

理論力学

(第一冊)

徐芝綸 吳永祺 合編

理 論 力 学

(第 一 冊)

徐芝綸 吳永祺 合編

科 学 出 版 社

容 提 要

本書可作為高等學校理論力學課程教本或參考書，附有夠用的例題及習題。第一冊包含靜力學及運動學兩部份。

理 論 力 學

[第一冊]

合編者 徐芝綸 吳永肇

科學技術出版社出版

(上海南京西路2004號)

上海市書刊出版業營業許可證出079號

啟智印刷廠印刷 新華書店上海發行所總經售

統一書號: 13119·74

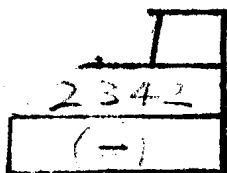
(原蘇聯版印3,000冊)

開本 787×1092 稀 1/23 · 印張 11 19/23 · 字數 270,000

1957年2月新1版

1958年3月第4次印刷 · 印數 5,201—6,200

定價: (10) 1.80 元



序

爲了適應教學上的需要，我們在今年春天開始編寫這本書。六、七月間，先後看到中央高等教育部發下的“理論力學教案”底一部分和“理論力學教學大綱”，使我們對於一般的要求有了比較明確的了解，在內容的選擇和次序的安排上獲得了很大的幫助，從而推動了工作的進行。暑假以前，已經寫了一部分，大部分工作是在暑假裏作的，但沒有來得及完成，剩下的部分是秋季開學以後抽空寫成的。

本書底內容，基本上是與中央高教部所發的“大綱”一致的，只有少數地方略爲多一些。如用作教本，可斟酌刪減。

在次序安排上，我們依據這樣兩個原則：從簡單的到複雜的；從特殊的到一般的，再回到特殊的。這樣安排的結果，與中央高教部所發的“大綱”底次序也大致相符，只是靜力學部分有下述幾處差別較大：

矢量算術一章排在靜力學底最前面。因爲，有的學校，在講授理論力學以前已在高等數學中講授了矢量運算，這一章僅供參考；有的學校，理論力學中所用的矢量運算部分，須要在本課程中講授，但究竟矢量運算適於先講抑或在應用到的時候才講，大家的意見並不一致。我們把這一章排在最前面，如果認爲分開講授的效果較好，也可以分別插入適當的章節中講授。

摩阻與滾阻作爲靜力學底最後一章。我們是從這樣的觀點來處理的：首先，有關摩阻與滾阻的理論，不是從靜力學底公理推演出來的，而是由實驗得來的結果；其次，摩阻問題不全是共面力系的問題，也有空間力系的問題。因此，我們以爲，把這一章放在靜力學底最後，是比較適當的。

圖解靜力學部分並未單獨成章，而把關於索線多邊形的原理和應用歸併到“共面力系”一章中講授。因爲，在“共面共點力”一章中已講

過圖解法,而在講到桁架問題、形心問題時也將講述圖解法,這樣安排似乎是很自然的。

本書中所用的名詞,大多是採用“物理學名詞”及“數學名詞”中所擬定的,也有些是習慣上沿用的,只有很少數是我們自己擬定的。從前所沿用的“脫離體圖”這一名詞,在中央高教部所發的“教案”裏,建議改為“示力圖”,我們認為這是一個很好的建議,在本書中也就採用了這一名詞。

由於大多數學校的理論力學是與物理學同時講授的,所以本書中所用的單位底名稱也採用物理學中所用的,如仟克、厘米等,以免同學在學習上感到不便。

本書中所用的外文字母,除了依照一般的習慣,用粗斜體字母(如 F, W, v, w)表示矢量,細斜體字母(如 F, W, v, w, x, y)表示矢量底大小及標量外,並用細正體字母(如 A, B, a, b)表示點、線、面、體,使不致與表示各種量的字母混淆。

限於我們的理論水平和語文素養,在內容上和講述方式上都必然有缺點,竭誠希望讀者們多加指正!

