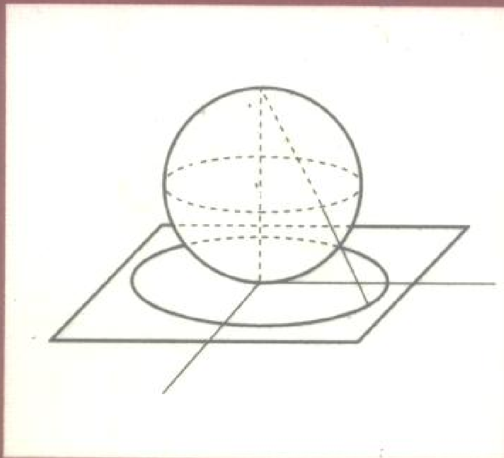
工程数学丛书



复变函数与积分变换

主编 田根宝 副主编 刘振周

上海交通大学出版社

工程数学丛书

复变函数与积分变换

田根宝　主　编　　刘振周　副主编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

复变函数与积分变换是工程数学的主要内容之一，也是高等院校的重要基础课。本书由上海铁道大学田根宝主编，上海工程技术大学刘振周副主编。编写中力求创新，适应教学改革，每章后面增加了一节综合应用，以利读者进一步掌握本章的主要概念与主要方法，起到复习、巩固和提高的作用。全书共分两大部分：复变函数（第一章复变函数，第二章解析函数，第三章复变函数的积分，第四章级数，第五章留数，第六章保角变换）；积分变换（第七章傅里叶变换，第八章拉普拉斯变换）。书末附有习题答案可供读者参考。

工程数学丛书
复变函数与积分变换
上海交通大学出版社·出版、发行
上海市番禺路877号　邮政编码 200030
全国新华书店经销
上虞科技外文印刷厂·印刷
开本：850×1168(毫米) 1/32　印张：10.75　字数：276000
版次：1997年8月　第1版　　印次：1997年8月　第1次
印数：1—4500
ISBN 7-313-01870-3/O·121　　定价：18.50元

前　言

复变函数与积分变换是工程数学的主要内容之一，也是高等院校的重要基础课。本书在编写中力求创新，适应教学改革，每章后面增加了一节综合应用，以利读者进一步掌握本章的主要概念与主要方法，起到复习、巩固和提高的作用。

全书共分两大部分：复变函数与积分变换。书末附有习题答案供读者参考。

本书由田根宝（上海铁道大学）主编，刘振周（上海工程技术大学）副主编，许伯生（上海工程技术大学）编写了复变函数中第一章复变函数与第三章复变函数的积分，卢柏龙（上海工程技术大学）编写了复变函数中第二章解析函数与第六章保角变换，陈靖栋（上海铁道大学）编写了复变函数中第四章级数，蒋志洪（上海铁道大学）编写了复变函数中第五章留数，李玉贞（上海铁道大学）编写了积分变换中的第一章傅里叶变换，王国金（上海铁道大学）编写了积分变换中第二章拉普拉斯变换，段承后、张大豫（上海工程技术大学）也参加了编写。

本书由朱学炎（上海铁道大学）教授主审。

由于编者水平有限，难免有不妥之处，恳请读者提出宝贵意见，万分感谢。

编　者

1996年10月

目　　录

复 变 函 数

积 分 变 换

复 变 函 数

第一章　复变函数

§1.1　复数

一、复数的概念及其表示

1. 复数的概念

(1) 复数的定义。形如$x+\mathrm{i}y$（或$x+y\mathrm{i}$）的数称为复数。其中x与y均为实数，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$称为虚数单位。

通常把复数记作$z=x+\mathrm{i}y$，x 与 y 分别称为复数 z 的实部与虚部，记作

$$x=\operatorname{Re} z,\quad y=\operatorname{Im} z。$$

当$\operatorname{Im} z=0$时，$z=\operatorname{Re} z$ 为实数，因此，实数可看成复数的一部分，复数则是实数的扩充。当 $\operatorname{Re} z=0$ 时，$z=\mathrm{i}\operatorname{Im} z=\mathrm{i}y$称为纯虚数。复数无大小之分。

(2) 复数相等。两复数$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$与$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，仅当$x_1=x_2$及$y_1=y_2$时，称两复数相等。

