

地震学的数学问题

[瑞典] M. 巴特 著

科学出版社

地震学的数学问题

[瑞典] M. 巴 特 著

郑 治 真 译

朱 传 镇 校

科 学 出 版 社

1 9 7 6

2/66/01

内 容 简 介

本书是地震学方面的数学工具书，全书共分四部分。第一部分为二、三、四章，介绍积分、微分的基础理论。第二部分为五、六、七章，介绍特殊函数。第三部分为八、九、十、十一章，介绍地震学的一些数学方法。最后一部分为一些经典问题和重要方法在地震学中的应用。

本书可供地震工作人员、地球物理工作者和大专院校有关专业师生参考。

M. BATH

MATHEMATICAL ASPECTS OF SEISMOLOGY

Developments In Solid Earth Geophysics 4

Elsevier Publishing Company Amsterdam-London-New York 1968

地 震 学 的 数 学 问 题

[瑞典] M. 巴 特 著

郑 治 真 译

朱 传 镇 校

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1976 年 10 月 第 一 版 开本: 787 × 1092 1/32

1976 年 10 月 第一次印刷 印张: 15 7/8

印数: 0001—7,770 字数: 358,000

统一书号: 13031 · 478

本社书号: 713 · 13—15

定 价: 1.62 元

译者的话

在毛主席关于“抓革命，促生产，促工作，促战备”的伟大战略方针指引下，一个攀登地震预报科学高峰的群众运动，正在全国轰轰烈烈地展开，为了适应地震队伍迅速发展的需要，我们遵照毛主席关于“洋为中用”的教导，翻译出版了《地震学的数学问题》一书，以供参考。

本书是基础理论参考书，一半内容是介绍理论地震学所需要的应用数学，一半内容是对地震学的各种应用。阅读对象为一般地震工作者。与同类的理论书籍比较，本书有自己的特点：第一，具有教科书的特点，在内容方面按教科书性质编写的，同时给出了必要的推导和提示，因而适于自修阅读；其次，书中结果多为各种文献的综合，并给出了必要的数学知识，因而不需查阅大量原始文献；再次，系统地介绍了地震研究工作中常用的数理方法，如特殊函数、波动方程、兰姆问题、稳相法和最速落径法、矩阵计算等。这本书的缺点是，内容方面缺少波谱分析、统计数学、震源方面的位错理论和有限移动源等问题，并缺少大量的参考文献。

由于译者的水平有限，难免有错误和不妥之处，望同志们提出宝贵意见。

前 言

一般的地震学大学生的数学知识满足不了阅读更近代的教科书或有关方面的原始文献的要求,例如地震学各部分中很基本的贝塞耳(Bessel)函数就不包括在一般的数学课程中.编写本书的目的就是要克服大学生数学上的不足.对于要阅读象伊文(Ewing, Jardetzky and Press 1957)或者布列赫夫斯基赫(Brekhovskikh 1960)所著的一类书籍的读者,书中提供了几乎全部所需要的数学,因而读者无需不断地查阅原始文献.

假定读者具有地震工作者通常所需要的数学基础,以及波的传播现象和有关理论地震学的某些知识.由这个知识水平出发,给出了为现代研究、特别是理论地震学方面所需要的应用数学.因此,书中一半内容是应用数学,其余部分是对地震学问题的各种应用.虽然我们的直接目的是为了地震学的需要,但是大部分内容对应用数学方面的大学生也有用.

本书最主要目的是为理论地震学中最现代部分的研究提供便利.因此象下面题目给出的一些或者直接与观测地震学相联系,或者具有基础数学知识就很易掌握的内容,就没有包括在内.书末给出了以下几方面的文献目录:

- (1) 地图投影: 凯拉韦(Kellaway, 1946).
- (2) 向量与张量计算: 马吉努(Margenau and Murphy, 1943), 朱斯(Joos, 1956).
- (3) 球面三角: 斯马特(Smart, 1936).
- (4) 观测资料的统计处理: 利维(Levy and Preidel,

1945), 费希尔 (Fisher, 1950), 布莱克曼 (Blackman and Jukey, 1958), 鲁宾逊 (Robinson, 1967).

这些题目和参考书是仅作为例子给出的, 其数目很多.

