨落。为了更好地掌握声信号在海洋信道中传播的规律，以便采取有效措施改善和提高水声设备性能，近六十年来，人们对海洋中声传播问题进行了广泛的研究，弄清了许多现象，发展了多种分析计算方法，有关的文献和专著，篇幅浩瀚。在本书中将集中介绍部份最常用的分析方法，以及声在海中传播的一些最基本的特点，为在有关领域开展进一步的研究提供必要基础。

## § 1.1 波动方程式和边界条件

海洋介质是非均匀的。海水中各处的声速随各该处的温度、盐度和深度的不同而异。在近海表面处，更由于包含有大量气泡引起声速的变异。这都将引起声传播过程中复杂的折射效应。严格的来说，由于类似的原因，海水中各处介质的密度也是不同的，并在海水中形成内波。但海水中不同处密度的变化通常很小，对声波传播的直接影响可忽略不计，至于内波对声传播的影响，我们将在后面专门的章节中加以介绍。

海水中各点处声速  $c$  与温度  $T$ ，盐度  $S$  和深度  $H$  (m) 的关系可近似用下式表示：

$$c(\text{m/s}) = 1492.9 + 3(T - 10) - 6 \times 10^{-3}(T - 10)^2 \\ - 4 \times 10^{-2}(T - 18)^2 + 1.2(S - 35) - 10^{-2}(T - 18)(S - 35) + \frac{H}{61}$$

(Leroy: J. A. S. A. vol. 46, p. 216, 1969)

在许多情况下，海底特性对声在海中传播情况有重要影响。海底介质的密度和声速，由于其组成成份与结构形式的不同而有较大差异，对于含水量较大的泥或泥与细沙底常可近似为液态介质，但更多的情况下，必须考虑到海底介质的切变弹性模量。

无论海水抑或海底介质，都对声波有吸收效应。对海水介质来说，在低频段由于硼酸弛豫，在高频段由于硫酸镁弛豫，其声吸收系数比淡水的声吸收系数要大得多。对不同频率声波来说，海水吸收系数的每公里分贝数可近似用下式表示：

$$\alpha = \frac{0.1f^2}{1+f^2} + \frac{0.017sf_T f^2}{f_T^2 + f^2} + 0.0245 \frac{f^2}{f_T^2} \quad \text{dB/km}$$

(Thorpe: J.A.S.A. vol. 38, p.648, 1965)

其中  $s$  为盐度的千分数,  $f$  为频率的千赫数,  $f_T$  为与温度有关的弛豫频率, 其值等于:

$$f_T = 21.9 \times 10^{6-1520/(T+273)}$$

$T$  为海水摄氏温度。

关于海底介质的声学特性将在以后有关章节进一步介绍。

当介质的声学特性是空间坐标函数时, 考虑小振幅波动方程式的具体形式, 可依然由运动方程、连续性方程和状态方程出发, 这时声压  $P$ 、质点振速  $\vec{V}$ , 与介质密度  $\rho$ 、声速  $c$  之间的关系为:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\nabla P$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

$$dP = c^2 d\rho$$

由连续性方程及状态方程可得:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

利用运动方程从上式中消去  $\vec{V}$  即得:

$$\rho \nabla \cdot \left( \frac{\nabla P}{\rho} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

因此当介质密度也是空间坐标函数时, 波动方程式的形式和密度均匀介质中波动方程式的形式并不一样。如果引入新的从变量  $\varphi$ , 令

$$\varphi = \frac{P}{\sqrt{\rho}}$$

代入(1.1)式后可得  $\varphi$  所满足的方程式为:

$$\nabla^2 \varphi + \left[ \frac{1}{2} \frac{\nabla^2 \rho}{\rho} - \frac{3}{4} \left( \frac{\nabla \rho}{\rho} \right)^2 \right] \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2)$$

如果考虑简谐波, 取时间因子为  $e^{-i\omega t}$ , 且令

$$K^2 = k^2 + \frac{1}{2} \frac{\nabla^2 \rho}{\rho} - \frac{3}{4} \left( \frac{\nabla \rho}{\rho} \right)^2$$

则可将  $\varphi$  所满足的方程式写为:

$$\nabla^2 \varphi + K^2 \varphi = 0$$

这和密度均匀介质中的波动方程式将具有相同的形式, 因而可采用相似的解算方法。但需要注意这时  $\varphi$  并不是声场势函数,  $K$  也不是波数。对于有吸收的情况, 若仅考虑简谐波仍可以简单的将波数取作为复数。