(3) 共轭复数。$x-\mathrm{i}y$称为$x+\mathrm{i}y$的共轭复数，记作$\overline{x+\mathrm{i}y}=\bar{z}$，即$x-\mathrm{i}y=\overline{x+\mathrm{i}y}=\bar{z}$。$x+\mathrm{i}y$也称为$x-\mathrm{i}y$的共轭复数，即$\overline{x-\mathrm{i}y}=x+\mathrm{i}y=z$，故称 $x-\mathrm{i}y$ 与 $x+\mathrm{i}y$ 互为共轭复数。

2. 复数的表示法

因为复数$z=x+\mathrm{i}y$完全由一对有序数组(x,y)所确定，因此我们在平面上可建立类似高等数学的平面直角坐标系，使平面上的点(x,y)与复数z建立一一对应的关系，只要将 x 轴作为实轴，y 轴

作为虚轴即可。复数z的实部与x轴上的点建立一一对应关系，而虚部与y轴上的点建立一一对应关系。这样建立的平面又称为复平面或Z平面(图1.1)。

(1) 用点表示。引入复平面后，复数与点之间建立了一一对应，复数的许多结果得到了几何直观的解释。为方便起见，“复数z”与“点z”可等同叙述，不再加以严格区别。

(2) 用向量表示。用向量 $\boldsymbol{OP}$ 表示复数 $z=x+iy$，此向量起点在原点$O(o,o)$，终点为 $P(x,y)$，x、y 分别为$\boldsymbol{OP}$ 在x轴、y轴上的投影(图1.2)。点P实际上是图1.1的点z。这样，复数与平面上的向量建立了一一对应关系。

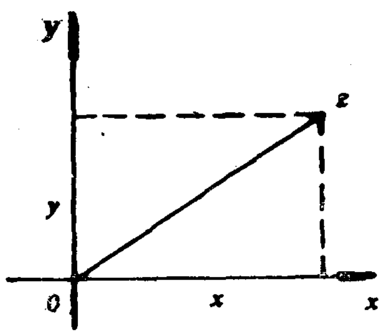


图1.1

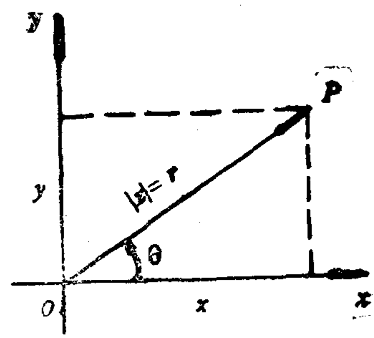


图1.2

1° z的模。

向量$\boldsymbol{OP}$ 的长度称为复数$z=x+iy$的模，记为$|z|$或r，即

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}\text{。} \tag{1.1}$$

由模的定义易得不等式

$$|x|\leqslant|z|,\quad |y|\leqslant|z|,\quad |z|\leqslant|x|+|y|\text{。} \tag{1.2}$$

2° z的辐角。

当点P不与原点重合时，即$z\neq 0$时，向量$\boldsymbol{OP}$与x轴正向夹角

θ 称为复数 z 的辐角，记作

$$\theta = \mathrm{Arg}z。$$

它有无穷多个值，而任两个值之间相差2π的一个倍数。若设 θ_0 是 z 的一个辐角，则 z 的辐角全体为

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

即
$$\mathrm{Arg}z = \theta_0 + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{1.3}$$

将满足不等式 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的 θ_0 称为 z 的辐角主值，记作$\theta_0 = \arg z$，从而 $\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$。当$z = 0$时，辐角不定。

因为反正切函数的主值规定在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$上，故有

$$\theta_0 = \arg z = \begin{cases} \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{当} x > 0,\ \begin{matrix} y > 0 \\ y \leqslant 0 \end{matrix} \text{时}, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{当} x = 0,\ y > 0 \text{时}, \\ \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{当} x < 0,\ y \geqslant 0 \text{时}, \\ \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{当} x < 0, y < 0 \text{时}, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{当} x = 0,\ y < 0 \text{时}。 \end{cases} \tag{1.4}$$

(3) 复数的三角表示。设复数 $z = x + iy$ 的模$|z| = r$，辐角$\theta = \mathrm{Arg}z$，则由极坐标表示式知，实部$x = r\cos\theta$，虚部 $y = r\sin\theta$，于是

$$\begin{aligned} z = x + iy &= r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= |z|[\cos(\mathrm{Arg}z) + i\sin(\mathrm{Arg}z)], \end{aligned} \tag{1.5}$$