全书共分为四部分, 计十四章. 在编排书的内容时, 数学内容放在前面, 地震学方面的应用部分放在各节的末尾, 但是某些应用更广泛的数学方法放在第四部分.

在编写过程中, 参考了大量的原文, 一般地说, 这里给出的结果是已查到的种种文献的综合.

M. 巴特

目 录

前言

第一章 绪论	(1)
1.1 数学物理微分方程	(1)
1.2 坐标变换	(3)
1.2.1 波动方程中的应用	(6)
1.2.2 参与计算的不同函数的举例	(11)
1.3 伽玛(gamma)和倍塔(beta)函数	(12)

第一部分 积分方法

第二章 迴路积分和保角变换	(19)
2.1 复平面中的迴路积分	(19)
2.1.1 曲线积分	(23)
2.1.2 斯笃克斯(Stokes)定理	(24)
2.1.3 柯西(Cauchy)定理	(25)
2.1.4 有理函数	(26)
2.1.5 迴路积分定理、留数计算	(32)
2.2 保角变换	(41)
2.2.1 交互变换: 无穷远点	(45)
2.2.2 双线性变换或麦比乌斯(Möbius)变换	(46)
2.2.3 变换 $w = z + k^2/z$, k 是正实数	(48)
2.2.4 变换 $w = \log z$	(49)
2.2.5 变换 $w = \cosh z$	(50)
2.2.6 连续变换, 例: $w = \operatorname{tg}^2(1/4\pi\sqrt{z})$	(50)
2.2.7 半平面到多边形的变换(施瓦兹-克利斯多菲	

变换)(Schwarz-Christoffel)	(51)
2.2.8 保角变换应用小结	(52)
第三章 稳相法和最速落径法	(54)
3.1 稳相法(或稳相原则)	(54)
3.1.1 初始扰动波(位移或脉冲)沿水面的传播	(56)
3.1.2 地震面波	(59)
3.1.3 频散波的横折射	(60)
3.2 最速落径法	(62)
3.2.1 瓦特逊(Watson)引理	(62)
3.2.2 最速落径法	(63)
3.2.3 最速落径法的应用	(67)
3.2.4 最速落径法与稳相法的比较	(71)
3.3 埃里(Airy)积分	(72)
3.3.1 定义	(72)
3.3.2 级数展开	(74)
3.3.3 渐近表示式	(78)
3.3.4 应用	(80)
第四章 级数积分	(83)
4.1 基本概念	(83)
4.1.1 级数积分法应用的限制	(86)
4.1.2 朗斯基或朗斯基(Wronskian)行列式	(88)
4.2 勒让德(Legendre)微分方程	(89)
4.2.1 物理上的应用	(96)
4.2.2 $P_n(x)$ 和 $Q_n(x)$ 之间的关系	(96)
4.3 贝塞耳(Bessel)微分方程	(99)
4.3.1 朗斯基行列式在贝塞耳微分方程中的应用	(106)
4.3.2 勒让德方程和贝塞耳方程之间关系	(107)
4.4 埃尔米特(Hermite)微分方程	(108)
4.5 拉盖尔(Laguerre)微分方程	(112)

4.5.1	缔合拉盖尔多项式和拉盖尔函数	(114)
4.5.2	拉盖尔函数的地震学应用	(115)
4.6	高斯(超越几何)微分方程——惠特 (Whittaker) 函数	(117)
4.6.1	向勒让德方程的变换	(120)
4.6.2	车比雪夫(Tschebyscheff)多项式	(121)
4.6.3	雅可比(Jacobi)多项式	(121)
4.6.4	组合超越几何函数	(122)
4.6.5	惠特函数	(123)
4.6.6	韦伯(Weber)函数	(128)
4.6.7	向波动方程的变换	(129)
4.7	非均匀各向同性介质的乐夫(Love)波	(131)

第二部分 特殊函数

第五章	贝塞耳函数	(136)
5.1	贝塞耳函数的起源	(136)
5.2	贝塞耳系数的性质	(139)
5.2.1	一个重要定理	(139)
5.2.2	贝塞耳系数的循环关系	(142)
5.2.3	贝塞耳系数的级数展开	(144)
5.2.4	贝塞耳系数的积分表示式	(147)
5.2.5	贝塞耳系数的加法公式	(152)
5.2.6	含有贝塞耳函数的积分	(153)
5.2.7	贝塞耳级数展开。傅里叶-贝塞耳积分	(155)
5.3	广义贝塞耳函数	(159)
5.3.1	零阶汉克尔(Hankel)函数	(159)
5.3.2	球面贝塞耳函数	(164)
5.3.3	修正贝塞耳函数	(166)
5.3.4	ber 和 bei 函数	(171)
5.3.5	贝塞耳函数的渐近表示式	(172)