在水声学中，当讨论声在海中传播情况解算波动方程式时，由于空气的介质阻抗远小于海水的介质阻抗，故海面的边界条件常可近似取做为绝对软边界条件。海底的边界条件根据需要的不同，可选取声压与质点法向振速连续的条件，也可选取阻抗边界的条件。对液态海底，也有时采用连续过渡的处理方法。

为了保证波动方程式解的唯一性，还应该考虑无穷远辐射条件。在三维空间若取  $\sigma$  为包围声源的封闭曲面，只要  $\sigma$  曲面距声源足够近，面上各点声场势函数  $\varphi$  及其法向导数  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ ，均可由声源条件获知。再取无穷远界面  $\Sigma$ ，由波动方程式及辅助函数  $G$  所满足的方程：

$$\begin{aligned}\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi &= 0 \\ \nabla^2 G + k^2 G &= -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\end{aligned}$$

利用 Green 公式可知

$$4\pi\varphi(\vec{r}_0) = \iint_{\sigma + \Sigma} \left\{ G \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n} \right\} dS$$

根据无穷远辐射条件应该有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{\Sigma} \left\{ G \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n} \right\} dS = 0$$

且对以声源所在处为原点所张任意立体角内无穷远界面上的积分均应为零。注意到函数  $G$  是点源的解，若取时间因子为  $e^{-i\omega t}$ ，则在无穷远处  $G$  可近似表示为  $\psi(\vec{\Omega}) \frac{e^{ikR}}{R}$ ，其中  $\psi(\vec{\Omega})$  为某种方向性函数。这时表示无穷远辐射条件的面积分可近似为

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int \psi(\vec{\Omega}) \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial R} \frac{e^{ikR}}{R} - \varphi \frac{ikR - 1}{R^2} e^{ikR} \right\} R^2 d\Omega = 0$$

故得

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left( \frac{\partial \varphi}{\partial R} - ik\varphi \right) = 0. \quad (1.3)$$

这就是三维空间无穷远辐射条件的数学表达方式。应该注意的是：上式系取时间因子为  $e^{-i\omega t}$  所得到，若时间因子为  $e^{i\omega t}$ ，则上式中负号应改为正号。类似的方法可以证明，对二维空间的情况，无穷远辐射条件将是

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} - ik\varphi \right) = 0 \quad (1.4)$$

在本书中我们将始终取时间因子为  $e^{-i\omega t}$ 。



## § 1.2 声源及点源条件

在实际工作中所使用的声源，多是具有一定需要的方向特性的声源。其所发出的声信号，也是具有一定特殊波形的脉冲信号。但为了分析上的方便，在本书中多数情况下将仅限于讨论点声源发射简谐波的情况。显然，只要知道不同频率单频声波的传播情况，利用 Fourier 积分，即可求得具有不同频谱成份的脉冲波传播情况。

对于由点源组成的方向性基阵，其在给定介质环境下所形成的声场，显然可根据线性叠加原理由点源声场组合得到。但对于具有复杂结构形式的方向性声源，则上述方法不再适用。若声源空间尺度不大，可近似认为集中于一点，而仅考虑其辐射方向性影响时，注意到任意方向性声源声场，均可在球坐标系中写成各不同阶球面波函数之和：

$$\psi(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} A_{mn} h_n^{(1)}(kr) P_n^m(\cos\theta) \frac{\sin m\alpha}{\cos m\alpha}$$

虽然上式仅对均匀介质才成立，但如果所取  $r$  的值不太大，介质特性的空间变化很小，则仍可近似作为均匀介质。从关系式

$$h_n^{(1)}(kr) P_n^m(\cos\theta) \frac{\sin m\alpha}{\cos m\alpha} = \frac{i^{2n+m-1} \Gamma(n+m+1)}{2\pi k^{n+1} \Gamma(n+1)} \times \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin m t}{\cos m t} \left[ \frac{\partial}{\partial z} + i \cos t \frac{\partial}{\partial x} + i \sin t \frac{\partial}{\partial y} \right]^n \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) dt \quad (1.5)$$

