高等分析近似方法

（上册）

Л. В. 康脫洛維奇
В. И. 克雷洛夫

科学出版社

高等分析近似方法

上册

Л. В. 康脱洛维奇
В. И. 克雷洛夫 著

何 奕 译

石 钟 慈 校

科学出版社

Л. В. КАНТОРОВИЧ и В. И. КРЫЛОВ
ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ
ВЫСШЕГО АНАЛИЗА
Изд. 5-ое
Гостехиздат
1962

内 容 简 介

本书论述求解各种数学物理问题的一些重要的近似方法．全书共七章，即：用无穷级数形式表示解的方法；富莱特荷蒙积分方程的近似解；网格法；变分方法；区域的保角变换；应用保角变换求解典型域的基本问题的原则；许瓦兹方法．

本书分上、下两册出版，上册包括前四章．

本书可供高等院校数学、力学、物理等专业师生、计算工作者以及有关工程技术人员参考．

高等分析近似方法

上 册

Л. В. 康脱洛维奇
В. И. 克 雷 洛 夫 著
何 奕 译
石 钟 慈 校

*

科 学 出 版 社 出 版
北京朝阳門内大街 137 号
北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1966 年 6 月第 一 版　　开本：850×1168 1/32
1966 年 6 月第一次印刷　　印张：12 5/16
印数：0001—3,200　　字数：324,000

统一书号：13031·2273
本社书号：3444·13—1

定价：[科六] 1.80 元

第五版序言

大量的自然科学问题与工程问题的研究，引出有关求解微分方程和微分方程边值问题、积分方程以及其他泛函方程的数学问题.

属于这个领域的经典教科书，基本上包括这些问题的理论研究及其在一些简单情况下的精确解析解. 但在实际中却常常遇到一些问题,其精确解是不能求得的或者精确解效用不大.

所以解数学物理问题的近似方法，特别是本世纪初发展起来的网格法与变分方法,工程师们是很感兴趣的,并且立刻得以广泛地推行. 近似方法的基本优点在于这些方法是普遍适用的和有效的,因为对于很多的情况近似解是可以求得的,并且在应用时所需要的计算是简单的、完全可以实现的.

近四十年来，在苏联近似方法得到很大的发展. 苏联学者们在深入研究已有方法的同时，还提出了一系列新方法. 参加这项主要由于自然科学与工程的需要而引起的工作的人员，除了数学家外,还有很多优秀的力学家与其他实际科学工作者.

发展数值方法的十分迫切的需要，是由于近代物理和新技术领域的发展所产生的新的复杂问题求解的需要而引起的. 电子计算机(由于有了电子计算机，数值算法的效率增长了很多倍)的出现也促进了有关数值方法的新发展以及它们的新途径的研究.

本书在 1936 年以"偏微分方程的近似解法 (Методы приближенного решения уравнений в частных производных)"为名第一次出版,看来它是论述这一问题的第一本教科书. 以后，本书以"高等分析近似方法 (Приближенные методы высшего анализа)" 为名印了好几版,这就更加适应于它的内容,因为书中除了偏微分方程外，还有积分方程与近似保角映射. 在再版时，增加了新的章节，

而有些章节还根本重写了．但本书还远不能包含这领域的全部问题，这里只考虑边界条件（对于椭圆型方程）问题，并且主要是线性的．

本版只是对前一版作了不大的修改．除了作了个别的修改和补充以外，主要是增添了有关文中所涉及到的一些问题的参考文献．近似方法的更完全的苏联文献可见："苏联数学四十年(Математика в СССР за сорок лет)"．第一、二、四章是康脱洛维奇（Л. В. Канторович）写的，第三、五、六、七章是克雷洛夫(В. И. Крылов)写的．除了第六章与第五章有关外，其他各章是彼此无关的．

Л. В. 康脱洛維奇

В. И. 克雷洛夫

目　　录

第 一 章

用无穷級数形式来表示解的方法

§1. 福里叶方法

福里叶方法是求解数学物理问题的一个基本的和最广泛使用的方法．用这方法求得的解通常是无穷级数的形式，在很多情况下这个级数收斂得很快，因此福里叶方法也就常常可以用来求所需要的数値结果；这级数的一段给出问题的近似解．我们假定读者已经了解用福里叶方法求解数学物理问题，例如用福里叶方法求解弦线的问题[1)]．所以我们不拟在这里很完整地和详细地叙述这个方法，而仅考虑它在与椭圆型方程主要是与拉普拉斯方程有关的一些问题中的应用．