編 者

一九五三年十月於南京

目 次

緒 論	1
-----------	---

第一篇 靜力學

第 一 章 矢量算術	7
------------------	---

§ 1-1. 矢量(7)	§ 1-2. 矢量底與差(8)	§ 1-3. 矢量底投影, 投影定理(10)
§ 1-4. 矢量與標量底乘積(13)	§ 1-5. 矢量底分解(14)	§ 1-6. 兩矢量底標積(16)
§ 1-7. 兩矢量底矢積(17)		

第 二 章 基本概念及公理	21
---------------------	----

§ 2-1. 剛體與質點(21)	§ 2-2. 力的概念(22)	§ 2-3. 靜力學公理(23)	§ 2-4. 約束與約束力, 示力圖(28)
------------------	-----------------	------------------	------------------------

第 三 章 共面共點力	34
-------------------	----

§ 3-1. 合成(34)	§ 3-2. 分解(36)	§ 3-3. 平衡條件(38)	§ 3-4. 力沿直角坐標軸的分解(41)	§ 3-5. 用解析法求力底合成, 平衡方程式(42)	§ 3-6. 不平行的三個力底平衡(46)
---------------	---------------	-----------------	-----------------------	-----------------------------	-----------------------

第 四 章 共面力偶	49
------------------	----

§ 4-1. 同向的兩個平行力底合成(49)	§ 4-2. 反向的兩個平行力底合成(50)	
§ 4-3. 力偶與力偶矩(51)	§ 4-4. 等效力偶(53)	§ 4-5. 力偶底合成及平衡條件(55)

第 五 章 共面力系	58
------------------	----

§ 5-1. 力對於一點的矩(58)	§ 5-2. 力底平行移動(59)	§ 5-3. 共面力系底簡化(59)	§ 5-4. 共面力系合成為一個力, 力矩定理(61)	§ 5-5. 共面力系簡化為一個力偶(62)	§ 5-6. 共面力系底平衡(62)	§ 5-7. 物體系統底平衡, 靜定與超靜定的問題(68)	§ 5-8. 共面平行力系底合成及平衡(72)	§ 5-9. 圖解法(76)
--------------------	-------------------	--------------------	-----------------------------	------------------------	--------------------	-------------------------------	-------------------------	----------------

第 六 章 桁架及懸索	85
-------------------	----

§ 6-1. 桁架與桁架分析(85)	§ 6-2. 桁架分析法之一——節點法(89)	§ 6-3. 節點圖解法——桁架內力圖(92)	§ 6-4. 桁架分析法之二——截段法(98)	§ 6-5. 載荷沿水平跨度均勻分佈的懸索(101)	§ 6-6. 載荷沿索長均勻分佈的懸索(105)
--------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	----------------------------	--------------------------

第 七 章 空間共點力	108
-------------------	-----

§ 7-1. 合成及平衡條件(108) § 7-2. 力沿三個垂直方向的分解(109) § 7-3. 合成底解析計算. 平衡方程式(111)

第八章 空間力偶.....115

§ 8-1. 等效力偶(115) § 8-2. 力偶矩作為矢量(116) § 8-3. 力偶底合成及平衡條件(117)

第九章 空間力系.....121

§ 9-1. 力對於一軸的矩(121) § 9-2. 力對於一點的矩作為矢量. 力底平行移動(122) § 9-3. 力對於一點的矩與對於經過該點的一軸的矩之間的關係(123) § 9-4. 力對於一點的矩作為矢徑與力底矢積(124) § 9-5. 力對於直角坐標軸的矩(125) § 9-6. 空間力系底簡化(126) § 9-7. 空間力系簡化為力螺(127) § 9-8. 空間力系簡化為一個力偶(130) § 9-9. 空間力系合成為一個力. 力矩定理(130) § 9-10. 空間力系底平衡條件(132) § 9-11. 空間力系簡化底解析計算(133) § 9-12. 空間一般力系底平衡方程式(136) § 9-13. 空間平行力系底合成及平衡條件(144)

第十章 平行力系底中心. 重心及形心.....148

§ 10-1. 平行力系底中心(148) § 10-2. 剛體底重心(150) § 10-3. 幾何形體底形心(151) § 10-4. 對稱形體底形心(153) § 10-5. 古爾丁努斯—巴布斯定理(154) § 10-6. 若干簡單形體底形心(156) § 10-7. 組合形體底形心(158) § 10-8. 用圖解法求平面圖形底形心(161) § 10-9. 分佈平行力(162)

第十一章 摩擦阻與滾阻.....167

§ 11-1. 摩擦現象與摩擦力(167) § 11-2. 摩擦定律(168) § 11-3. 滾動阻力(174)