其中$\theta = \mathrm{Arg}z = \theta_0 + 2k\pi = \arg z + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$
辐角主值 $\arg z$ 由(1.4)式确定。见图 1.3。

公式(1.5) 即为复数的三角表示式。

特别地，对于已知复数 $z_0 = x_0 + iy_0$，其三角表示式也可写成

$$z_0 = |z_0|(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0),$$

其中 $\theta_0 = \arg z$。

(4) 复数的指数表示。由欧拉公式$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 知，复数

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= re^{i\theta} = |z|e^{i\mathrm{Arg}z}。 \qquad (1.6)$$

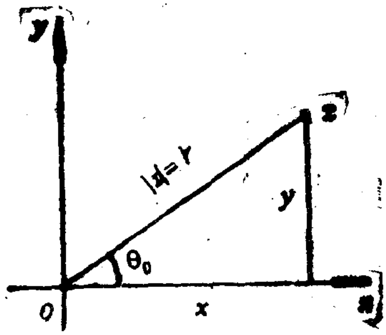


图1.3

此式即复数的指数表示式。

特别地，对于已知复数 $z_0 = x_0 + iy_0$，其指数表示式也可写成 $z_0 = |z_0|e^{i\theta_0}$，其中 $\theta_0 = \arg z$。

例1 求$\mathrm{Arg}(2-i2)$，$\mathrm{Arg}(-3+i4)$。

解 由公式 (1.3)

$$\mathrm{Arg}(2-i2) = \arg(2-i2) + 2k\pi$$

$$= \mathrm{arc\,tg}\frac{-2}{2} + 2k\pi$$

$$= -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\quad k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

$$\mathrm{Arg}(-3+i4) = \arg(-3+i4) + 2k\pi$$

$$= \mathrm{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) + \pi + 2k\pi$$

$$= -\mathrm{arctg}\frac{4}{3} + (2k+1)\pi,\quad k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

例2 求复数 $z_1 = 1 + i$，$z_2 = -i3$ 的三角表示式与指数表示式。

解 由 $|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$，$\theta_0 = \mathrm{arctg}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$，故

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}。$$

同样，$|z_2| = \sqrt{0^2+(-3)^2} = 3, \theta_0 = -\dfrac{\pi}{2}$，

故 $$z_2 = 3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}。$$

二、复数的运算

1．复数四则运算的定义

设有两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$，其加法、减法及乘法定义如下：

$$\begin{aligned} &\text{加法：} z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2); \\ &\text{减法：} z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2); \qquad (1.7) \\ &\text{乘法：} z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2)。\end{aligned}$$

对于复数的除法，其定义是：满足 $z_2 \cdot z = z_1 (z_2 \neq 0)$ 的复数 $z = x + iy$ 称为 z_1 除以 z_2 的商，记作 $z = \dfrac{z_1}{z_2}$。

从而 $$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}。 \qquad (1.8)$$

复数的四则运算性质与实数的四则运算性质相同，不再赘述。

例3 设 $z_1 = 1 + i$，$z_2 = \sqrt{3} + i$，求 $z_1 \cdot z_2$。

解 $$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (1+i)(\sqrt{3}+i) \xlongequal{\text{(分配律)}} \sqrt{3} + i + \sqrt{3}i - 1 \\ &= (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)。\end{aligned}$$

2．复数四则运算的几何意义

（1）复数加、减法的几何意义。复数可用向量表示，两复数的加法按平行四边形(或三角形)法则，其几何意义如图1.4所示。减法 $z_1 - z_2$ 可看作 $z_1 + (-z_2)$，其几何意义如图1.5所示。

由复数加、减法的几何意义，即可得三角不等式

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|，\text{(三角不等式)} \qquad (1.9)$$

$$|z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|。 \qquad (1.10)$$

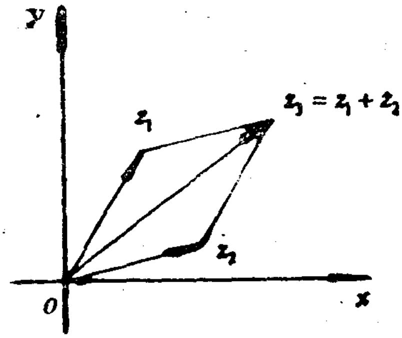


图1.4

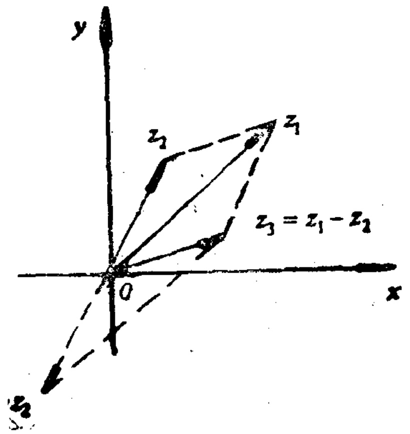


图1.5

(2) 复数乘法的几何意义。若将复数 z_1 与z_2 写成三角表示式及指数表示式，即

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=r_1e^{i\theta_1},$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_2e^{i\theta_2},$$
$$z_1z_2=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),$$
$$z=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$
$$=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}。\qquad(1.11)$$

由此可得 $|z|=|z_1\cdot z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|,\qquad(1.12)$

从而也有 $\mathrm{Arg}(z_1\cdot z_2)=\theta_1+\theta_2=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2。\qquad(1.13)$

因此，两复数乘积的模等于它们模的乘积，两复数乘积的辐角等于它们的辐角之和。

从公式(1.11)可知，两复数 z_1 与 z_2 相乘的几何意义是：将矢量z_1伸长(缩短)到$|z_2|$倍，然后将其辐角按逆时针方向旋转 θ_2 角度(图1.6)。

(3) 复数除法的几何意义。对复数 z_1与z_2 的除法 $z=\dfrac{z_1}{z_2}$，$z_2\neq0$，由于 $z_2\cdot z=z_1$，根据公式(1.12)、(1.13)知

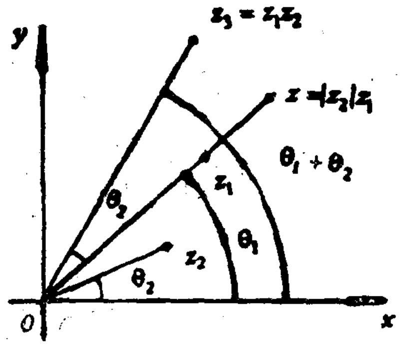


图1.6

$$|z_2||z| = |z_1|,$$
$$\mathrm{Arg} z_2 + \mathrm{Arg} z = \mathrm{Arg} z_1,$$

从而有 $|z| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $\mathrm{Arg}\dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{Arg} z_1 - \mathrm{Arg} z_2$, (1.14)

也有 $$\mathrm{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \theta_1 - \theta_2 = \mathrm{Arg} z_1 - \mathrm{Arg} z_2。 \quad (1.15)$$

因此，两复数的商的模等于它们模的商，两复数的商的辐角等于它们辐角之差。

从公式 (1.14) 可知，复数 z_1 除以复数 z_2 的几何意义是将 z_1 缩短(伸长)到 $\dfrac{1}{|z_2|}$ 倍，然后将其辐角按顺时针方向旋转 θ_2 角度(图1.7)。

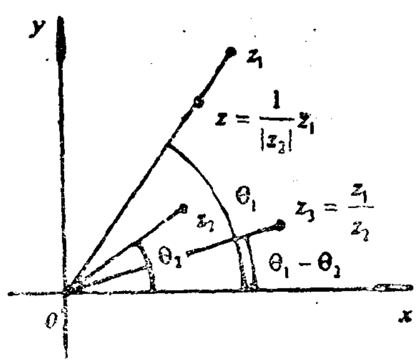


图1.7

例4 设 $z_1=1+\mathrm{i}$，$z_2=1-\mathrm{i}$，求 $\dfrac{z_1}{z_2}$。

解 $z=\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}$

$=\dfrac{2\mathrm{i}}{2}=\mathrm{i}$。

$\therefore\quad |z|=|\mathrm{i}|=1$。

$\arg z=\arg \mathrm{i}=\dfrac{\pi}{2}$，

$\operatorname{Arg} z=2k\pi+\arg z$

$=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，

$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

3. 复数的其它运算

(1) 共轭。设复数 $z=x+\mathrm{i}y$，其共轭复数 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$，显然有 $|z|=|\bar{z}|$，$\operatorname{Arg} z=-\operatorname{Arg}\bar{z}$。这表明两复数互为共轭的充要条件是：它们的模相等，辐角的符号相反(图1.8)。