考虑到  $e^{ikr}/r$  系均匀介质中单极子声场势函数，可知不同阶球面波，实际上分别对应于不同组合形式的多极子声场势函数，因而具有任意方向性的声源，可视作为不同阶多极子的组合。多极子的声场势函数，可由单极子声场势函数借助微分运算求得，因而只要求得单极子声场势函数，不难通过微分运算，获得任意方向性点源的声场势函数。

对于分层介质来说，取柱面坐标系，则单极子声源所产生的声场应满足下列波动方程式：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2 \varphi = -4\pi \delta_2(r) \delta(z - z_0) \quad (1.6)$$

式中  $k$  仅为  $z$  的函数， $\delta_2(r)$  是二维  $\delta$  函数，即

$$1 = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \delta_2(r) r dr d\theta \quad \text{或} \quad \int_0^{\infty} \delta_2(r) r dr = \frac{1}{2\pi}$$

这时所取声源位置为  $r=0$ ， $z=z_0$ 。系数  $4\pi$  是为了使得在无限均匀介质中声场势函数具有  $e^{ikR}/R$  的简单形式，也就是说声源具有基准强度。将 (1.6) 式中势函数写为 Fourier-Bessel 积分形式：

$$\varphi(r, z) = \int_0^{\infty} Z(z, \xi) J_0(\xi r) \xi d\xi$$

则由(1.6)式可得  $Z(z, \xi)$  所满足的方程式为:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + (k^2 - \xi^2)Z = -2\delta(z - z_0) \quad (1.7)$$

但在声源上下声场势函数应为连续, 即

$$Z|_{z=z_0^+} = Z|_{z=z_0^-} \quad (1.8\text{甲})$$

将(1.7)式等号两边对  $z$  由  $z_0^-$  积分至  $z_0^+$ , 并利用势函数连续的条件, 即得

$$\frac{dZ}{dz} \Big|_{z=z_0^+} - \frac{dZ}{dz} \Big|_{z=z_0^-} = -2 \quad (1.8\text{乙})$$

(1.8 甲、乙)两式通常称为点源条件。此关系虽然系就分层介质条件求出, 但对更复杂的介质环境条件, 只要限于声源附近区域, 则此关系依然成立。

根据本节讨论的结果, 本书中将主要考虑单频脉动点源的声场, 并就少数情况说明脉冲声源或方向性声源所可能存在的特点。

## 第二章 两层介质情况下的声传播

### § 2.1 两层流体介质情况下的简正波解

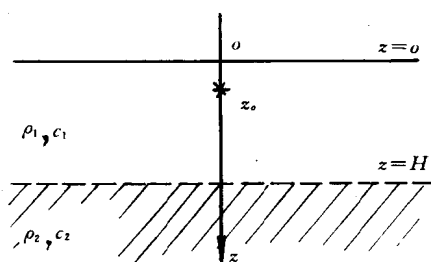


图 2.1 两层流体介质情况

如图示考虑只有两层流体介质所组成的简单情况。取柱坐标并令海面处  $z=0$ 。设上层介质密度和声速分别为  $\rho_1$ 、 $c_1$ ，层厚为  $H$ 。下层介质密度和声速分别为  $\rho_2$ 、 $c_2$  并一直延续至无穷远。这种情况近似于等声速层且具有淤泥或泥沙底的浅海。设单位点声源位于  $z$  轴上，深度为  $z_0$ 。这时声场势函数  $\varphi$  应满足以下波动方程式：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k_1^2 \varphi = -4\pi \delta(r, z - z_0) \quad 0 \leq z < H$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k_2^2 \varphi = 0 \quad H < z$$

将  $\varphi$  写为 Fourier-Bessel 积分形式，即

$$\varphi(r, z) = \int_0^{\infty} Z(z, \xi) J_0(\xi r) \xi d\xi$$

由波动方程式可知上述积分式中未知函数  $Z(z, \xi)$  应满足以下微分方程式：

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + (k_1^2 - \xi^2) Z = -2\delta(z - z_0) \quad 0 \leq z < H$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + (k_2^2 - \xi^2) Z = 0 \quad H < z$$

