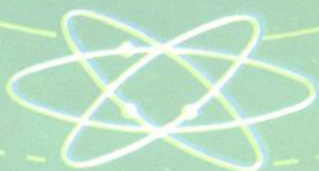


信号检测与估计

高等学校教材

信号检测与估计

国防科技大学 许树声 编著



412
8

国防工业出版社

73.412
538

信号检测与估计

国防科技大学 许树声 编著



国防工业出版社

8510450

内 容 简 介

本书系高等学校工科电子类的专业基础课统编教材之一，是一本比较系统阐述信号检测与估计理论的书籍。

该教材的主要内容是关于在噪声中的信号检测与估计，系统地介绍匹配滤波、信号检测、信号参量估计及信号波形估计的基本理论，适当地结合与介绍它在雷达、通信和其它方面的应用。

本书除作大学有关专业的教材外，还可供从事雷达、电子对抗、通信和测控等有关方面的科技工作者参考或自学使用。

DL32/21

信号检测与估计

国防科技大学 许树声 编著

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092¹/₁₆ 印张13 302千字

1985年4月第一版 1985年4月第一次印刷 印数：0,001—4,150册

统一书号：15034·2897 定价：2.00元

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校工科电子类专业课教材的编审、出版的组织工作。从一九七七年底到一九八二年初，由于各有关院校，特别是参与编审工作的广大教师的努力和有关出版社的紧密配合，共编审出版了教材 159 种。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应社会主义现代化建设培养人才的需要，反映国内外电子科学技术水平，达到“打好基础，精选内容，逐步更新，利于教学”的要求，在总结第一轮教材编审出版工作经验的基础上，电子工业部于一九八二年先后成立了高等学校《无线电技术与信息系统》、《电磁场与微波技术》、《电子材料与固体器件》、《电子物理与器件》、《电子机械》、《计算机与自动控制》，中等专业学校《电子类专业》、《电子机械类专业》共八个教材编审委员会，作为教材工作方面的一个经常性的业务指导机构，并制定了一九八二~一九八五年教材编审出版规划，列入规划的教材、教学参考书、实验指导书等共 217 种选题。在努力提高教材质量，适当增加教材品种的思想指导下，这一批教材的编审工作由编审委员会直接组织进行。

这一批教材的书稿，主要是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中评选择优和从第一轮较好的教材中修编产生出来的。广大编审者、各编审委员会和有关出版社都为保证和提高教材质量作出了努力。

这一批教材，分别由电子工业出版社、国防工业出版社、上海科学技术出版社、西北电讯工程学院出版社、湖南科学技术出版社、江苏科学技术出版社、黑龙江科学技术出版社和天津科学技术出版社承担出版工作。

限于水平和经验，这一批教材的编审出版工作肯定还会有许多缺点和不足之处，希望使用教材的单位、广大教师和同学积极提出批评建议，共同为提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

前 言

本书系高等学校工科电子类雷达、电子对抗、通信和遥测遥控等专业统编教材之一，供专业基础课和选修课使用。同时可供从事有关专业方面的科技工作者参考。

本书系由《无线电技术与信息系统》雷达编审小组评选审定，并推荐出版的。

全书共分五章，包括信号检测与估计两个方面。第一章概述了全书要讨论的基本问题，初步地介绍其余各章内容的分类和特点；第二章主要涉及最佳线性检测的内容，讨论匹配滤波、相关接收及白化处理等方面的理论和方法；第三章比较系统地阐述信号统计检测理论及其在雷达和通信方面的某些应用；第四章介绍有关信号参量的经典估计理论与参量的最佳线性估计；第五章着重研究维纳滤波及卡尔曼滤波等最佳线性波形估计原理。后四章都附有适量的习题，书末附有参考书目。

本书主要的内容是在已往的教学讲稿基础上形成的。作为专业基础课，注意基本理论、基本概念和基本方法的叙述；为了学习和加深对基本内容的理解，需要适当地理论联系实际；关于内容的编排，首先考虑适宜于教学和自学。学习本课程之前，应当学习过“信号、电路与系统”、“概率论”和“随机过程-在电子系统中的应用”等课程。讲授时数可控制在40~60学时；书中若干节或部分例题可以取舍，对主干内容学习没有过多的影响。

本书习题由国防科技大学刘福声和王海云两位老师编写。北京航空学院周荫清老师和清华大学朱正中老师对本书进行了认真、细致的审阅工作，提出了许多宝贵的修改意见，这里表示诚挚的感谢。

由于编者水平有限，书中可能存在不少缺点和错误，欢迎读者批评指正。

编 者

1984.4.

目 录

第一章	绪论	1
第二章	匹配滤波	6
§ 2.1	引言	6
§ 2.2	输出信噪比最大的线性滤波器	7
§ 2.3	匹配滤波器	9
§ 2.4	相关接收与匹配滤波器	19
2.4.1	自相关接收	20
2.4.2	互相关接收	22
2.4.3	相关处理与匹配滤波处理	24
§ 2.5	白化滤波处理方法	24
2.5.1	白化滤波的基本概念	24
2.5.2	白化滤波器	26
2.5.3	广义匹配滤波器	28
§ 2.6	习题	29
第三章	信号的检测	32
§ 3.1	引言	32
§ 3.2	二元假设检验和判决准则	33
3.2.1	基本概念	33
3.2.2	贝叶斯准则	36
3.2.3	最小总错误概率准则	40
3.2.4	奈曼-皮尔逊准则	41
3.2.5	极大极小准则	43
§ 3.3	二元已知信号的检测	44
3.3.1	波形取样	44
3.3.2	二元信号检测系统	45
3.3.3	二元通信系统的检测性能	48
3.3.4	雷达系统的检测性能	52
3.3.5	检测系统的工作特性	53
§ 3.4	随机参量信号的检测	54
3.4.1	信号检测与复合假设检验	54
3.4.2	随机相位信号的检测	58
3.4.3	随机相位及幅度信号的检测	64
3.4.4	射频频脉冲列信号的检测	66
§ 3.5	多元信号的检测	70
3.5.1	多元假设检验的判决准则	70
3.5.2	M 元信号通信检测系统	74
§ 3.6	序贯检测	76
3.6.1	序贯概率比检验	77
3.6.2	序贯概率比检验的平均取样数	78
§ 3.7	非白正态噪声中的信号检测	80
3.7.1	卡亨南-洛维展开式	81

3.7.2	已知信号的检测	82
3.7.3	检测系统的性能	83
§ 3.8	双门限检测	84
§ 3.9	习题	87
第四章	信号参量的估计	92
§ 4.1	引言	92
§ 4.2	贝叶斯估计	94
4.2.1	几种贝叶斯估计	94
4.2.2	估计量的不变性	101
§ 4.3	最大似然估计	102
§ 4.4	估计量的性质	104
4.4.1	估计量的性能标准	104
4.4.2	克拉美-罗限	105
§ 4.5	线性最小均方估计	112
4.5.1	线性最小均方估计	113
4.5.2	非白噪声的模型	119
4.5.3	线性递推估计方法	122
§ 4.6	多参量的同时估计	125
4.6.1	贝叶斯估计与最大似然估计	126
4.6.2	线性最小均方估计	127
4.6.3	正交原理与投影	130
§ 4.7	最小二乘估计	133
4.7.1	最小二乘估计	133
4.7.2	加权最小二乘估计	134
§ 4.8	习题	138
第五章	波形估计	142
§ 5.1	引言	142
§ 5.2	波形的简单估计	142
§ 5.3	维纳滤波	144
5.3.1	波形最佳线性滤波	144
5.3.2	维纳-霍甫积分方程	145
5.3.3	解非因果关系的维纳-霍甫积分方程	146
5.3.4	解维纳-霍甫积分方程	147
5.3.5	离散系统的维纳滤波	156
§ 5.4	标量信号的卡尔曼滤波和预测	157
5.4.1	信号模型与观测模型	157
5.4.2	最佳线性递推滤波	159
5.4.3	最佳线性递推预测	162
5.4.4	滤波与预测的关系	164
§ 5.5	矢量信号卡尔曼滤波和预测	165
5.5.1	信号模型与观测模型	165
5.5.2	最佳线性滤波和预测	167
5.5.3	白化过程——新息	168
5.5.4	一步递推预测	169
5.5.5	递推滤波	172
5.5.6	卡尔曼滤波与预测公式集	174
5.5.7	连续时间的卡尔曼滤波	180

5.5.8 卡尔曼滤波与维纳滤波之间的关系	182
§ 5.6 卡尔曼滤波的推广	182
5.6.1 非随机项的处置	183
5.6.2 动态噪声与测量噪声相关	185
5.6.3 非白噪声的处置	186
5.6.4 非线性系统的近似估计	188
§ 5.7 卡尔曼滤波方法的发散问题	193
5.7.1 发散现象及其原因	193
5.7.2 克服发散的方法	196
§ 5.8 习题	197
参考文献	199

第一章 绪 论

在工程技术、科学研究和生产实践的各种活动中,人们经常需要解决这样的问题:从物理观测结果中发现和提取信息。例如,从电报接收机收到的电波中提取出电报码元信号;根据雷达接收的雷达回波来判断有无目标和测定目标的坐标;设计电视机,从其输入波形中恢复图象和语音信号;根据工厂产品抽样检查结果,推断产品质量;利用收集的有关数据和资料,预测气象变化等等,都含有如何从物理观测结果中发现与提取信息的问题。

如果观测结果中明确地包含了信息,没有什么其它的干扰存在,那么发现和提取信息还是比较容易的。但是,信息在产生和传输的过程中,总是不同程度地掺入各种随机性的干扰;而且,许多信息本身也具有随机的特性。例如,在无线电系统中,除了可能存在的人为干扰之外,来自系统内外的各种固有噪声干扰是不可避免的,它总是与信号伴随在一起。这种干扰具有随机性质,占据频谱很宽,且与信号频谱相重叠,故无法根除。而在各种无线电系统中传输的信号,由于受到电波传播媒质的随机扰动、起伏目标和地物的反射、设备工作的不稳定等因素的影响,信号的波形也具有随机的性质。在研究和分析实际问题时,对于系统输入端的信号波形,除了少数的可以假定为完全确定的以外,一般来讲,需要将它作为具有随机参量的已知波形来处理(如数字通信信号、雷达目标回波信号),或者将它作为随机过程来处理(如模拟通信信号、跟踪系统信号),这样才接近于实际。无论关心的信号模型如何,在系统输入端的输入波形(即观测结果),总是不同程度地含有随机性质。

我们知道,随机性的内在规律只能用其统计特性来描述。因此,为了妥善地从具有随机性的物理观测结果中发现与恢复信息,寻求“最佳”的处理方法,需要应用和开拓概率论与数理统计的成果。将统计推断理论与信号处理相结合形成了信号检测理论与信号估计理论。在这种理论的指导下,人们可以研究和设计各种信息的最佳处理器,评价和改进现有设备的性能。信号检测与估计理论已成为现代信息科学的一个重要组成部分。随着生产实践和科学技术的发展,特别是随着数字电子计算机技术和应用的发展,显著地增加了实现各种最佳或接近最佳的处理方案的可能性,也促进了理论本身的不断发展。目前信号检测与估计理论已经广泛地应用于各个领域,诸如通信、雷达、自动控制、模式识别、系统辨认、生物医学以及地震信号处理等。

本书将讨论信号检测与估计这个课题,并适当地结合它在通信、雷达和其它一些物理量观测中的应用。在这里,我们结合广义无线电工程技术的某些实际情况,概括地提出需要研究的一些问题。

首先我们考察在信号检测理论领域中本书所涉及的问题。举一个简单的例子,如图1.1所示的数字通信系统。信源每隔 T 秒产生一个二进制数字,形成一条代表信息的数字序列。为了通过信道传输信息,发射机输出正弦电磁波。假定信源在 T 秒内产生一个“1”,那么发射机在 T 秒内产生一个角频率为 ω_1 的正弦波,用 $s_1(t)$ 表示

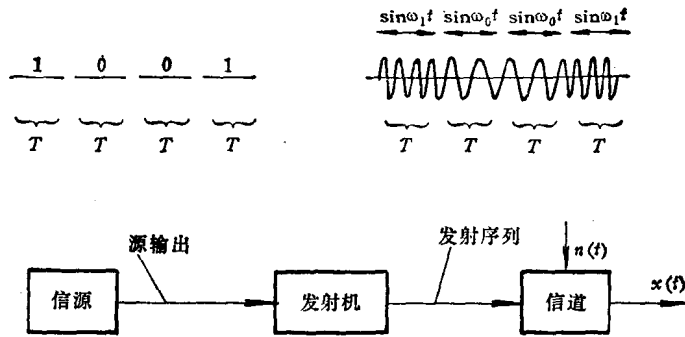


图1.1 二元数字通信

$$s_1(t) = \sin \omega_1 t \quad (1.1)$$

假定信源在 T 秒内产生一个“0”，那么发射机在 T 秒内产生一个角频率为 ω_0 的正弦波，用 $s_0(t)$ 表示

$$s_0(t) = \sin \omega_0 t \quad (1.2)$$

其中 ω_0 与 ω_1 不同，这是个相参频移二元信号通信系统。图 1.1 中也示意地绘出了信源输出的数字序列和发射机输出的发射序列。在最简单的信道中，假定信号序列的传输只有衰减，而信号形式不发生畸变。被衰减了的信号幅值可以经过接收放大得到恢复。但是，在信号传输过程中，热噪声 $n(t)$ 将附加在消息序列上。由此，在任何 T 秒间隔内，我们得到的观测波形 $x(t)$ 可以表示如下：若传输 $s_1(t)$ 时，为

$$x(t) = s_1(t) + n(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.3)$$

若传输 $s_0(t)$ 时，为

$$x(t) = s_0(t) + n(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.4)$$

我们面临的问题是：根据观测波形 $x(t)$ ，判决在两个可能的信号中传输的是哪一个，是 $s_1(t)$ 或者是 $s_0(t)$ 。如果不存在噪声 $n(t)$ 的干扰，那么可以无误地作出判决；若噪声 $n(t)$ 不容忽略，那么作出判决时就可能发生错误。考虑到噪声的随机性质，我们将运用统计推断的理论作出某种“最佳”意义下的判决，设计和计算这种判决装置的组成方块和性能，这归类于在第三章中讨论的信号检测理论问题。由于信源的信号形式是完全已知的，所以称这类问题为噪声中已知信号的检测，是检测问题当中最简单的一种。

在上述例子中，每隔 T 时刻产生的正弦波 $s_1(t)$ 或 $s_0(t)$ 可能有个未知的初相位。假定在某 T 秒间隔内，对应于“1”的接收波形为

$$x(t) = \sin(\omega_1 t + \theta_1) + n(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.5)$$

对应于“0”的接收波形为

$$x(t) = \sin(\omega_0 t + \theta_0) + n(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.6)$$

式中 θ_0 及 θ_1 可以是未知的恒定相角，代表 $s_0(t)$ 及 $s_1(t)$ 振荡器的固定相移； θ_0 及 θ_1 也可以是随机变量，代表振荡器的随机起振相位，总之，是未知的参量。除了未知参量以外，信号波形是已知的。我们将把这种信号的检测归类于噪声中具有未知参量的信号检测。对于雷达回波信号检测也常归结为这种类型。假设雷达发射一个具有矩形包络的、角频率为 ω_0 的脉冲：

$$s_1(t) = \sin \omega_1 t \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.7)$$

如果目标存在, 射频脉冲被反射回来, 即使是最简单的目标, 在传输的信号 $s_1(t)$ 上也会引入衰减和相移。于是, 在所考虑的时间间隔中若目标存在, 则接收的波形为

$$x(t) = V_r \sin[\omega_c(t - \tau) + \theta_r] + n(t) \quad \tau \leq t \leq \tau + T \quad (1.8)$$

其中目标回波信号中包含着三个未知量: 振幅 V_r 、相位 θ_r 和代表目标距离的时间 τ 。若目标不存在, 或即 $s_0(t) = 0$, 则接收波形为

$$x(t) = n(t) \quad \tau \leq t \leq \tau + T \quad (1.9)$$

可见, 与前例是一样的, 对于这种信号的检测 (即判断某个距离上有没有目标存在), 仍属于噪声中具有未知参量的信号检测问题。

前面举出的例子中, 信号源的信号有两个。在每次观测期间内, 必然且只能出现其中的一个; 需要人们作出抉择, 判决哪一个存在。因此, 称其为二元信号检测问题。但是在数字通信、模式识别、电子侦察、离散参量信号检测等许多实际问题中还有另外一种情况, 即信源的信号不止一个, 而是多个; 在每次观测时间内, 必然且只能出现其中的一个; 需要人们作出抉择, 在多个备选的元信号中判决哪一个存在。这属于多元信号检测问题。

以上讨论的检测都是固定观测时间 T 的检测, 即每次为了作出判决所提供的观测波形是一样长 (或者说, 离散取样数据的总个数相同)。但是在许多实际情况下, 诸观测值 (即离散取样数据) 实际上是按顺序得到的; 随着时间的推移, 可以得到更多的观测值 (这也意味着得到更多的信息量)。在这种情况下, 人们可以按照取样观测值出现的次序进行处理和作出判决, 在保证一定的检测质量的条件下, 每次判决所需要的观测时间 T 不是固定的。这便是后面也要讨论的序列检测。可以证明, 对于给定的性能指标, 这种检测所需要的平均检测时间比固定观测时间检测所用的检测时间要少。关于经典检测理论以及上述各种类型的检测问题, 均在第三章中予以讨论。

现在我们介绍在信号估计理论领域中的一些实际问题。图 1.2 提供了一个简单例子, 其中信源产生一个模拟消息 $a(t)$ 。为发送这一消息, 对它每隔 T 秒取样一次。随后, 每隔 T 秒发射一个包含某参量的信号, 该参量只与取样值有关。例如图中发射正弦波的振幅 A_n 取决于信号在 nT 时刻的取样值。这类系统称为脉冲调幅系统。于是, 在间隔 $[nT, (n+1)T)$ 内的信号为

$$s(t, A_n) = A_n \sin \omega_c t \quad nT \leq t \leq (n+1)T \quad (1.10)$$

由于存在附加噪声, 故接收波形为

$$x(t) = s(t, A_n) + n(t) \quad nT \leq t \leq (n+1)T \quad (1.11)$$

假定信号是存在的, 我们面临的问题是: 在每个时间间隔 T 内, 估计信号振幅 A_n , 以便恢复消息 $a(t)$ 。这便是参量估计问题, 我们用 \hat{A}_n 表示对 A_n 的估计量。

再考虑雷达测量的例子。假定目标是存在的, 但不知道它的距离和速度, 接收波形可以表示为

$$x(t) = V_r \sin[(\omega_c + \omega_d)(t - \tau) + \theta_r] + n(t) \quad 0 \leq t \leq \tau + T \quad (1.12)$$

式中参量 ω_d 是表征目标径向速度的多普勒角频移, 参量 τ 是表征目标距离的延迟时间。我们需要解决的问题是根据接收波形 $x(t)$ 对参量 ω_d 及 τ 进行估计。

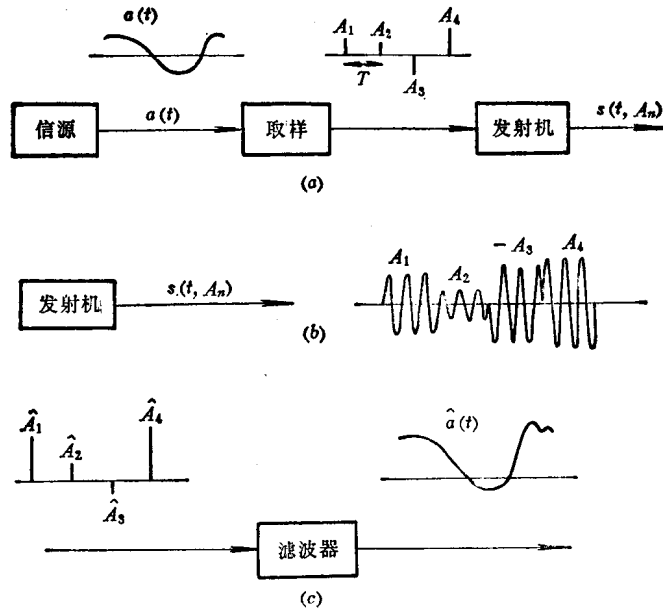


图1.2 脉冲调幅系统

(a) 对信源取样; (b) 脉冲调幅; (c) 波形重现。

上面的两个例子,是关于在噪声中对信号未知参量的估计问题。其中参量可以是未知的常量,也可以是随机变量(在观测时间 T 内是不变的)。关于估计理论及信号参量估计,我们将在第四章中讨论。在研究过程中不难发现,检测与估计理论之间有着密切的联系和相似性。例如,“似然比”是两者共用的重要的基本概念;两者在统计判决的结构上有很大的类似性,在某些情况下,对于离散参量的检测和估计是等效的。另一方面,两者之间也有基本差别。例如,在信号检测中,接收机的工作不是“正确的”就是“错误的”,而在估计连续参量时,接收机的工作很少有机会是完全正确的,但是在大部分情况下是接近正确的。

通过信号检测与估计理论的讨论,我们不难发现,在这个理论指导下,可以找到对于各种观测波形(包括信号模型与噪声模型)的最佳处理器(检测或估计)的组成形式,计算出所能达到的最佳性能(或称为极限性能)。所谓“最佳”,是指在某种统计平均意义上讲的。显然,这对于人们进行各种无线电系统的设计,评价和改进现有设备的性能等等,都有根本性的指导意义。另外一面,我们也注意到,许多最佳处理器的结构是比较复杂的,实现起来有一定的困难,而有时候在结构的局部甚至整体上采取近似的方法倒是可取的。例如,利用谐振电路代替对矩形射频脉冲的匹配滤波器;用双门限检测,以准最佳规则检测雷达脉冲序列信号,等等。作为辅助性的材料,这些问题将在相应的章节中予以介绍。

第二章讨论的中心内容是匹配滤波,它是以输出信噪比最大为准则的特定的线性滤波问题,其直接目的用于信号检测;在同样的条件下,也用于信号参量估计。值得指出,第二章与第三章讨论信号检测的理论和方法有所不同。在第三章中,我们是运用统计推断的一般理论来研究信号检测问题的,事先对于检测器的结构不作规定,它可以包括各

种可能的系统，一般讲，其结果是非线性的，只是在某些条件下，其检验统计量是线性的。研究问题的顺序是从理论、准则到结构。而在第二章中，我们主要关心的只是如何在平稳随机噪声中发现已知信号，并且先规定检测器的结构是线性的，以输出信噪比最大为准则，再寻求检测器的结构内容（传输函数或单位冲激响应）。在白噪声条件下，其结果是所谓匹配滤波器（或等效为相关器），以及在非白噪声条件下是广义匹配滤波器。这种先规定结构类型再求最佳处理的方法，概念简明，又比较容易实现，在研究信号参量估计和波形估计问题时也经常为人们所采用。当然，这种方法也有缺点，它是否合理，是否接近最佳结构的性能，都是值得进一步考虑的。通过第三、四章的讨论将会看到，在正态噪声的条件下，匹配滤波与经典检测理论导出的“噪声中已知信号的检测”是一致的，是所谓最佳检测器的基本组成部分。在同样的条件下，匹配滤波器也常常是信号参量估计器的重要组成部分。