第二篇 運動學

第十二章 點底直線運動.....177

§ 12-1. 緒言(177) § 12-2. 運動方程式. 速度. 加速度(178) § 12-3. 微分積分法(181) § 12-4. 圖解法(185)

第十三章 點底曲線運動.....190

§ 13-1. 變矢量底矢端線與矢量導數(190) § 13-2. 運動方程式. 速度與加速度底矢量表示(193) § 13-3. 運動方程式. 速度與加速度底直角坐標表示(195) § 13-4. 路徑底曲率與密切面. 自然坐標軸(200) § 13-5. 運動方程式. 速度與加速度底路徑表示(202)

第十四章 剛體運動底基本形式.....209

§ 14-1. 緒言(209) § 14-2. 剛體底平行移動(209) § 14-3. 剛體底定軸轉動(211) § 14-4. 繞定軸轉動的剛體內任一點底速度與加速度(214) § 14-5. 角速度底矢量表示. 以矢積表示速度及加速度(217)

第十五章 點底合成運動	220
§ 15-1. 緒言, 相對運動(220) § 15-2. 速度底合成(221) § 15-3. 牽連運動爲 平行移動時加速度底合成(223) § 15-4. 牽連運動爲定軸轉動時加速度底合 成(224)	
第十六章 剛體底平面運動	231
§ 16-1. 運動方程式, 平面運動分解爲移動及轉動(231) § 16-2. 平面圖形內各 點底速度, 速度瞬心(233) § 16-3. 速度圖(237) § 16-4. 平面圖形內各點底 加速度, 加速度瞬心(240)	
第十七章 剛體底定點轉動	245
§ 17-1. 運動方程式(245) § 17-2. 位移定理(246) § 17-3. 轉動瞬軸, 角速度 及角加速度(247) § 17-4. 剛體內各點底速度及加速度(248) § 17-5. 剛體繞 相交軸的轉動底合成(252)	
第十八章 剛體底一般運動	255
§ 18-1. 運動方程式, 剛體底運動分解爲移動與轉動(255) § 18-2. 剛體內各點 底速度及加速度(256)	
索引	259

緒 論

力學是研究物體運動規律的科學。

按照辯證唯物論的了解，“運動是物質存在的形式”(恩格斯)^①，因而它包羅了宇宙間的一切現象。但是，力學中所研究的運動卻不是這種廣義的運動，而只是最簡單形式的運動——機械運動，即物體在空間的位置隨時間而改變的現象。至於靜止或平衡，“只是相對的，它們只對某一特定運動形式而言，才有意義”(恩格斯)^②，也就是說，“平衡與運動是不能分開的”(恩格斯)^③。因此，靜止或平衡也包含在力學底研究範圍之內。

理論力學研究物體機械運動底一般規律，並對有關機械運動的基本問題提供一般的解答方式與方法。把力學原理應用於各種專門工程問題底解答，則屬於應用力學底範圍；如材料力學，結構力學，機構學等等學科就屬於應用力學底範圍。由此顯然可見，理論力學是所有各門應用力學底基礎。

理論力學通常分爲三部份，按其歷史發展及由淺入深的次序是：

- (1) 靜力學——研究物體底平衡，亦即作用於物體的力底平衡。
- (2) 運動學——研究物體運動底幾何學性質，即空間與時間的關係，而不考慮作用於物體的力。
- (3) 動力學——研究物體底運動與作用於物體的力兩者之間的關係。

在開始研究力學底具體內容之前，先注意一下力學發展底歷史過程，不但是有益的，而且是必要的。

力學是最古老的科學之一，它的發展過程也就是人類對於物體機

①，② 見恩格斯著(吳黎平譯，1950年版)“反杜林論”，第65頁。

③ 見恩格斯著(曹葆華、于光遠譯，1951年版)“辯證法與自然科學”，第103頁。

械運動的辯證唯物的認識過程，而這種認識則是通過生產實踐來實現的。毛主席在他的偉大著作“實踐論”裏曾透澈地說明，人的認識怎樣從實踐發生而又服務於實踐。在這篇著作底末尾，他總結地說道：“實踐、認識、再實踐、再認識，這種形式，循環往覆以至無窮，而實踐和認識之每一循環的內容，都比較地進到了高一級的程度。”在另一篇偉大著作“矛盾論”裏，毛主席又說過：“這是兩個認識的過程：一個是由特殊到一般，一個是由一般到特殊。人類的認識總是這樣循環往覆地進行的，而每一次的循環（只要是嚴格地按照科學的方法）都可能使人類的認識提高一步，使人類的認識不斷地深化。”力學底發展也正是這樣一個循環往覆的過程。