为书写简便起见记：

$$\beta_1 = \sqrt{k_1^2 - \xi^2} \quad \beta_2 = \sqrt{k_2^2 - \xi^2}$$

考虑到海面为绝对软边界，在海面处声场势函数应为零；并考虑到当  $z$  趋向无穷大时，声场势函数应满足无穷远辐射条件；由于点源的存在，在点源上、下  $Z(z, \xi)$  将具有不同形式；可根据函数  $Z(z, \xi)$  所应满足的微分方程式，将其选择为如下形式：

$$Z(z, \xi) = \begin{cases} A \sin \beta_1 z & 0 \leq z < z_0 \\ B \sin \beta_1 z + C \cos \beta_1 z & z_0 < z < H \\ D e^{i\beta_2 z} & H < z \end{cases}$$

其中  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  为待定常数。利用点源条件及在海底两侧势函数所应满足的边界条件，可得这些待定常数所应满足的线性方程组：

$$\begin{aligned} A \sin\beta_1 z_0 - B \sin\beta_1 z_0 - C \cos\beta_1 z_0 &= 0 \\ A \cos\beta_1 z_0 - B \cos\beta_1 z_0 + C \sin\beta_1 z_0 &= \frac{2}{\beta_1} \\ B \sin\beta_1 H + C \cos\beta_1 H - \frac{1}{b} D e^{i\beta_2 H} &= 0 \\ B \cos\beta_1 H - C \sin\beta_1 H - i \frac{\beta_2}{\beta_1} D e^{i\beta_2 H} &= 0 \end{aligned}$$

其中  $b = \rho_1 / \rho_2$

解上述联立方程组，容易得到：

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{\beta_1} \left[ \frac{\beta_1 \cos\beta_1 (H - z_0) - i b \beta_2 \sin\beta_1 (H - z_0)}{\beta_1 \cos\beta_1 H - i b \beta_2 \sin\beta_1 H} \right] \\ B &= \frac{2 \sin\beta_1 z_0}{\beta_1} \left[ \frac{\beta_1 \sin\beta_1 H + i b \beta_2 \cos\beta_1 H}{\beta_1 \cos\beta_1 H - i b \beta_2 \sin\beta_1 H} \right] \\ C &= \frac{2 \sin\beta_1 z_0}{\beta_1} \\ D &= \frac{2 b \sin\beta_1 z_0}{\beta_1 \cos\beta_1 H - i b \beta_2 \sin\beta_1 H} e^{-i\beta_2 H} \end{aligned}$$

将求出的  $Z(z, \xi)$  及其中各系数的具体表示代入  $\varphi$  的积分表示式后，即可得点声源在两层流体介质情况下声场的具体表示为：

$$\varphi(r, z) = \begin{cases} \int_0^\infty \frac{2 \sin\beta_1 z}{\beta_1} \left[ \frac{\beta_1 \cos\beta_1 (H - z_0) - i b \beta_2 \sin\beta_1 (H - z_0)}{\beta_1 \cos\beta_1 H - i b \beta_2 \sin\beta_1 H} \right] J_0(\xi r) \xi d\xi & 0 \leq z < z_0 \\ \int_0^\infty \frac{2 \sin\beta_1 z_0}{\beta_1} \left[ \frac{\beta_1 \cos\beta_1 (H - z) - i b \beta_2 \sin\beta_1 (H - z)}{\beta_1 \cos\beta_1 H - i b \beta_2 \sin\beta_1 H} \right] J_0(\xi r) \xi d\xi & z_0 < z < H \\ \int_0^\infty \frac{2 b \sin\beta_1 z_0}{\beta_1 \cos\beta_1 H - i b \beta_2 \sin\beta_1 H} e^{i\beta_2 (z - H)} J_0(\xi r) \xi d\xi & H < z \end{cases} \quad (2.1)$$

要进一步计算上述积分的值，可将  $\xi$  作为复变量利用环路积分方法进行。注意到：

$$\begin{aligned} J_0(\xi r) &= \frac{1}{2} \left\{ H_0^{(1)}(\xi r) + H_0^{(2)}(\xi r) \right\} \\ H_0^{(2)}(\xi r) &= -H_0^{(1)}(\xi r e^{i\pi}) \end{aligned}$$

以(2.1)中第一个积分式为例，利用上述 Bessel 函数与 Hankel 函数间变换关系，可将其改写为：

$$\varphi(r,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \beta_1 z}{\beta_1} \left[ \frac{\beta_1 \cos \beta_1 (H - z_0) - ib \beta_2 \sin \beta_1 (H - z_0)}{\beta_1 \cos \beta_1 H - ib \beta_2 \sin \beta_1 H} \right] H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi \quad 0 \leq z < z_0$$