5.4 贝塞耳和汉克尔函数的应用	(176)
5.4.1 声学重力波	(176)
5.4.2 圆锥形压缩波	(180)
5.4.3 非均匀半空间波的反射	(183)
第六章 勒让德函数	(189)
6.1 勒让德多项式	(189)
6.1.1 勒让德多项式的性质	(190)
6.1.2 正交系	(194)
6.1.3 勒让德级数展开	(196)
6.1.4 洛得利格(Rodrigues)公式	(197)
6.1.5 勒让德多项式的循环关系	(198)
6.1.6 $P_n(z)$ 的斯列夫利(Schlaflf)积分	(200)
6.2 勒让德函数	(200)
6.2.1 第一类勒让德函数	(200)
6.2.2 第二类勒让德函数	(202)
6.2.3 费勒(Ferrer)缩合勒让德函数	(203)
6.2.4 缩合勒让德函数的积分性质	(204)
6.3 勒让德函数的应用	(208)
6.3.1 勒让德函数表示的拉普拉斯方程的解。 球调和函数	(208)
6.3.2 勒让德函数表示的波动方程解	(211)
6.3.3 勒让德函数的一些其它地球物理应用	(212)
第七章 波动方程	(214)
7.1 波动方程的一般研究	(214)
7.1.1 平面波	(215)
7.1.2 球面波	(216)
7.1.3 分离变量	(217)
7.2 波动方程的空间形式解	(218)
7.2.1 一维	(218)
7.2.2 二维	(219)

7.2.3	三维	(221)
7.2.4	结束语	(228)
7.3	球面波展开为平面波: 索末菲(Sommerfeld) 积分	(229)
7.4	波动方程的基尔霍夫(Kirchhoff)解	(235)
7.4.1	泊松(Poisson)公式	(244)
7.4.2	亥姆霍兹(Helmholtz)公式	(245)
7.4.3	基尔霍夫公式的推广	(246)
7.5	特殊函数及特殊微分方程的共同特征	(247)
7.5.1	母函数	(247)
7.5.2	斯特姆-刘维尔(Sturm-Liouville)定理	(251)
7.5.3	从一个微分方程到另一个方程的推导	(253)
7.5.4	数学物理偏微分方程	(253)

第三部分 数学方法选

第八章	积分变换	(255)
8.1	拉普拉斯(Laplace)变换和傅里叶(Fourier) 变换介绍	(255)
8.1.1	积分变换的定义	(255)
8.1.2	傅里叶积分公式	(256)
8.1.3	反演公式	(258)
8.1.4	拉普拉斯变换在微分方程中的应用	(263)
8.1.5	傅里叶变换的应用	(267)
8.1.6	有限变换	(271)
8.2	应用拉普拉斯变换解微分方程	(275)
8.2.1	常数线性常微分方程	(276)
8.2.2	拉普拉斯变换的一些定理	(278)
8.2.3	拉普拉斯变换反演定理. 借助复平面中迴路 积分计算反演公式	(282)
8.2.4	线性偏微分方程	(285)

8.2.5	薄膜的受迫振动	(287)
8.2.6	热辐射流	(294)
8.2.7	半无限固体中的热流	(297)
8.3	脉冲函数	(299)
8.3.1	狄拉克 δ -函数	(299)
8.3.2	δ -函数在卷积公式中的应用	(304)
8.3.3	平面边界处的地震波	(310)
8.3.4	超临界角入射的脉冲反射	(315)
8.4	卡格尼阿(Cagniard)法	(320)
8.4.1	方法概述	(320)
8.4.2	对无限介质中球面空腔源的应用	(322)
8.4.3	结束语和对任意源函数的推广	(337)
第九章 矩阵计算		(341)
9.1	引言	(341)
9.2	瑞利波的哈斯开尔(Haskell)矩阵法	(342)
9.2.1	波在任意多层构造中的传播	(342)
9.2.2	位移和应力	(346)
9.2.3	边界条件和它们的解	(347)
9.2.4	垂直位移和水平位移间的相位差	(353)
9.2.5	长波的渐近形式	(355)
9.2.6	短波的渐近形式	(356)
9.2.7	液体层的矩阵 a_m	(360)
9.3	乐夫波	(362)
9.4	体波在多层介质中的传播	(364)
第十章 变分计算		(366)
10.1	变分计算基础	(366)
10.1.1	一个独立变量和一个因变量	(366)
10.1.2	一个独立变量和数个因变量	(368)
10.1.3	数个独立变量和一个因变量	(370)