在第五章中我们将讨论信号波形的估计。把处理器的结构规定为线性的条件下，以波形均方误差最小为准则解决对随机过程的估计问题。当研究信号参量估计问题时，曾假定信号参量在全部观测时间内是不变的（在不同的观测时间内，参量可以随机地改变）。若在观测时间内，信号参量随着时间随机地变化，那么参量估计的问题就转化为信号波形估计的问题了。波形估计实质上就是对随机过程的一个样本函数进行估计。有很多这一类的实际问题。例如，对于语音和图象信号的估计，对于飞机颠簸航迹的预测，均属此类。波形估计可以看成是多参量估计的推广，两者之间有着内在的联系。书中阐述的波形估计基本理论，除了需要对信号模型和相加性噪声模型予以若干规定之外，仅限于研究波形的线性估计。所谓线性估计就是规定估计量是观测数据的线性函数，或称为观测波形的线性滤波。我们将研究用于平稳随机过程的经典维纳滤波，讨论用于包括非平稳随机过程在内的卡尔曼滤波，并介绍有关它的推广和某些应用问题。

为了理解和运用信号检测与估计的基本理论，和进一步阐述有关的理论和实际问题，书中讨论了相当数量的关于雷达、通信和其它物理量测量的例题，并安排了一定数量的习题。为了减少重复、便于理解、便于教学和自学，在叙述方法上，我们有时把理论和实际参差地结合在一起，有时将两者适当地相对集中，后者对于加强系统性也有利。对于某些内容，我们有意地用不同的方法考察同一个问题。这样作有助于更好地理解所得结论的含义。

第二章 匹配滤波

§ 2.1 引言

在雷达技术中，搜索雷达的首要任务是在较远的距离上发现目标；从技术上讲，就是在噪声干扰的背景中发现微弱的回波信号；跟踪雷达的首要任务是精确地测定目标的位置和其它参数并进行跟踪，而这些也只有在发现目标的前提下才能进行。因此，在雷达发展的初期，人们就十分关心如何提高雷达在噪声中发现微弱信号的能力。当时是把接收机的输出加到观察示波器上，通过人眼的观察来发现目标回波的。实践表明，雷达接收机输出的信噪比越大，则在观察示波器上越容易发现信号。从而提出，以输出信噪比最大为最佳准则来设计接收机或线性滤波器的任务。

在通信技术中，同样存在在干扰噪声中发现或分辨微弱信号的问题。一般来说，信号通过系统所能获得的信噪比是系统有效性的一个度量。例如，在下一章我们将会讨论，二元通信系统的错误概率与信噪比有关，信噪比越大，错误概率就越小。因此，人们设计这种接收机时，总是设法使其输出信噪比尽可能地大。

于1943年，诺兹（D. D. North）提出了匹配滤波器的理论。所谓匹配滤波器就是这样一个最佳线性滤波器，在输入为已知信号加白噪声的条件下，使得输出的信噪比最大。匹配滤波器的应用十分广泛，它明显地提高了雷达和其它许多无线电系统的检测信号的能力；而且后面的讨论将会表明，匹配滤波器是许多最佳检测系统的基本组成部分，它也在最佳信号参量估计、信号分辨、某些信号波形的产生和压缩等方面起重要的作用。

本章着重讨论以输出信噪比最大为最佳准则的线性滤波理论，包括输入为已知信号加白噪声和输入为已知信号加非白噪声的两种情况，前者就是匹配滤波器。此外，还将介绍信号的相关接收法，它也是用于在噪声中发现信号的，与匹配滤波器有密切的关系。

最后再说明几点。这一章讨论的问题是对含有完全确定信号的输入波形施行最佳线性滤波。这意味着，第一，这里假设了要检测的信号波形是已知的。实际许多系统的信号波形往往是含有一个或几个未知参量（如幅度、延迟时间、高频初相位等）的信号。但是我们将会看到，本章讨论的结果对于上述实际情况还是直接或间接可用的。第二，这里讨论的是线性滤波，即规定用线性系统来尽可能地滤除噪声干扰，保留信号。线性系统符合叠加原则。这一规定，使得理论分析和系统实现得到比较简单、切实可行的结果。而且可以证明，对于常见的正态平稳随机噪声而言，线性滤波已经充分地利用了它的统计特性，达到了所能达到的最佳结果。第三，本章中最佳线性滤波的“最佳”的含义是使线性系统的输出信噪比最大；在最后一章“波形估计”中，我们讨论的基本上还是最佳线性滤波问题，不过那里的“最佳”标准不是输出信噪比最大，而是输出波形失真最小，即波形的均方误差最小。不言而喻，信号通过匹配滤波器后波形必然有明显的失真，但是这没有什么关系，因为波形是已知的，我们关心的是判断该信号是否存在，我们需要的是输出信噪比越大越好。

§ 2.2 输出信噪比最大的线性滤波器

现在, 我们根据输出信噪比最大的准则, 推导出线性滤波器应该具有的传输函数 $H(\omega)$ 。

假设线性滤波器的输入波形 $x(t)$ 为信号与噪声之和:

$$x(t) = s(t) + n(t) \quad (2.2.1)$$

式中 $s(t)$ 是已知波形的信号; $n(t)$ 是平稳随机噪声, 其数学期望为零、功率谱为 $G_n(\omega)$ 。由于噪声的频带是有限的, 故常称它为非白噪声或色噪声。我们的目的是寻求这样一个线性滤波器, 使得它的输出信噪比在某时刻 t_0 达到最大。下面, 从频域着手解决这个问题。

令 $y(t)$ 代表滤波器的输出。由于滤波器是线性的, 应用叠加原理, $y(t)$ 等于

$$y(t) = s_0(t) + n_0(t) \quad (2.2.2)$$

式中 $s_0(t)$ 及 $n_0(t)$ 分别是对应输入信号 $s(t)$ 及噪声 $n(t)$ 的输出。假定输入信号 $s(t)$ 是时间宽度有限的且满足平方可积条件, 可以把它展开成傅里叶积分形式:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.2.3)$$

式中 $S(\omega)$ 是信号 $s(t)$ 的频谱, 它等于

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.2.4)$$

令 $H(\omega)$ 表示线性滤波器的传输函数, 则不难写出输出信号 $s_0(t)$ 等于

$$s_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.2.5)$$

关于输入及输出的噪声功率可以写成

$$E[n^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_n(\omega) d\omega \quad (2.2.6)$$

及

$$E[n_0^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 G_n(\omega) d\omega \quad (2.2.7)$$

式中 $E[\cdot]$ 表示统计均值。在这里假定了平稳随机噪声具有各态历经性, 它的时间均值等于统计均值。

我们定义在某时刻 $t = t_0$ 时滤波器输出端的信号噪声功率比 (简称信噪比) d_0 为

$$d_0 = \frac{s_0^2(t_0)}{E[n_0^2(t)]} \quad (2.2.8)$$

将式 (2.2.5) 及 (2.2.7) 代入式 (2.2.8), 得

$$d_0 = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) S(\omega) e^{j\omega t_0} d\omega \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 G_n(\omega) d\omega} \quad (2.2.9)$$

下一步的工作, 就是选择具有这样 $H(\omega)$ 的滤波器, 使得上式取最大值。最简单的求解办法是利用如下的许瓦兹不等式:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) B(\omega) d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} |B(\omega)|^2 d\omega \quad (2.2.10)$$

其中 $A(\omega)$ 及 $B(\omega)$ 是满足积分存在的任意函数, 当且仅当 $A(\omega)$ 正比于 $B^*(\omega)$ 时, 即

$$A(\omega) = cB^*(\omega) \quad (2.2.11)$$

时, c 为一常数, 该式取等号。令

$$A(\omega) = H(\omega) \sqrt{G_n(\omega)} e^{j\omega t_0} \quad (2.2.12)$$

$$B(\omega) = \frac{S(\omega)}{\sqrt{G_n(\omega)}} \quad (2.2.13)$$

将式 (2.2.12) 及 (2.2.13) 代入式 (2.2.10), 得

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) S(\omega) e^{j\omega t_0} d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 G_n(\omega) d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{G_n(\omega)} d\omega \quad (2.2.14)$$

代入式 (2.2.9) 得

$$d_0 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{G_n(\omega)} d\omega \quad (2.2.15)$$

由式 (2.2.11)、(2.2.12) 及 (2.2.13) 不难看出, 当且仅当滤波器的传输函数 $H(\omega)$ 为

$$H(\omega) = c \frac{S^*(\omega)}{G_n(\omega)} e^{-j\omega t_0} \quad (2.2.16)$$

时, 不等式 (2.2.14) 及 (2.2.15) 取等号, d_0 取最大值。故式 (2.2.16) 就是所要求的最佳滤波器的传输函数 $H(\omega)$ 。通过它得到的最大输出信噪比 d_m 等于

$$d_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{G_n(\omega)} d\omega \quad (2.2.17)$$