为书写简便计，上式中被积函数仍写为： $Z(z, \xi) H_0^{(1)}(\xi r) \xi$ 。

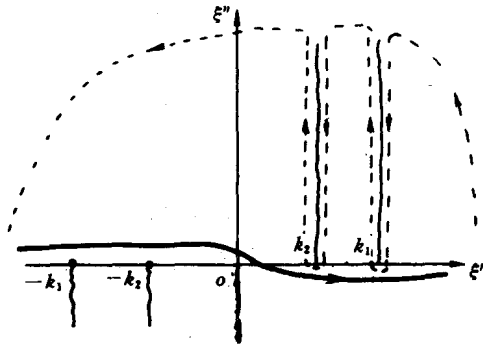


图 2.2  $\xi$  复平面上的积分回路

$-k_2$  枝点上方绕过，而从  $k_1, k_2$  枝点下方绕过。在构造环路积分时，为避免通过歧线进入 Riemann 面的另一叶，必须增加沿歧线两岸绕过枝点的积分。如图 2.2 中所示，由复变函数环路积分有关定理可知：

在构造  $\xi$  复平面上的积分回路时，注意到被积函数有五个歧点，分别为：

$$\xi = 0, \pm k_1, \pm k_2$$

其中原点为 Hankel 函数的歧点，考虑到第一类 Hankel 函数在  $\xi$  复平面上半平面向无穷远处趋于零，可取歧线自原点向下，而积分路线自原点上方绕过。

$\pm k_1, \pm k_2$  枝点分别对应由于  $\beta_1, \beta_2$  的存在而引入的被积函数的多值性。注意到对有吸收的实际介质， $k_1, k_2$  均将有正虚部，故沿实轴的积分路线将从  $-k_1, -k_2$  枝点上方绕过，而从  $k_1, k_2$  枝点下方绕过。

$$\int_{-\infty}^{\infty} Z(z, \xi) H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi + \int_{(k_1)} Z(z, \xi) H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi + \int_{(k_2)} Z(z, \xi) H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi + \int_{(k_1)} Z(z, \xi) H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi = \text{Res} \left\{ Z(z, \xi) H_0^{(1)}(\xi r) \xi \right\}$$

但由第一类 Hankel 函数的性质可知，在上半平面向无穷远回路部分积分应为零。且由被积函数相对于  $\beta_1$  的偶函数性质，可知沿过  $k_1$  点歧线两岸的积分亦为零，因而最后得：

$$\varphi(r,z) = \text{Res} \left\{ Z(z, \xi) H_0^{(1)}(\xi r) \xi \right\} - \int_{(k_2)} Z(z, \xi) H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi \quad (2.2)$$

分别讨论(2.2)式等号右边两项的结果。

甲) 简正波部分

(2.2) 式中由环路中极点留数所表示的部分称为简正波部分，记

$$\varphi_N(r,z) = \text{Res} \left\{ Z(z, \xi) H_0^{(1)}(\xi r) \xi \right\}$$

由(2.1)式可知决定环路中极点位置的方程式将为：

$$\beta_1 \cos \beta_1 H - ib \beta_2 \sin \beta_1 H = 0 \quad (2.3)$$

此方程式通常称为频散方程。记频散方程的第  $n$  个根为  $\xi_n$ ，并记

$$\beta_{in} = \sqrt{k_i^2 - \xi_n^2} \quad i = 1, 2$$

利用频散方程化简被积函数，并由留数定理可得：

$$\begin{aligned} \varphi_N(r, z) &= 2\pi i \sum_n \frac{\sin\beta_{1n} z}{\beta_{1n}} \cdot \frac{\beta_{1n} \cos\beta_{1n}(H - z_0) - ib\beta_{2n} \sin\beta_{1n}(H - z_0)}{\frac{\partial}{\partial \xi_n} [\beta_{1n} \cos\beta_{1n} H - ib\beta_{2n} \sin\beta_{1n} H]} H_0^{(1)}(\xi_n r) \xi_n \\ &= \sum_n \frac{2\pi i \beta_{1n} \sin\beta_{1n} z \sin\beta_{1n} z_0}{\beta_{1n} H - \sin\beta_{1n} H \cos\beta_{1n} H - b^2 \tan\beta_{1n} H \sin^2\beta_{1n} H} H_0^{(1)}(\xi_n r) \\ &= \sum_n U(z, \xi_n) U(z_0, \xi_n) H_0^{(1)}(\xi_n r) \quad (\text{say}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