1. 矩形的狄里赫莱问题． 拉普拉斯方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

是最简单最基本的椭圆型偏微分方程．这个方程的解，如果是连续函数并有连续的一阶和二阶偏导数，则称它为调和函数．

拉普拉斯方程的第一基本问题就是狄里赫莱问题．这问题可以表述如下：求函数 u，它在已知区域 D 中是调和的，并在包围区域 D 的周线 L 上取已知数值．如果周线 L 的方程用参数形式给出：$x=x(s)$，$y=y(s)$，于是边界条件可以写为，例如，

$$u[x(s),\ y(s)]=f(s),$$

此处 $f(s)$ 是已知函数，我们简写为

1) 参阅 В. И. Смирнов [1]，第二卷；R. Courant 和 D. Hilbert [1]；С. Л. Соболев [1]；И. Г. Петровский [1]；В. И. Левин 和 Ю. И. Гросберг [1].

$$u=f(s) \quad 在 L 上.$$

我们指出一点注意，这对于我们以后将有用处. 如果函数$f(s)$是二函数之和，即 $f(s)=f_1(s)+f_2(s)$，于是，显然可见只要求得解 u_1 与 u_2，它们在 L 上相应地等于 $f_1(s)$ 与 $f_2(s)$，这样 $u=u_1+u_2$ 就是问题所需要的解，它在 L 上等于 $f(s)$.

我们现在来求下列情况的狄里赫莱问题的解：区域 D 是具有边长 a 与 b 的矩形 $ABCD$. 我们象图 1 那样选择坐标轴，即横坐标轴取水平中线，而纵坐标为矩形的左边.

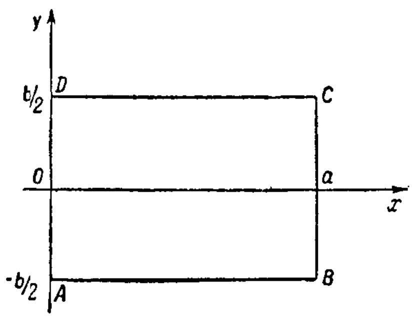

图 1

一般的狄里赫莱问题在这里就是求一调和函数，这函数在矩形的边上等于已知的任意函数. 因而，边界条件可以写为：

$$\left.\begin{array}{l} u=\begin{cases}\varphi_1(x) & 当\ y=\dfrac{b}{2},\\ \varphi_2(x) & 当\ y=-\dfrac{b}{2},\end{cases}\\ u=\begin{cases}\psi_1(y) & 当\ x=0,\\ \psi_2(y) & 当\ x=a.\end{cases}\end{array}\right\} \tag{2}$$

这问题的解可以作为二个更简单问题的解之和 u_1+u_2：

$$u_1=\left\{\begin{array}{ll}\varphi_1(x) & 当\ y=\dfrac{b}{2},\\ \varphi_2(x) & 当\ y=-\dfrac{b}{2},\\ \quad 0 & 当\ x=0\ 和\ x=a;\end{array}\right\} \tag{3}$$

$$u_2=\left\{\begin{array}{ll}\psi_1(y) & 当\ x=0,\\ \psi_2(y) & 当\ x=a,\\ \quad 0 & 当\ y=\pm\dfrac{b}{2}.\end{array}\right\} \tag{3'}$$

这两个问题是比较简单的，因为其中有在两边上为零的条件．这两问题没有本质上的差别，从其中一个问题的解可以很容易推出另一问题的解，所以我们只详细地讨论求函数 u_1 的问题．

我们用福里叶方法解这问题．首先找具有下列形式的基本解：

$$u=X(x)\cdot Y(y), \tag{4}$$

这解满足拉普拉斯方程(1)，并且只满足条件(3)的最后一个．

把(4)代入拉普拉斯方程后，我们求得

$$\left.\begin{aligned} &X''Y+Y''X=0 \\ \text{或}\quad &\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=k, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

式中 k 为某个常数，这是由于两式 $\frac{X''}{X}$ 和 $\frac{Y''}{Y}$ 应该等于常数，因为仅在这种情况下，一个与 x 有关的函数才可以恒等于一个与 y 有关的函数．为了求得函数 X，我们从(5)得到二阶方程

$$X''-kX=0, \tag{6}$$

而要由等式(4)所确定的函数 u 满足条件(3)的最后一个，则函数 $X(x)$ 应满足条件

$$X(0)=X(a)=0. \tag{7}$$

我们要求出方程(6)满足条件(7)的解．如令[1] $k=-\lambda^2$，则方程(6)的通解为

$$X(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x.$$

从条件(7)得出

$$C_1=0;\ C_1\cos\lambda a+C_2\sin\lambda a=0,$$

因此一定要有 $C_1=0$，而 C_2 只是在条件

$$\sin\lambda a=0 \tag{8}$$

下才有可能取成不等于零，也就是 λa 是 π 的整数倍

$$\lambda a=n\pi \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots);$$

---

1) 也可以考虑正值的 k，但是它们不能给出任何异于零的解．事实上，如果令 $k=\lambda^2$，我们就求得 $X(x)=C_1\operatorname{ch}\lambda x+C_2\operatorname{sh}\lambda x$，要使初始条件(7)满足，就必须取 $C_1=C_2=0$，即我们不能得到任何非平凡解．

这里 n 不取非正数，因为取非正值并没有给出新解. 于是当 $\lambda=\frac{n\pi}{a}$ 时，我们得到解

$$X(x)=C\sin\frac{n\pi x}{a} \qquad (n=1,2,\cdots). \tag{9}$$

将 $k=-\lambda^2=-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ 代入(5)，我们得到关于 Y 的方程

$$Y''-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y=0. \tag{9'}$$

解这方程，我们求得

$$Y=C_1^* e^{\frac{n\pi}{a}y}+C_2^* e^{-\frac{n\pi}{a}y}=C_1\operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}y+C_2\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}y, \tag{10}$$

式中 C_1 与 C_2 为任意常数.

由于(9)和(10)，最后可以将基本解(4)写为

$$u=\left(A\operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}y+B\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}y\right)\sin\frac{n\pi}{a}x, \tag{11}$$

式中 A 与 B 仍然是任意常数.

现在问题的解，即函数 u_1，可以以基本解的和的形式去找:

$$u_1=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}y+B_n\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}y\right]\sin\frac{n\pi}{a}x. \tag{12}$$

这函数满足拉普拉斯方程(1)和条件(3)的最后一个，剩下的是要选定常数 A_n 和 B_n，使得这函数能满足条件(3)的前两个. 根据这些条件，我们可写出下列等式:

$$\left.\begin{aligned} u_1\Big|_{y=\frac{b}{2}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}+B_n\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{2a}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x=\varphi_1(x),\\ u_1\Big|_{y=-\frac{b}{2}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}-B_n\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{2a}\right]\sin\frac{n\pi}{a}x=\varphi_2(x). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

另一方面，把 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 在区间 $(0,a)$ 中按 $\sin\frac{n\pi}{a}x$ 展成级数，我们有

$$\varphi_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^{(1)}\sin\frac{n\pi x}{a};\quad \varphi_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^{(2)}\sin\frac{n\pi x}{a}, \tag{14}$$

式中

$$\beta_n^{(1)}=\frac{2}{a}\int_0^a \varphi_1(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx;\ \beta_n^{(2)}=\frac{2}{a}\int_0^a \varphi_2(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx. \tag{15}$$

比较级数(13)与(14)的系数，我们得到

$$\left.\begin{aligned}A_n\operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}+B_n\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{2a}=\beta_n^{(1)};\\ A_n\operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}-B_n\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{2a}=\beta_n^{(2)}.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

如果从这些等式确定出 A_n 与 B_n，并把它们代入(12)，则我们最后求得 u_1:

$$u_1=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\beta_n^{(1)}+\beta_n^{(2)}}{2\operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}}\operatorname{ch}\frac{n\pi y}{a}+\frac{\beta_n^{(1)}-\beta_n^{(2)}}{2\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{2a}}\operatorname{sh}\frac{n\pi y}{a}\right]\sin\frac{n\pi x}{a}. \tag{17}$$

在矩形内任何一点，这级数的确是收敛的，因为可积函数的福里叶系数 $\beta_n^{(1)}$ 与 $\beta_n^{(2)}$ 趋于零，而比值

$$\frac{\operatorname{ch}\frac{n\pi y}{a}}{\operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}};\qquad \frac{\operatorname{sh}\frac{n\pi y}{a}}{\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{2a}}$$

与数量 $e^{n\frac{\pi}{a}\left(|y|-\frac{b}{2}\right)}$ 是同阶的；又因 $|y|<\frac{b}{2}$，所以 u_1 的级数象公比为 $e^{\frac{\pi}{a}\left(|y|-\frac{b}{2}\right)}$ 的几何级数那样收敛.

应该指出，系数 $\beta_n^{(1)}$ 与 $\beta_n^{(2)}$ 递减的迅速程度，对于级数(17)收敛的迅速程度，特别在周线附近 $\left(\text{这时}|y|\text{接近于}\frac{b}{2}\right)$ 一些点上，具有重要的意义. 这一事实给出改善级数 (17) 的收敛性的途径[参考 § 5].