遠在很古的時代，由於農業上的需要，人們使用了灌溉設備；由於建築上搬運重物的需要，使用了槓桿、斜面和滑輪；由於長距離運輸的需要而製造了車子；由於航運的需要而造船。這些生產工具的製造和使用，使得人類對於物體底機械運動有了些初步的認識。但是，在很長久的一段時期裏，人類底認識僅僅限於片斷的經驗底累積，而沒有能對它們加以去粗取精，去偽存真，由此及彼，由表及裏的改造製作功夫，造成概念和理論的系統。直到公元前的幾百年內，經過了有系統的試驗與研究，才算奠定了力學理論底一部份基礎。

在中世紀的漫長黑夜裏，雖然在力學底應用方面也有一些發明，但由於受了那愈趨腐朽的封建制度底桎梏，生產底發展停滯不前，因而一切科學底發展也差不多陷於停頓，力學也不例外。到十五世紀，當西方的商業資本開始發達的時候，生產力迅速發展，工商業空前繁榮，航海事業、都市建設也隨之更加發展；而且，東方的文明又已大量傳到西方；再加上新式儀器底製造又使得科學的觀察和實驗更加精確；這樣，一方面為科學提供了大量的研究資料和新的實驗手段，而另一方面，也向科學提出了一些新的急需解決的問題。各門科學從那些已有的資料裏吸取了豐富的養分，又解決了生產上的一些新的問題，就使得科學底內容更加充實。於是，力學也和其他的科學一樣，從此有了空前的發展。

在工業革命發生以後，生產力更以驚人的速度發展起來，機器製造、建築工程以及新起的航空事業都向力學提出更多的問題並供給力學以更豐富的資料，從而促進了力學底進一步的發展。此外，軍事工業底發展也對力學（特別是動力學）底發展起了極其重要的作用。

當然，力學在各個階段的理論底進展，使得生產技術上的一些問題獲得解決，因而對生產底發展也起了推動作用。

由此可見，力學底發展是和生產實踐密切聯繫着的。首先，它以人類在生產實踐中的經驗知識為基礎而興起，成為一門科學。當它從生產實踐中獲得豐富的資料，經過“科學的抽象”而建立了普遍的理論以後，又反過來為生產服務，指導生產，從而加速生產底發展，並從此獲得更多的資料，而使它自己愈更充實。到現在，力學底發展可以說是已經相當完善了（特別是在理論力學方面），但是，決不能說它已經發展到頭了；可以斷言，隨着以後生產底不斷高漲，力學也必然會無窮盡地、向着更完善的階段發展下去。

我們又知道，生產底發展必然會引起社會制度底變革，而社會制度也反過來影響生產，加速或延遲其發展。因此，既然力學底發展有賴於生產，它就不可能不和社會制度發生密切的關係。上述中世紀科學發展底停頓以及近幾百年來的加速發展說明了這一關係，而近三十年來蘇聯科學發展之遠超過資本主義國家，和我國解放以後幾年來在科學上的進步，也都對此給予了有力的證明。

在追溯力學在各個歷史階段的發展時，我們應首先舉出我國戰國時代的墨子（公元前 468-382^①）底巨大貢獻。墨子在他的“墨經”裏已對“力”和“運動”下了適當的定義，對於力和運動的關係有了初步的認識，而且對於槓桿（秤）底平衡問題有了理論的敘述。這要算是關於力學理論的最早的記載了。後來，希臘哲學家亞里斯多德（公元前 384-322）也提出了槓桿底平衡問題，而阿基米德（公元前 287-212）更用明確而普遍的方式解決了這一問題。此外，阿基米德也還解決了另一些屬於

① 據梁啟超本。

靜力學範圍的問題。至此，靜力學底理論基礎就奠定了。經過中世紀的停頓之後，意大利藝術家、物理學家兼工程師達·芬奇(1451-1519)經過一系列的實驗研究之後提出了力矩底概念；荷蘭物理學家斯蒂芬(1548-1620)由斜面問題底研究得出力底合成與分解定律，即力底平行四邊形原理；法國科學家伐里囊(1654-1722)提出力矩定理，布安索(1777-1859)提出力偶底概念及有關的理論，於是靜力學底理論得到了進一步的發展。

至於動力學底理論，可以說是由哥白尼(1473-1543)開始，伽利來(1564-1642)奠基，而牛頓(1642-1727)總其成的。哥白尼底太陽中心學說在科學界引起了宇宙觀底大革命。刻卜勒(1571-1630)根據哥白尼底學說以及別的一些天文學家底觀測資料，得出行星運行三大定律，成為後來牛頓萬有引力定律底基礎。伽利來觀察了落體運動並實驗了物體沿斜面的運動，從而提出落體在真空中運動的定律，並引出加速度底概念，於是奠定了動力學底基礎。牛頓總結了他以前的無數科學家底成績，加上了絕對空間和絕對時間底概念，在他的名著“自然哲學底數學原理”中發表了他的著名的運動定律，不僅使動力學成為嚴密的理論科學，而且使整個的理論力學成為幾乎是定型的古典力學。在牛頓之後，藉助於新的數學分析方法(微積分)，理論力學上更出現了輝煌的成就。偉大的數學家、俄國彼得堡科學院院士歐拉(1707-1783)提出質點及剛體運動底一般微分方程式；法國科學家達倫貝爾(1717-1783)貢獻了有名的達倫貝爾原理，拉格郎日(1736-1813)建立了虛位移原理底普遍形式，並將它與達倫貝爾原理相結合而提出了廣義坐標的動力學方程式；這些貢獻使得古典力學向着解析的途徑發展，成為一門嚴密而完整的數理科學。

在十九世紀以前，運動學與動力學是不分開的。後來，由於研究機構與機器底運動的需要，運動學才形成理論力學中的一個獨立部份。

十九世紀末到二十世紀初期，隨着其他科學底發展，積累了許多現象，不是以牛頓定律為基礎的古典力學所能解釋的。於是，在愛因斯坦

底相對論基礎上產生了相對論力學。在相對論力學中，否定了古典力學中絕對空間和絕對時間底概念以及運動物體底質量與運動速度無關的概念。誠然，愛因斯坦在其哲學結論中表現了頗深的唯心論觀點，但這並不妨礙我們說：相對論力學確是力學發展過程中的一大進步，它比古典力學能解釋更多的自然現象。不過，計算證明，只有在物體運動速度接近於光速時，根據相對論力學所得的結果和根據古典力學所得的結果才有顯著的差別。至於在遠較光速為小的通常速度的情況下，這差別非常微小，在實用上可以不計。正因為如此，所以古典力學到今天並未失去其應有的價值，而在工程應用上以及天文學和物理學底某些部份中，還仍然是以較簡單的古典力學為依據（本書所討論的內容也只限於古典力學底範圍）。

在力學發展底過程中，俄國和蘇聯底科學家有着極其偉大的貢獻。除了前面提到的歐拉，在彼得堡三十年間的成就使他成為彼得堡學派（петербургская школа）底大師以外，還有米·伐·阿斯特洛格拉得斯基（1801-1861）在力學底解析方面獲得了不少的重要結果；巴·爾·切韋歇夫（1821-1894）在機構運動底解析理論上有很大的成就；尼·葉·茹科夫斯基（1847-1921）在空氣動力學上的貢獻及其在飛機設計上的應用使他不愧被稱為俄羅斯航空之父；阿·米·李亞普諾夫（1857-1918）所著的“關於運動底穩定性”一書，至今仍然是這方面的最前進最完備的一本書；依·符·麥歇爾斯基（1859-1935）是發表變質量質點底運動方程式的第一個人。

至於我國，遠在黃帝時代（距今四千六百年以前），我們的勞動人民就已經開始了耕作器械和車、船底製造與房屋底修建。到戰國時代，墨子在力學理論上的偉大貢獻，已如前述。與墨子同時代的大工程師公輸般（即魯班）在機械製造和建築結構上的偉大成就，更是大家所熟悉的。這些，都說明了力學在我國的發生與發展是很早的，而且在最初的階段上是超過西方的。

在墨子以後的兩千多年中，也有很多科學家和工程師在力學底應

用方面有不少的創造、發明和一些著作，其中比較著名的是：秦代李冰父子修建都江堰；漢朝張衡造地震儀；三國時代的魏國馬鈞造指南車與水車，並改造織機；南北朝時代的偉大數學家祖沖之造千里船和水碓磨；宋朝的燕肅發明“記里鼓車”，李仲明著“營造法式”；元朝郭守敬在水利工程和儀器製造上有極大的成就；明朝王徵製虹吸和自行車並著“諸器圖說”，徐光啓造天文儀器，宋應星著“天工開物”。這些創造、發明和著作，對於力學在工程上的應用都有重大的貢獻。但是，由於兩千多年來我國一直處於封建社會，近百餘年又處於半封建半殖民地社會，生產不能發展，科學底發展失去了生產實踐的基礎，加上頑固的封建思想底影響，科學沒有為廣大的人民羣衆所掌握，而科學研究也只限於少數人底個人活動，因此，雖然有上述的和別的一些科學家底努力和成就，但總的說來，力學理論底發展是遠遠落在西方國家之後了。

現在，對農業和資本主義工商業的社會主義改造已經基本完成。人民底生產力已經解放而且迅速發展了，科學已經不是少數人所私有而開始為人民大眾所掌握了。無可懷疑的，隨着今後大規模經濟建設底開展，生產水平還要不斷提高。力學和所有其他的科學一樣，必然會從這偉大的生產實踐中不斷地獲得豐富的資料來充實它的內容，使它在現有的基礎上更向前發展。

由於物體底機械運動在我們的周圍是隨處可以碰到的，因而理論力學的研究首先就有普通常識的教育意義，但這還不是最主要的目的。對於高等學校裏的同學們來說，研究理論力學的主要目的，一方面是為以後各專業課程打下基礎，而更重要的是訓練和培養同學們的分析能力。在學習理論力學這門課程的過程中，同學們可以學習怎樣分析問題，簡化工程問題，運用力學底基本原理並藉助於數學分析以解決問題，然後再對所得的結果加以討論。同時，從這裏還可以學會一些數字計算與圖解的方法。毫無疑問，作為祖國生產戰線上或科學研究上的一個工作者，必然將遇到，而且應該去發現，一些新的問題。豐富而深刻的力學知識，將會幫助我們去解決那些問題，以完成我們的光榮任務，同時並推動力學向前發展。

第一篇 靜力學

第一章

矢量算術

§ 1-1. 矢量

力學中要處理兩種量——標量與矢量。

凡是用一定的量度單位而僅由數值大小就可完全表示出來的量，稱為標量，亦稱為數量，或純量，或無向量。例如，時間用若干秒，距離用若干米，體積用若干立方米，就可把它們完全表明，因而都可當作標量看待。標量是代數量，可以是正量或負量，可對它們施行任何代數運算。

有一些量，除了須要用一定的量度單位由數值表示它們的大小以外，還必須標明它們的方向，才能完全表示出來。這種量稱為矢量，亦稱為向量。例如，力，速度，加速度等，僅僅說明它們是若干仟克，每秒若干米，每秒每秒若干米等，都是不夠的，還必須說明它們朝着什麼方向，所以都需要當作矢量看待。

矢量可以用一段帶有箭頭的直線段來表示(圖 1-1); 線段底長度依照一定的比例尺代表矢量底大小，線段底方位及箭頭底指向則表明矢量底方向。這樣的線段稱為矢。在應用問題中，常在矢字前面冠以它所代表的量底名稱，以示區別，如力矢，速度矢，等等。

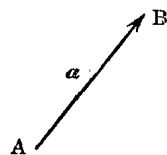


圖 1-1

矢量底大小(即矢底長度)稱為它的模。矢量底模是永遠作為正的標量來看待的。

爲了區別矢量與標量，本書中用粗斜體字母代表矢量，細斜體字母代表標量。並規定：如用某一粗斜體字母代表一矢量，則細斜體的同一字母就代表該矢量底大小或模。例如用 $\mathbf{a}$ 代表一個矢量，則 a 代表 $\mathbf{a}$ 底大小或模。有時也用兩個普通字母上面加一短劃來表示矢量，例如，矢量 $\mathbf{a}$ 可用 $\overline{AB}$ 表示（圖 1-1），其中 A 是矢底起點，B 是矢底終點。這樣就表示該矢量從 A 指向 B，而 AB （矢底長度）就代表 $\mathbf{a}$ 底大小 a 。

如某一矢量底模等於 1，則該矢量稱爲單位矢量，簡稱單位矢。

設有兩個矢量 $\mathbf{a}_1$ 及 $\mathbf{a}_2$ （圖 1-2），它們的大小相等，互相平行，而且具有相同的指向，則這兩個矢量稱爲相等的。用等式表示爲：

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2.$$

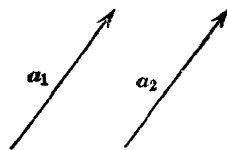


圖 1-2

在矢量等式裏，只表示兩個矢量底大小相等，方向相同，而不論它們的起點或終點底位置。因此，如果將一個矢量從原來的位置平行移動到新位置，仍然認爲它是與原來的矢量相等的。就是說，在矢量運算中，矢量是可以平行移動的。

如果兩個矢量 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 有下列的關係：

$$\mathbf{a} = -\mathbf{b},$$

這就表示 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 底大小相等，相互平行，但是指向相反。

§ 1-2. 矢量底和與差

設有矢量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ （圖 1-3）。從任一點 A 開始作 $\overline{AB}$ 等於 $\mathbf{a}_1$ ，從 $\overline{AB}$ 底終點 B 作 $\overline{BC}$ 等於 $\mathbf{a}_2$ ，從 $\overline{BC}$ 底終點 C 作 $\overline{CD}$ 等於 $\mathbf{a}_3$ ，從 $\overline{CD}$ 底終點 D 作 $\overline{DE}$ 等於 $\mathbf{a}_4$ ，再從最初一矢量 $\overline{AB}$ 底起點 A 向最後一矢量

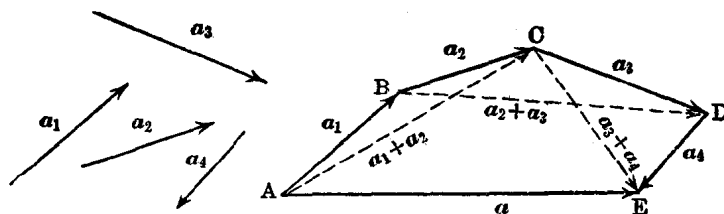


圖 1-3

$\overline{DE}$ 底終點 E 作矢量 $\overline{AE}$, 並命該矢量為 α , 則矢量 α 稱為矢量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 底和, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 則稱為分矢量, 或簡稱分量. 這種求矢量和的方法, 稱為矢量底合成或相加; 又因為是用幾何方法表示的, 所以亦稱為幾何加法, 而 α 亦稱為 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 底幾何和. 這種加法可用方程式表為:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4.$$

設有 n 個矢量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 它們底和等於 α , 則寫成

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \sum \alpha_i \textcircled{1}.$$

設將各矢量按照上述方法相加時, 最後一矢量底終點恰與最初一矢量底起點相合, 就表示這些矢量底和等於零. 用方程式表為:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0.$$

矢量底相加具有下列的性質:

(1) 適用交換律. 由圖 1-4 可見,

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \alpha_1 + \alpha_2$$

及 $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = \alpha_2 + \alpha_1,$

於是 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_1.$

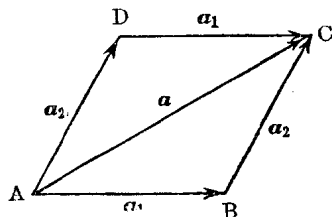


圖 1-4

這一性質說明, 幾何和與相加時所取各項底次序無關.

(2) 適用結合律, 由圖 1-3 可見,

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \overline{CE} = \overline{CD} + \overline{DE} = \alpha_3 + \alpha_4,$$

於是 $\overline{AE} = \overline{AC} + \overline{CE} = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4).$

又 $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = \alpha_2 + \alpha_3,$

而 $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DE} = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_4.$

但 $\overline{AE} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4,$

於是 $(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4.$

設有兩個矢量 α_1 及 α_2 (圖 1-5). 自任一點 A 作 $\overline{AB}$ 及 $\overline{AC}$ 各等於 α_1 及 α_2 , 從 C 向 B 作矢量 $\overline{CB}$, 並命該矢量為 α , 則 α 稱為 α_1 與

① 爲了簡便起見, 以後用 $\sum$ 代表 $\sum_{i=1}^{i=n}$.