从(2.4)中可以看出所得结果对  $z$ 、 $z_0$  来说是互易的，这正是互易原理所要求。但比较(2.1)式声源上、下两种表示式，可知若我们选取的是(2.1)中第二式，所得结果仍将与(2.4)式相同。将  $\varphi(r, z)$  写成(2.4)式最后面的一种表示法时，相应的  $U(z, \xi_n)$  即被称为简正波。简正波是决定于波导特性的，可在给定波导中以不变模式传播的一种波，其形式与声源位置无关。声源位置的不同，只不过对各不同阶简正波的激发强度不同。

求解频散方程(2.3)式前，首先定性分析其解的位置分布。令

$$\psi(z) = \sin\beta_1 z, \quad \psi(z) = \beta_1 \cos\beta_1 z$$

则频散方程实际上是  $\psi(z)$  在  $z = H$  处所应满足的下列边界条件：

$$\psi(H) - ib\beta_2 \psi'(H) = 0$$

用肩标 \* 表示各复数量的共轭，考虑  $\psi(z)$  及其共轭所应满足的微分方程及边界条件，可得：

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} + \beta_1^2 \psi &= 0, & \text{且} & \quad \psi_H - ib\beta_2 \psi'_H = 0 \\ \ddot{\psi}^* + \beta_1^{*2} \psi^* &= 0, & \text{且} & \quad \psi_H^* + ib\beta_2^* \psi'^*_H = 0 \end{aligned}$$

因而有

$$\psi^* \ddot{\psi} - \ddot{\psi} \psi^* = (\beta_1^2 - \beta_1^{*2}) \psi \psi^* = 4i\xi' \xi'' \psi \psi^*$$

其中  $\xi'$ 、 $\xi''$  分别表示  $\xi$  的实部及虚部。将上式对  $z$  积分由 0 至  $H$ ，得到：

$$4i\xi' \xi'' \int_0^H \psi \psi^* dz = [\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi} \psi^*]_0^H = ib(\beta_2 + \beta_2^*) \psi_H \psi_H^*$$

根据无穷远辐射条件应有  $\beta'_2 > 0$ ，且  $\psi \psi^*$  永远大于零，因而从上式可知  $\xi' \xi'' > 0$ ，即在所考虑积分环路范围内，所有频散方程的根均位于  $\xi$  复平面的第一象限。

从(2.4)式可以看出，频散方程的复数根所对应的简正波，将随传播距离  $r$  的增大而附加的指数衰减因子，而实数根所对应的简正波，因不存在附加指数衰减，在较远距离处将对传播起主要作用。因此应首先考虑频散方程的实数根，在没有实数根的情况下，可

考虑虚部最小的头几个根。

若  $k_1 > k_2$ ，此时海底介质声速比海水介质声速大，当声波在海底界面反射时，只要投射角足够小，将产生全反射。能量仍返回水介质中，因而这时有可能存在频散方程的实数根。令

$$x = \beta_1 H, \quad \sigma^2 = (k_1^2 - k_2^2)H^2 \quad (2.5)$$

这时频散方程(2.3)式可改写为：

$$x \cos x - ib \sqrt{x^2 - \sigma^2} \sin x = 0 \quad (2.6)$$

若仅考虑  $\zeta$  的实数根，由上式容易看出，只有当  $x$  是实数，且小于  $\sigma$  时，上式才有实数解。因而  $\zeta$  的实数根一定位于  $(k_2, k_1)$  区间。进一步将 (2.6) 式改写为：

$$\frac{x}{\tan x} = -b \sqrt{\sigma^2 - x^2}$$

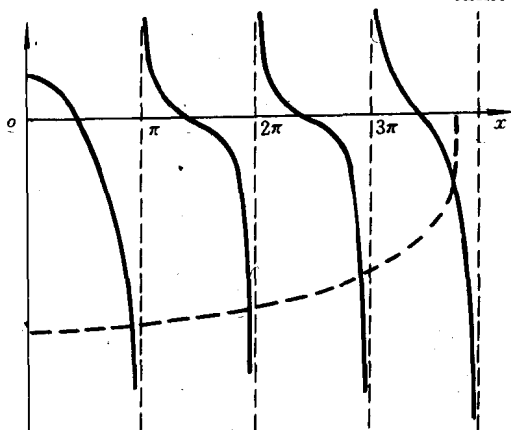


图 2.3 频数方程(2.6)的图解法

将等式两边的函数随  $x$  变化情况分别作图如图 2.3 所示，两组曲线交点所对应的  $x$  值即方程式的根。由图中可以看出，若

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \leq \sigma < \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