将式 (2.2.16) 代入式 (2.2.5), 得到输出的信号波形为

$$s_0(t) = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{G_n(\omega)} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega \quad (2.2.18)$$

当 $t = t_0$ 时, 输出信号值 $s_0(t_0)$ 最大, 是波形 $s_0(t)$ 的尖峰。

现在我们从物理意义上解释一下上面几个公式。从式 (2.2.16) 可以看出, 滤波器的传输函数 $H(\omega)$ 与信号频谱的共轭 $S^*(\omega)$ 成正比, 与噪声功率谱 $G_n(\omega)$ 成反比, c 是个比例常数, 对滤波器的频率特性不起本质上的影响。我们先看一下它的幅频特性:

$$|H(\omega)| = c \frac{|S(\omega)|}{G_n(\omega)}$$

滤波器的 $|H(\omega)|$ 实质上是对输入过程频谱的幅度施行加权的算子, 在某频率域单元 $(\omega, \omega + d\omega)$ 内, 信号的 $|S(\omega)|$ 越弱, 噪声的 $G_n(\omega)$ 越强, 则 $|H(\omega)|$ 越小, 即允许通过的程度越小; 反之, 在该频率域单元内信号的 $|S(\omega)|$ 越强, 噪声越弱, 则 $|H(\omega)|$ 越大, 即允许通过的程度越大, 这就是说 $|H(\omega)|$ 有利于通过信号和滤除噪声。关于 $H(\omega)$ 的相频特性, 由式 (2.2.16) 有

$$\arg H(\omega) = -\arg S(\omega) - \omega t_0$$

是由两项组成的: 第一项与信号相频特性 $\arg S(\omega)$ 反相; 第二项与频率成线性关系

$-\omega t_0$, 为一时间延迟项。它们的作用可以从

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)| |S(\omega)| e^{j[\arg H(\omega) + \arg S(\omega) + \omega t]} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{G_n(\omega)} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega \end{aligned}$$

看出, $\arg H(\omega)$ 补偿掉了输入信号的 $\arg S(\omega)$, 并使输出信号 $s_0(t)$ 的全部频率分量 (即被积函数) 的相位在 $t = t_0$ 时相同, 幅度同相相加 (即积分), 得到了最大的合成幅度, 使得输出信号的瞬时值 $s_0(t_0)$ 达到最大; 而噪声是平稳随机过程, 其各频率分量的相位是随机的, 平均而言, 滤波器的相频特性对噪声可以看成没有什么影响。这样就说明了在 $t = t_0$ 时输出信噪功率比最大。此外, 式 (2.2.17) 表明, 当 $S(\omega)$ 与 $G_n(\omega)$ 在频率轴 ω 上的分布越互不重叠时, 通过滤波器可能得到的 d_m 越大, 这与通常滤波器的概念是一致的。

关于非白噪声情况下的最佳线性滤波器暂时讨论到这里, 有关它的设计计算放到 § 2.5 节中去讲。下面来讨论在白噪声情况下的最佳线性滤波器——匹配滤波器。

§ 2.3 匹配滤波器

对于许多实际的接收机或滤波器, 它们内部和外部产生的随机噪声 (均可等效为系统输入端的噪声), 其功率谱宽度往往远大于系统的通频带。在这种情况下, 随机噪声可以近似地作为白噪声来处理。下面我们讨论输入为已知信号加白噪声的条件下的线性滤波器, 使其输出信噪比最大。引用上一节的结果, 假设

$$G_n(\omega) = \frac{1}{2} N_0 \quad -\infty < \omega < \infty$$

其中 N_0 是个常数, 代表噪声强度, 等于白噪声 $n(t)$ 在每赫芝中的有效功率。将上式代入式 (2.2.16), 得

$$H(\omega) = c S^*(\omega) e^{-j\omega t_0} \quad (2.3.1)$$

式中 c 是一常数。 $H(\omega)$ 便是所要求的最佳线性滤波器的传输函数。它具有信号频谱 $S(\omega)$ 的共轭形式, 故称作匹配滤波器; 它在白噪声干扰的情况下, 对于已知信号滤波, 当 $t = t_0$ 时给出最大的信噪比。

利用傅里叶变换, 不难求出匹配滤波器的冲激响应 $h(t)$

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s^*(\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega \\ &= c s^*(t_0 - t) \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

即匹配滤波器的冲激响应是该信号的共轭镜象。对于实信号有

$$s(t_0 - t) = s^*(t_0 - t)$$

代入式 (2.3.2) 得

$$h(t) = c s(t_0 - t) \quad (2.3.3)$$

即 $h(t)$ 与 $s(t)$ 对于 $t = \frac{t_0}{2}$ 点呈偶对称关系。取 $c = 1$, 如图 2.1 所示。