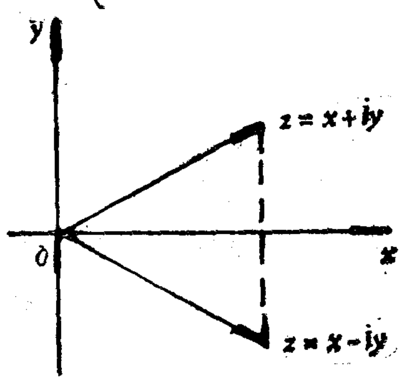


图1.8

共轭复数的几何意义是：在复平面上，z 与 $\bar{z}$ 两点关于实轴对称。

易证共轭复数有如下性质：

1° $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$，$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$，

$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$，　　$z_2\neq0$；

2° $\bar{\bar{z}}=z$；

3° $z\cdot\bar{z}=[\operatorname{Re} z]^2+[\operatorname{Im} z]^2=|z|^2$；

$4°\quad x=\operatorname{Re} z=\dfrac{z+\bar{z}}{2},\quad y=\operatorname{Im} z=\dfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$。

这些性质以后将经常用到。

例5 试求复数 $\dfrac{z-1}{z+1}$的实部与虚部。

解 设$z=x+\mathrm{i}y$,则

$$\frac{z-1}{z+1}=\frac{(z-1)(\overline{z+1})}{(z+1)(\overline{z+1})}=\frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{|z+1|^2}$$

$$=\frac{z\bar{z}-\bar{z}+z-1}{(x+1)^2+y^2}=\frac{x^2+y^2-1+\mathrm{i}2y}{(x+1)^2+y^2},$$

所以 $$\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2},$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}。$$

例6 设 z_1、z_2 为任意两个 复 数,试 证:

$z_1\cdot\bar{z}_2+\bar{z}_1\cdot z_2=2\operatorname{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2)$。

证明 由共轭的性质4°与1°及2°,得

$$\operatorname{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2)=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2+\overline{z_1\cdot\bar{z}_2}}{2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2+\bar{z}_1\cdot z_2}{2},$$

故得 $$z_1\cdot\bar{z}_2+\bar{z}_1\cdot z_2=2\operatorname{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2)。\tag{1.16}$$

(2) 复数的乘幂。n个相同复数z的乘积称为z的n次幂,记作z^n,即

$z^n=z\cdot z\cdots z$。

若$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$,则对于任何正整数$n$,有

$$z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)。\tag{1.17}$$

若定义$z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$,则公式(1.17)中当n为负整数时也成立,

特别当z的模$r=1$,即$z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$时,则有

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta。\tag{1.18}$$

此式就是著名的棣莫弗(De Moivre)公式。

(3) 复数的开方。设给定复数 $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$,求所有满足 $w^n = z_0$ 的复数w,称为把复数 z_0 开 n 次方,或称为求 z_0 的 n 次方根,记作

$$w = \sqrt[n]{z_0} \quad 或 \quad w = z_0^{\frac{1}{n}}。$$

设 $w = \rho e^{i\varphi}$, 则由 $w^n = z_0$, 得

$$\rho^n e^{in\varphi} = r_0 e^{i\theta_0}。$$

由于 θ_0 是 z_0 的一个辐角,从而得到

$$\begin{cases} \rho^n = r_0, \\ n\varphi = \theta_0 + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \end{cases}\tag{1.19}$$

于是

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r_0}, \\ \varphi = \dfrac{\theta_0 + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \end{cases}\tag{1.20}$$

因$\cos\varphi$与$\sin\varphi$均以2π为周期,故知当 $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ 时, $r_0^{\frac{1}{n}}\left(\cos\dfrac{\theta_0 + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right)$有 n个不同的值, 而当k取其它整数时, 所得的值必相同于这 n 个值中的一个, 故

$$w = \sqrt[n]{z_0} = r_0^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}}$$

$$= \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right),$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots, n-1。\tag{1.21}$$

几何上不难看出 $\sqrt[n]{z_0}$的n个不同值就是以原点为圆心,$r^{\frac{1}{n}}$为半径的圆的内接正n边形的n个顶点。

例7 求 $\sqrt[4]{1+\sqrt{3}\,i}$。