10.1.4	高阶导数	(371)
10.1.5	特殊情况中尤拉方程的解	(372)
10.1.6	附属或者辅助条件。拉格朗日 (Lagrange) 未定乘子法。等周问题	(373)
10.2	变分计算的应用	(375)
10.2.1	变分问题得到的斯特姆-刘维尔方程	(375)
10.2.2	地震体波传播的变分问题	(376)
10.2.3	运动的变分方程	(381)
第十一章	积分方程	(385)
11.1	积分方程的定义和解	(385)
11.1.1	定义	(385)
11.1.2	特殊类型积分方程的解	(386)
11.1.3	傅里叶和拉普拉斯变换	(391)
11.1.4	微分方程和积分方程的关系	(391)
11.2	地震射线理论中的应用	(394)
11.2.1	阿贝耳 (Abel) 积分方程的解	(394)
11.2.2	地球内部速度分布的确定	(397)

第四部分 一些地震学应用

第十二章	兰姆 (Lamb) 问题	(401)
12.1	各向同性弹性固体中的二维问题 (面源, 线源)	(401)
12.1.1	引言 (无限弹性固体)	(401)
12.1.2	无限弹性固体中作用在 $y=0$ 平面上的周期 力 (或者作用在 $y=0$ 的薄层上)	(405)
12.1.3	无限弹性固体中作用于 $x=0, y=0$ 线上的 集中力	(406)
12.1.4	作用于半无限弹性固体表面上的垂直力	(411)
12.1.5	沿着 $x=0, y=0$ 线作用于半无限弹性固体 表面的垂直力	(412)

12.1.6	作用于半无限弹性固体表面的切向力	(413)
12.1.7	无限弹性固体中保持平面 $y=0$ 无应力条件下 的三个线源的情况	(415)
12.1.8	位移积分解的计算	(418)
12.2	各向同性弹性固体中的三维问题 (体源, 点源)	(429)
12.2.1	绪论	(429)
12.2.2	无限弹性固体中作用于 $z=0$ 平面上的周期力 (面源)	(434)
12.2.3	无限弹性固体中沿 z 轴作用的周期力(点源)	(435)
12.2.4	作用于半无限弹性固体表面的周期力(面源)	(436)
12.2.5	作用在源处的集中垂直压力(点源)	(437)
12.2.6	积分解的计算	(437)
12.3	三维情况中的任意时间变化	(441)
第十三章	波在液体中的传播	(446)
13.1	波在两个半空间液层中的传播	(446)
13.1.1	位移位移积分解的推导	(446)
13.1.2	积分解的计算	(450)
13.1.3	远距离处的解	(457)
13.1.4	对脉冲的推广	(458)
13.2	速度随深度变化的液体半空间中波的传播	(462)
第十四章	重力对波传播的影响	(469)
14.1	数学引论	(463)
14.2	体波	(475)
14.2.1	微分方程的推导	(475)
14.2.2	用体膨胀表示的微分方程的解	(477)
14.2.3	用位移表示的解	(478)
14.2.4	引入压力消除积分常数 C	(479)
14.2.5	[19]式的解	(480)
14.2.6	解[26]式的讨论	(481)
14.3	面波	(488)
参考文献		(490)

第一章 绪 论

1.1 数学物理微分方程

主要的数学物理微分方程可归纳为几种简单类型，这些类型之间紧密地联系着，然而与这些方程类型有关的物理问题之间却存在着显著的差异。在处理这些类型方程的求解问题时，很方便的是能够把它们统一进行考虑。