由于级数(17)的快速收敛性，u_1 导数的级数也将是收敛的，并且可以逐项微分. 又因每一项都是拉普拉斯方程(1)的解，所以函数 $u_1(x, y)$ 满足拉普拉斯方程(1). 其次，如果 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 是连续的，则可以证明 $u_1(x, y)$ 趋近于周线时的极限值将是由条件(3)所表示的值. 因此，所求得的函数 u_1 满足所提出的一切条件.

要求出函数 u_2 就必须解条件（3′）下的拉普拉斯方程．但是，利用下列公式引入坐标变换

$$x'=y+\frac{b}{2};\ y'=x-\frac{a}{2},$$

我们可把条件（3′）化为（3），只是在这种情况下数 a 将与数 b 互换，而 φ_1 与 φ_2 将改为 ψ_1 与 ψ_2. 所以当利用了公式（17），再把变数改写为 x 与 y 后，我们得到函数 u_2 的解形式如下：

$$u_2=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\delta_n^{(1)}+\delta_n^{(2)}}{2\operatorname{ch}\frac{n\pi a}{2b}}\operatorname{ch}\frac{n\pi}{b}\left(x-\frac{a}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\delta_n^{(1)}-\delta_n^{(2)}}{2\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{2b}}\operatorname{sh}\frac{n\pi}{b}\left(x-\frac{a}{2}\right)\right]\sin\frac{n\pi}{b}\left(y+\frac{b}{2}\right),\tag{18}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\delta_n^{(1)}&=\frac{2}{b}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\psi_1(y)\sin\frac{n\pi}{b}\left(y+\frac{b}{2}\right)dy;\\ \delta_n^{(2)}&=\frac{2}{b}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\psi_2(y)\sin\frac{n\pi}{b}\left(y+\frac{b}{2}\right)dy.\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

将解(17)与(18)相加，我们就得到所提问题的完全解——函数 u. 应当注意，如果 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$［相应地 $\psi_1(y)$ 与 $\psi_2(y)$］彼此相等，则函数 u_1 与 u_2 的表达式可以简化. 例如，当 $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)=$ $=\varphi(x)$ 时，则

$$\beta_n^{(1)}=\beta_n^{(2)}=\beta_n=\frac{2}{a}\int_0^a\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx,$$

而 u_1 的表达式具有形式

$$u_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n\operatorname{ch}\frac{n\pi y}{a}}{\operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}}\sin\frac{n\pi x}{a}.\tag{20}$$

用同样的方法也可以求得矩形情况的第二基本边值问题（诺伊曼问题）的解.

诺伊曼问题一般是这样提的：求在区域 D 中的调和函数 u，这函数的法向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$（即沿周线的法线方向上的导数）在周线 L 上具有已知数值，即

$$\frac{\partial u}{\partial n}=f_1(s) \quad \text{在 } L \text{ 上}. \tag{21}$$

与狄里赫莱问题比较，诺伊曼问题具有几个特点. 第一，这种问题没有唯一解，因为很明显，当我们在诺伊曼问题的某一解上加一任意常数，则又是一个解. 第二，函数 $f_1(s)$ 是不能任意取的，因为根据调和函数的已知特性，它的法向导数沿闭周线的积分应等于零[1)]，

$$\int_L \frac{\partial u}{\partial n}\, ds=\int_L f_1(s)\, ds=0. \tag{22}$$

现在回到矩形的情况. 所用的标记与坐标系统和狄里赫莱问题中所用的相同. 和狄里赫莱问题一样，我们可以把一个问题分为二个，并且在每一种情况下，二个边上的条件都为零.

对于函数 u_1，我们有条件

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}=\begin{cases}\chi_1(x) & \text{当 } y=\frac{b}{2},\\ \chi_2(x) & \text{当 } y=-\frac{b}{2},\end{cases} \tag{23}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=0 \quad \text{当 } x=0;\ x=a.$$

我们用福里叶方法解这问题. 找形式为 $u=XY$ 的解，对于 $X(x)$，这里将条件(7)换为

$$X'(0)=X'(a)=0. \tag{24}$$

根据这条件，用上面同样的方法可以得到 $\lambda=\frac{n\pi}{a}$，以及

$$X=\cos\frac{n\pi}{a}x \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots). \tag{25}$$

---

1) 参阅 B. И. Смирнов [1]，第二卷，第 574 页. 那里只对区域内部的周线证明了这等式，但是用取极限的办法，就可得到对于边界周线的等式.

于是，对于 u_1，我们求得的不是(12)而是下列级数

$$u_1=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\operatorname{ch}\frac{n\pi y}{a}+B_n\operatorname{sh}\frac{n\pi y}{a}\right]\cos\frac{n\pi}{a}x+A_0y+B_0; \qquad (26)$$

最后一项 A_0y+B_0 是相应于 $n=0$ 时方程(9′)的解。

利用(23)的前两个条件可以确定出常数 A_n 与 B_n。根据这些条件和级数(26)，我们写出

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=\frac{b}{2}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{a}\left[A_n\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{2a}+B_n\operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}\right]\cos\frac{n\pi}{a}x+A_0=\chi_1(x),\\ \left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=-\frac{b}{2}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{a}\left[-A_n\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{2a}+B_n\operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}\right]\cos\frac{n\pi}{a}x+A_0=\chi_2(x).\end{aligned}\right\}(27)$$

我们用 $\alpha_n^{(1)}$ 与 $\alpha_n^{(2)}$ 表示 $\chi_1(x)$ 与 $\chi_2(x)$ 按 $\cos\frac{n\pi}{a}x$ 展成级数时的福里叶系数：

$$\left.\begin{aligned}\alpha_n^{(1)}&=\frac{2}{a}\int_0^a\chi_1(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx,\\ \alpha_n^{(2)}&=\frac{2}{a}\int_0^a\chi_2(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx.\end{aligned}\right\}\quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots)$$

现在如果比较等式(27)两边 $\cos\frac{n\pi x}{a}$ 的系数，则我们求得决定 A_n 与 B_n 的方程组：

$$\left.\begin{aligned}A_n\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{2a}+B_n\operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}&=\frac{a}{n\pi}\alpha_n^{(1)},\\ -A_n\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{2a}+B_n\operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}&=\frac{a}{n\pi}\alpha_n^{(2)}.\end{aligned}\right\}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)\quad (27')$$

当 $n=0$ 时，我们从等式(27)直接得到

$$A_0=\frac{\alpha_0^{(1)}}{2},\quad A_0=\frac{\alpha_0^{(2)}}{2}.$$

只当 $\alpha_0^{(1)}=\alpha_0^{(2)}$ 时，最后的二等式才能成立。在这一条件下，有 $A_0=\frac{\alpha_0^{(1)}}{2}=\frac{\alpha_0^{(2)}}{2}=\frac{\alpha}{2}$。从方程组(27′)决定出 A_n 与 B_n，再把所得的值代入(26)，我们最后得到

$$u_1=\frac{\alpha}{2}y+B_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\alpha_n^{(1)}-\alpha_n^{(2)}}{\frac{2n\pi}{a}\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{2a}}\operatorname{ch}\frac{n\pi y}{a}+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}}{\frac{2n\pi}{a}\operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}}\operatorname{sh}\frac{n\pi y}{a}\right]\cos\frac{n\pi x}{a}. \tag{28}$$

求解过程本身就已经表明了上面所指出的诺伊曼问题的特点：第一，在解中有一任意常数 B_0；第二，我们有附加条件 $\alpha_0^{(1)}-\alpha_0^{(2)}=0$. 这条件不是别的，正是对于所考虑问题的条件（22）. 事实上

$$\alpha_0^{(1)}-\alpha_0^{(2)}=\frac{2}{a}\int_0^a \chi_1(x)\,dx-\frac{2}{a}\int_0^a \chi_2(x)\,dx=$$

$$=\frac{2}{a}\left[\int_{DC}\frac{\partial u_1}{\partial y}dx-\int_{AB}\frac{\partial u_1}{\partial y}dx\right]=-\frac{2}{a}\int_L\frac{\partial u_1}{\partial n}ds,$$

因为在其它两边上积分等于零. 因此条件 $\alpha_0^{(1)}-\alpha_0^{(2)}=0$ 相当于（22）.

用类似的方法可以提出并且解决关于确定第二部分 u_2 的问题.

还须注意，福里叶方法也能用来求解下面情况的问题：在某些边上给出未知函数本身，而在另些边上给出它的法向导数，或给出函数和它的法向导数的线性组合.

求解矩形的拉普拉斯方程的基本边值问题的可能性，在很多情况下使得**布阿松方程**

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y) \tag{29}$$

的基本边值问题可以求解.

事实上，为了明确起见，我们研究狄里赫莱问题：在 L 上 $u=\varphi(s)$. 假定我们已经求得布阿松方程 $\Delta u_0=f$ 的某一特解 $u_0(x,y)$，于是引入新的未知函数

$$u_1(x,y)=u(x,y)-u_0(x,y).$$

函数 $u_1(x,y)$ 应满足拉普拉斯方程，因为