则频散方程将有  $n$  个实根。但  $\sigma$  与声波频率成正比，故对同样介质条件，高频声波情况下具有实数特征值的简正波个数多于低频声波。对第  $n$  阶简正波来说，当频率降低到

$$\omega_n H \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$$

或

$$\omega_n = \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi c_1 c_2}{H \sqrt{c_2^2 - c_1^2}} \quad (2.7)$$

时，若再行降低则该阶简正波的特征值将变为复数。对各阶简正波来说，其特征值为实数所对应的最低频率称为该阶简正波的临界频率。当声波频率低于第一阶简正波的临界频率时，所有各阶简正波均存在随传播距离按指数律的附加衰减。

许多实际情况下，实数简正波的个数并不太少。例如当海水中声速为 1480m/s，海底介质中声速为 1600m/s，水深为 50m 时，对 1000Hz 的声波将存在 26 阶实数简正波。

求频散方程的复数根也可将 (2.6) 式中  $x$  写为复数，然后分开方程式的实部和虚部得到相应的两条平面曲线，然后利用图解法得到近似值。或利用数值方法直接求解。但一般求解过程都相当复杂，此处将不深入讨论。为了大致判断复数根的分布，试进行如下的分析。记

$$y = \beta_2 H$$

将频散方程改写为:

$$\sqrt{\sigma^2 + y^2} \cos\sqrt{\sigma^2 + y^2} - iby \sin\sqrt{\sigma^2 + y^2} = 0$$

从前面频散方程实数根的分析可知, 所有的实数根均在  $\xi$  实轴上 ( $k_2, k_1$ ) 区间, 并从一号根开始随着号数的增加, 由邻近  $k_1$  处逐渐向  $k_2$  接近, 考虑邻近  $k_2$  处的最后一个实数根, 并为简单计假设  $\sigma = n\pi$ , 这时  $|y| \ll \sigma$ , 将上述  $y$  的方程依二项式定理展开, 仅保留三阶以下项, 并利用  $\sin\sigma = 0$  的关系, 可得  $y$  所应满足的三次方程式为:

$$y^3 + \frac{i}{b}y^2 + \frac{2i\sigma^2}{b} = 0$$

利用 Cardan 方法解此三次方程式, 可得三个根. 其中在环路积分范围内的有两个, 并可利用  $\sigma \gg b$  的近似条件将其写为:

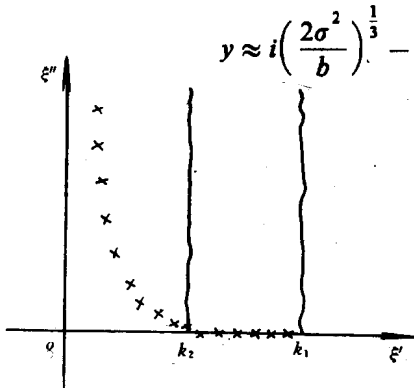


图 2.4 频散方程根分布

$$y \approx i \left( \frac{2\sigma^2}{b} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{i}{3b} ; \quad \left( \frac{2\sigma^2}{b} \right)^{\frac{1}{3}} e^{-i\frac{\pi}{6}} - \frac{i}{3b}$$

其中第一个对应于最后一个实根, 第二个对应于第一个复数根, 其位置在  $k_2$  的左上侧. 故给定情况下频散方程的根约如图 2.4 中所示. 当  $k_1$  逐渐减小向  $k_2$  接近时, 实根数逐渐减少, 当  $k_1 < k_2$  时, 频散方程将只有复数根.

### 乙) 简正波的正交特性

不同阶的简正波在深度方向彼此正交.

以两层介质为例, 若上层介质密度为  $\rho_1$ , 声速为  $c_1$ ; 下层介质密度为  $\rho_2$ , 声速为  $c_2$ ,  $c_1, c_2$  均可以是深度  $z$  的任意函数. 设上层介质厚度为  $H$ , 根据简正波的定义, 对应于频散方程的根分别为  $\xi_m, \xi_n$  的两项简正波  $U_m, U_n$ .