本节中仅形式上比较这些方程；而不涉及其细节，例如所采用的符号的意义等。我们由称为电报方程的方程类型出发，此方程适用于电报导线中电流或张力波的传播，然而电报方程却是从其它领域中归纳出来的（例如，大气学方面）：

$$a \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + b \frac{\partial \psi}{\partial t} + c \nabla^2 \psi = -ce \quad [1]$$

∇^2 是拉普拉斯算子（ $\nabla =$ 倒 δ 或 nabra），有时也记为 Δ ； a 、 b 、 c 是常数， t 是时间， e 为源或尾间。

方程[1]是一般型方程，由它可给出一系列的特殊情况：

(1) $a=0$ ；取 $c/b = -g^2$ ；

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - g^2 \nabla^2 \psi = g^2 e \quad e \neq 0 \quad [2]$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - g^2 \nabla^2 \psi = 0 \quad e = 0 \quad [3]$$

这是热传导方程，[2]式中具有源或尾间，[3]式中没有。

(2) 给定 $b=0$ ，取 $c/a = -v^2$ ；

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - v^2 \nabla^2 \psi = v^2 e \quad e \neq 0 \quad [4]$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - v^2 \nabla^2 \psi = 0 \quad e=0 \quad [5]$$

这是波动方程, [4]式具有源或尾闾, [5]式中没有, 这类方程适用于声波(或者一般的弹性波), 弦或膜的位移, 水波和电磁波(v 是相速度或波速)。

考虑不随着时间变化的稳定状态, 即 $\partial/\partial t=0$, 由方程 [2]—[5] 得到更特殊的情况。从而分别有:

$$\nabla^2 \psi = -e \quad [6]$$

这是泊松方程(具有源或尾闾, e 是源密度=已知的点函数)。
以及:

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad [7]$$

这是拉普拉斯方程(无源和尾闾)。如果令 [4] 和 [5] 式中的 v 为无穷大, 就得到与 [6]、[7] 式相同的结果。

下面这个方程不能由 [1] 式推导出来, 但是它对我们却很有用。即:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + a^2 \nabla^2 \nabla^2 \psi = a^2 e \quad [8]$$

当没有源或尾闾时:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + a^2 \nabla^2 \nabla^2 \psi = 0 \quad [9]$$

这个方程适用于杆或者平板的横向运动。它包含有双重的拉普拉斯算子 $\nabla^2 \nabla^2$, 在数学上这并没有什么特殊意义, 只不过是 在 $\nabla^2 \psi$ 上再进行一次 ∇^2 运算。

总之, 我们看出, 上面给出的这些方程(它们在数学物理中非常重要)之间存在着很多相似的地方, 如都是线性的、二阶的(方程 [8]、[9] 除外, 它们是四阶的)以及其导数都具有常系数。例如在波动方程 [4] 和 [5] 式中的常系数表示我们假定相速度 v 与空间和时间无关。但是, 实际上把 v 做为时间

和空间函数的方程在一些领域中非常重要，例如在量子物理、波动力学以及某些光学分支中，在固体地球物理中，把 v 做为深度函数的方程很重要。

1.2 坐标变换

在应用数学中，特殊函数是出现在偏微分方程的求解中。这个问题是由寻求满足于给定的微分方程和边界条件的函数所组成。这些边界的形状常常要求采用曲线坐标 q_1, q_2, q_3 以代替笛卡尔直角坐标 x, y, z 。从而产生了坐标变换。

$$\left. \begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3) \\ y &= y(q_1, q_2, q_3) \\ z &= z(q_1, q_2, q_3) \end{aligned} \right\} \quad [1]$$

微分[1]式有：

$$\left. \begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3 \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3} dq_3 \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3} dq_3 \end{aligned} \right\} \quad [2]$$

长度单元 dl 为：

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = Q_{11}^2 dq_1^2 + Q_{22}^2 dq_2^2 + Q_{33}^2 dq_3^2 + 2 Q_{12} dq_1 dq_2 + 2 Q_{13} dq_1 dq_3 + 2 Q_{23} dq_2 dq_3$$

$$\left. \begin{aligned} \text{其中： } Q_{ij} &= \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j} \\ \text{当 } i=j \text{ 时：} \\ Q_{ii} &= \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2 \quad i=1, 2, 3 \end{aligned} \right\} \quad [3]$$

如果特殊情况有 $j \neq i$ 时 $Q_{ij} = 0$ ，则：