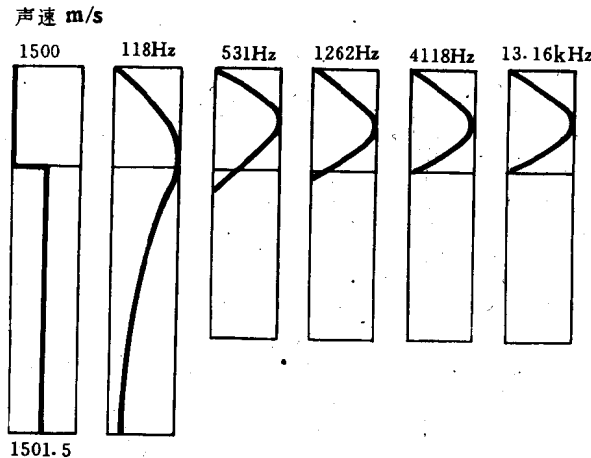


图 2.5 第一阶简正波的振幅随深度变化情况



来说, 应有:

$$\begin{cases} \frac{d^2 U_m}{dz^2} + (k^2 - \xi_m^2) U_m = 0 \\ \frac{d^2 U_n}{dz^2} + (k^2 - \xi_n^2) U_n = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

其中

$$k^2 = \begin{cases} k_1^2 & 0 \leq z < H \\ k_2^2 & H < z \end{cases}$$

令

$$\rho = \begin{cases} \rho_1 & 0 \leq z < H \\ \rho_2 & H < z \end{cases}$$

将(2.8)上、下两式分别乘以  $\rho U_n$  及  $\rho U_m$ , 两者相减后再对  $z$  积分则得:

$$\begin{aligned} (\xi_n^2 - \xi_m^2) \int_0^\infty \rho U_m U_n dz &= \int_0^\infty \left[ \rho U_n \frac{d^2 U_m}{dz^2} - \rho U_m \frac{d^2 U_n}{dz^2} \right] dz \\ &= \rho_1 \left[ U_n \frac{dU_m}{dz} - U_m \frac{dU_n}{dz} \right]_0^H + \rho_2 \left[ U_n \frac{dU_m}{dz} - U_m \frac{dU_n}{dz} \right]_H^\infty \\ &= 0 \end{aligned}$$

即当  $n \neq m$  时, 不同阶的简正波彼此正交。以上虽然是就两层介质情况所得结果, 但不难知道, 对任意分层介质都将有同样的正交特性。利用简正波彼此正交的性质, 使用自海面垂直悬挂的线列阵, 并对不同深度处基元所接收信号按某阶简正波应具有幅度和相位加权, 则可获得该阶简正波的数值。有关问题读者可自行参阅 J.A.S.A.vol.74, pp1833—1836, (1981), 在此即不赘述。

简正波在深度方向在水域中取驻波形式。可将此驻波分解为上行波和下行波, 以(2.4)式所给出的表达式为例, 此时第  $n$  阶简正波可写为:

$$A(z_0, \xi_n) \sin \beta_{1n} z H_0^{(1)}(\xi_n r)$$

将正弦函数用指数函数表示, 对 Hankel 函数取其渐近展开式表示, 则该阶简正波可写成:

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi\xi_n r}} A(z_0, \xi_n) \left\{ e^{i(\xi_n r + \beta_{1n} z - \frac{3\pi}{4})} + e^{i(\xi_n r - \beta_{1n} z + \frac{\pi}{4})} \right\}$$

上行波及下行波在海面相位相差  $180^\circ$ 。其投射角  $\theta$  为  $\tan^{-1} \frac{\beta_{1n}}{\xi_n}$ , 阶次愈高的简正波, 其投射角愈大, 当  $\xi_n$  为复数时, 蜕化为非均匀波。

### 丙) 侧面波部分

现在计算(2.2)式等号右边线积分的近似值。该项积分等于沿割线左侧从  $k_2 + i\infty$  积分至  $k_2$ , 而沿割线右侧从  $k_2$  积分至  $k_2 + i\infty$ , 但在割线右侧  $\beta_2$  具有正虚部, 应记为正, 在割线左侧则记为  $-\beta_2$ 。故有: