流形上的微积分

高等微积分中一些经典定理的现代化处理

LIUXINGSHANGDEWEIJIFEN

〔美〕M. 斯皮瓦克 著

科学出版社

$\int(\alpha dx+\beta dy+\gamma dz)=\pm\iint\{l(\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z})+m(\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x})+n(\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y})\}$

流形上的微积分

高等微积分中一些经典定理的现代化处理

〔美〕M. 斯皮瓦克 著

齐民友　路见可 译

科 学 出 版 社

1 9 8 1

2006/1/4

内 容 简 介

本书对于高等微积分的一些经典结果作了现代化的处理. 利用微分流形及外微分形式, 简明而系统地讨论了多元函数的微积分. 本书写得深入浅出, 论证比较严格, 而且易于理解.

本书译稿经北京大学张恭庆同志校订.

本书可供数学工作者和高等院校有关专业师生参考

M. Spivak

CALCULUS ON MANIFOLDS

A Modern Approach to Classical Theorems

of Advanced Calculus

The Benjamin/Cummings Publishing Company

1970

流 形 上 的 微 积 分

高等微积分中一些经典定理的

现代化处理

〔美〕 M. 斯皮瓦克 著

齐民友 路见可 译

*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

石家庄地区印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1980年11月第 一 版 开本: 787×1092 1/32

1981年 6 月第二次印刷 印张: 5

印数: 6,451—11,320 字数: 108,000

统一书号: 13031·1378

本社书号: 1908·13—1

定价: 0.80 元

编者前言

半个世纪以来，数学在各个方向都以惊人的速度发展着．新领域出现了，对其它学科的渗透进行得很快，我们对经典领域的认识也越来越深刻了．与此同时，现代数学最显著的倾向之一就是它的各个分支之间的相互交织不断增加．因此，今天念数学的人们面对的材料堆积如山．除了以传统方式讲解传统的数学领域而外——这种著述浩如烟海，还有许多对于传统领域是新的、时常更带有启发性的观察方法，又有许多富有潜力的广阔的新领域．这些新材料的大部分未经消化地散见于研究期刊中，往往只在从事研究的数学家的头脑里或未发表的扎记中才有条理地组织起来．学生们极其需要学习越来越多的这种新材料．

编写这套简明的专题小丛书，意在以此作为一种可能的工具，用以解决并抱有希望能减轻某些这类教学上的问题．它们是由活跃的从事研究的数学家们编写的，这些人能看到最新的发展，并能用它来阐明与提炼所需要的材料，知道应着重哪些思想，强调哪些技巧．我们希望这些书能对有才能的大学生指出数学中当代的研究和问题，希望它们不拘形式地把现代数学大师们个人的风格和看法清楚地闪现于读者面前．

微分几何是由新近的发展产生出巨大变化的领域之一．微分几何中围绕着斯托克斯（Stokes）定理的那一部分，有时称为多元微积分学的基本定理，在传统上是放在高等微积分（二或三年级）里讲授的．这一部分不仅对于数学的若干近代

重要分支而且对于工程和物理学都是不可缺少的．然而这个材料的讲授，受到现代发展的影响却相对地少；于是学数学的人必须在研究生的课程中重学这些内容，而学其它科学的人时常就再也没有机会学到它了．对于想按当代从事研究的数学家的观点来看斯托克斯定理的人，M. 斯皮瓦克的这本书应该有所裨益．它对于有较好的微积分和线性代数基础的大学生应该是很好读的．

R. 冈宁、 H. 罗西

新泽西州　普林斯顿

马萨诸塞州　沃尔瑟姆

序　　言

“高等微积分”中有一些部分，由于其概念和方法比较复杂，在初等水平上难以严格处理，本书就是专门讲述这些部分的．这里采用的探讨方法是深奥数学中的现代方法的初等形式．本书形式上的预备知识只需要一学期的线性代数、对集合论的记号略有所知、以及一门相当好的一年级微积分课［其中至少应提到实数集合的上确界(sup)与下确界(inf)］．除此以外，对抽象数学一定程度的熟悉（哪怕是潜在的）则几乎是不可缺少的．

本书前半部的内容是高等微积分中的简单部分，它把初等微积分推广到高维．第1章是预备知识，第2、第3章讨论微分和积分．

本书其余部分用于研究曲线、曲面和更高维的类似物．这里，现代的和经典的处理方式按照完全不相同的路线进行；当然有许多共同之点，而且在最后一节又意味深长地联接起来了．本书封面上复印的那个很经典的方程也就是本书最后的一个定理．这个定理（斯托克斯定理）具有奇妙的历史，它已经历过惊人的变化．

这个定理的第一个提法出现在威廉·汤姆森爵士（Sir William Thomson）［即后来的开尔文勋爵(Lord Kelvin)］1850年7月2日致斯托克斯的信末附笔中．作为史密斯奖金考试的第八题，它公开出现于1854年．这个竞赛考试每年由剑桥大学最好的数学学生参加，从1849年到1882年斯托克斯教授主持了它；到他去世之时，这个结果就以斯托克斯定理之名

而普遍地为人所知了．他的同时代人至少给出过三个证明：汤姆森发表了第一个，另一个见于汤姆森和泰特所著《自然哲学》(Thomson and Tait, Treatise on Natural Philosophy)，麦克斯韦（Maxwell）在"电磁论"（Electricity and Magnetism）[13] 中又给出了一个证明．此后，斯托克斯的名字被用于广泛得多的结果，这些结果在数学某些部分的发展中十分突出，以致斯托克斯定理可以看作研究"推广"方法价值的一个例证．

本书中斯托克斯定理有三种形式．斯托克斯本人得到的形式在最后一节，还有和它不可分离的伴侣——格林（Green）定理和散度定理．这三个定理，也就是副标题里讲的经典定理，很容易从一个现代的斯托克斯定理推导出来，后者出现在第 5 章靠前部分．经典定理关于曲线和曲面所讲的内容就是这个现代的斯托克斯定理对它们的高维类似物（流形）所谈的内容．流形在第 5 章第一部分彻底地研究了．研究流形的理由只能从它在现代数学中的重要性来说明，其实研究它并不比仅仅详细研究曲线曲面更花力气．

读者可能会以为现代斯托克斯定理至少和可以由它导出的经典定理一样难．相反，它只不过是斯托克斯定理的另外一种形式的很简单的推论；这个很抽象的形式是第 4 章最后的也是主要的结果．很有理由设想，迄今回避了的难点恰好隐藏在这里．然而这个定理的证明，在数学家看来，却是颇不足道的——只是直接的计算而已．但另一方面，如果没有第 4 章一大堆艰难的定义，连这个颇不足道的陈述都不能理解．这里有一些好的理由说明为什么定理如此容易而定义却很难．斯托克斯定理的发展提示了，一个简单的原理可以化装成好几个艰深的结果；许多定理的证明只不过是撕掉这层伪装罢了．另一方面，定义却提供了双重目的：它们既以严格的概

念代替模糊的概念，它们又是非常好的证明工具．第 4 章前两节确切地定义了经典数学中所谓“微分表达式” $Pdx+Qdy+Rdz$ 或 $Pdxdy+Qdydz+Rdzdx$ 是什么，并且证明了它们的运算规则．第 3 节定义的链，以及单位分解（在第 3 章里已介绍），使我们不必在证明中把流形切成小块；它们把有关流形的问题化成关于欧几里得空间的问题，在流形里每一件东西看来都很难，而在欧几里得空间里，每一件东西却都很容易．

把一个主题的深奥之处集中到定义上去，无可否认地是很经济的，但这必定会对读者造成一些困难．我希望读者鼓起勇气彻底学好第 4 章，确信花的工夫是值得的：最后一节的经典定理只是第 4 章的应用中少量的几个，而决不是最重要的应用；许多其它的应用放在习题里，查一下参考文献还可以找到进一步的发展．

关于习题和参考文献都要讲几句话．每节末都有习题，并且（和定理一样）按章编号．那些结果在正文中要用到的题目我都加上了星号，但是这种谨慎应当是不必要的——习题是本书最重要的部分，读者至少应该对所有题目都试一试．参考文献必然编得或者很不完备或者繁冗不堪，因为至少有一半主要的数学分支都可以很有根据地推荐为本书内容的合理的继续．我试图把它编得尽管不完备但却很诱人．

我借重印这本书的机会改正热情的读者们向我指出的许多印刷和原稿中的小错误．此外，定理 3-11 以后的材料已完全修订和改正过了．另一些重要的改变，如果放进正文中，势必作过大的改动，所以放在书末的附录里．

M. 斯皮瓦克

1968 年 3 月　于马萨诸塞州

目　　录

1. 欧几里得空间上的函数

范 数 与 内 积

欧几里得（Euclid）n 维空间（也简称欧氏空间）$\mathbf{R}^n$ 定义为一切实数 x^i 的 n 数组$(x^1, \cdots, x^n)$(一个“1 数组”就是一个数，而 $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$ 则是一切实数的集)的集合. $\mathbf{R}^n$ 的元通常称为 $\mathbf{R}^n$ 的点，而 $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$ 通常分别称为直线、平面和空间. 如 x 表示 $\mathbf{R}^n$ 的一元素，则 x 是一个 n 数组，其中第 i 个记作 x^i；于是我们可以写成

$$x = (x^1, \cdots, x^n).$$

$\mathbf{R}^n$ 中的点也常常称为 $\mathbf{R}^n$ 中的向量，因为，按照 $x + y = (x^1 + y^1, \cdots, x^n + y^n)$以及 $ax = (ax^1, \cdots, ax^n)$作为运算，$\mathbf{R}^n$ 是一个向量空间(在实数域上，维数为 n). 在这向量空间中，向量 x 的长度的概念，通常称为 x 的范数 $|x|$，并定义为 $|x| = \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2}$. 如 $n = 1$，则$|x|$就是 x 的通常的绝对值. 范数和 $\mathbf{R}^n$ 的向量空间结构间的下一关系极为重要.

1-1 定理 如 $x, y \in \mathbf{R}^n$ 且 $a \in \mathbf{R}$，则

(1) $|x| \geqslant 0$，当且仅当 $x = 0$ 时 $|x| = 0$.

(2) $\left|\sum_{i=1}^{n} x^i y^i\right| \leqslant |x| \cdot |y|$，当且仅当 x 与 y 线性相关时等式成立.

(3) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

(4) $|ax| = |a| \cdot |x|$.

证

(1) 留给读者.

(2) 如 x 与 y 线性相关,等式明显成立.

如不是这样,则对一切 $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda y - x \neq 0$, 因此

$$0 < |\lambda y - x|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda y^i - x^i)^2$$

$$= \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} (y^i)^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x^i y^i + \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2.$$

所以右方是 λ 的没有实根的二次式,其判别式必须为负.于是

$$4\left(\sum_{i=1}^{n} x^i y^i\right)^2 - 4\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 \sum_{i=1}^{n} (y^i)^2 < 0.$$

(3) $$|x+y|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x^i + y^i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (y^i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x^i y^i$$

$$\leqslant |x|^2 + |y|^2 + 2|x| \cdot |y| \qquad \text{由(2)}$$

$$= (|x| + |y|)^2.$$

(4) $$|ax| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (ax^i)^2} = \sqrt{a^2 \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2} = |a| \cdot |x|. \quad \blacksquare$$

在(2)中出现的量 $\sum_{i=1}^{n} x^i y^i$ 称为 x 与 y 的内积并记作 $\langle x, y \rangle$. 内积的一些最重要性质如下.

1-2 定理 如 x, x_1, x_2 与 y, y_1, y_2 是 $\mathbf{R}^n$ 中的向量,且 $a \in \mathbf{R}$,则

(1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (对称性).

(2) $$\langle ax, y\rangle = \langle x, ay\rangle = a\langle x, y\rangle$$
$$\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$$
$$\langle x, y_1 + y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle \text{(双线性)}.$$

(3) $\langle x, x\rangle \geqslant 0$，且 $\langle x, x\rangle = 0$ 当且仅当 $x = 0$（正定性）.

(4) $$|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

(5) $$\langle x, y\rangle = \frac{|x + y|^2 - |x - y|^2}{4} \quad \text{(极化等式)}.$$

证

(1) $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i = \sum_{i=1}^{n} y^i x^i = \langle y, x\rangle$.

(2) 由(1)只须证明

$$\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle,$$
$$\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle.$$

这些可由下列等式得出:

$$\langle ax, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} (ax^i)y^i = a\sum_{i=1}^{n} x^i y^i = a\langle x, y\rangle,$$

$$\langle x_1 + x_2, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_1^i + x_2^i)y^i = \sum_{i=1}^{n} x_1^i y^i + \sum_{i=1}^{n} x_2^i y^i$$
$$= \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle.$$

(3) 和(4)留给读者.

(5) $$\frac{|x + y|^2 - |x - y|^2}{4}$$
$$= \frac{1}{4}[\langle x + y, x + y\rangle - \langle x - y, x - y\rangle] \quad \text{由(4)}$$
$$= \frac{1}{4}[\langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle -$$
$$(\langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle)] = \langle x, y\rangle. \quad \blacksquare$$

我们对记号作一些重要注解以结束本节.向量$(0, \cdots, 0)$通常简记为$\mathbf{0}$. $\mathbf{R}^n$ 的通常基底是 $e_1, \cdots, e_n$, 其中 $e_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$, 在第 i 个位置上是1. 如 $T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 是一个线性变换, T 关于 $\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{R}^m$ 的通常基底的矩阵是 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$, 其中 $T(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$——$T(e_i)$的系数出现在矩阵的第 i 列. 如 $S: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ 有 $p \times m$ 矩阵 B, 则 $S \circ T$ 有 $p \times n$ 矩阵 BA [这里 $S \circ T(x) = S(T(x))$; 绝大多数线性代数书籍把 $S \circ T$ 简记为 ST]. 为要找出 $T(x)$, 我们来计算 $m \times 1$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}, & \cdots, & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}, & \cdots, & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix};$$

则 $T(x) = (y^1, \cdots, y^m)$. 下一习惯记法大大简化许多公式: 如 $x \in \mathbf{R}^n$ 与 $y \in \mathbf{R}^m$, 则 (x, y) 表示

$$(x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^m) \in \mathbf{R}^{n+m}.$$

习题

1-1.* 求证 $|x| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x^i|$.

1-2. 定理 1-1(3) 中的等号何时成立? **提示:** 重新检查证明; 答案不是"当 x 与 y 线性相关".

1-3. 求证 $|x - y| \leqslant |x| + |y|$. 何时等式成立?

1-4. 求证 $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$.

1-5. 量 $|y - x|$ 称为 x 与 y 间的**距离**. 求证并在几何上解释"三角形不等式":

$$|z - x| \leqslant |z - y| + |y - x|.$$

1-6. 设 f 与 g 在 $[a, b]$ 上平方可积,

(a) 求证 $\left|\int_a^b f \cdot g\right| \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b g^2\right)^{1/2}$ **提示:** 分别考虑下二情况: 对某一 $\lambda \in \mathbf{R}$, $0 = \int_a^b (f - \lambda g)^2$; 对一切 $\lambda \in \mathbf{R}$,

$0 < \int_a^b (f-\lambda g)^2$.

(b) 如等式成立，$f=\lambda g$ 必定对某个 $\lambda\in\mathbf{R}$ 成立吗？如 f 与 g 连续又怎样？

(c) 证明 (a) 是定理 1-1(2) 的一个特殊情形。

1-7. 一线性变换 $T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$，如果 $|T(x)|=|x|$，则称为**保范数的**，如果 $\langle Tx, Ty\rangle=\langle x, y\rangle$，则称为**保内积的**。

(a) 求证 T 是保范数的当且仅当 T 是保内积的。

(b) 求证这种线性变换 T 是 1-1 的，而且 T^{-1} 也是同一种变换。

1-8. 如 $x,y\in\mathbf{R}^n$ 不为零，x 与 y 间的（夹）角记作 $\angle(x,y)$ 定义为 $\arccos(\langle x, y\rangle/|x|\cdot|y|)$，由定理 1-1(2) 这是有意义的。线性变换 T 称为**保角**的，如 T 是 1-1 的，且对 x, $y\neq 0$ 我们有 $\angle(Tx,Ty)=\angle(x,y)$.

(a) 求证：如 T 是保范数的，则 T 是保角的。

(b) 如 $\mathbf{R}^n$ 有一基底 $x_1,\cdots,x_n$，又有数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 使得 $Tx_i=\lambda_i x_i$，求证 T 是保角的当且仅当所有 $|\lambda_i|$ 皆相等。

(c) 所有保角的 $T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是些什么？

1-9. 如 $0\leqslant\theta<\pi$，设 $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 有矩阵 $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.

求证 T 是保角的，且若 $x\neq 0$ 则 $\angle(x, Tx)=\theta$.

1-10.* 如 $T:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$ 是一线性变换，证明有这样的数 M 使得对于 $h\in\mathbf{R}^m$ 有 $|T(h)|\leqslant M|h|$. **提示**：用 $|h|$ 以及 T 的矩阵中的元估计 $|T(h)|$.

1-11. 如 $x, y\in\mathbf{R}^n$, $z, w\in\mathbf{R}^m$，证明 $\langle(x,z),(y,w)\rangle=\langle x, y\rangle+\langle z, w\rangle$ 以及 $|(x,z)|=\sqrt{|x|^2+|z|^2}$. 注意 (x,z) 与 (y,w) 表示 $\mathbf{R}^{n+m}$ 中的点。

1-12.* 设 $(\mathbf{R}^n)^*$ 表示向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的对偶空间。如 $x\in\mathbf{R}^n$，用 $\varphi_x(y)=\langle x, y\rangle$ 定义 $\varphi_x\in(\mathbf{R}^n)^*$. 用 $T(x)=\varphi_x$ 定义 $T:\mathbf{R}^n\to(\mathbf{R}^n)^*$. 证明 T 是一个 1-1 线性变换，并作出结论：每一个 $\varphi\in(\mathbf{R}^n)^*$ 是关于唯一的一个 $x\in\mathbf{R}^n$ 的 φ_x.

1-13.*如 $x, y\in \mathbf{R}^n$，则若 $\langle x, y\rangle = 0$ 就称 x 与 y 垂直(或正交)。如 x 与 y 垂直，求证 $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

欧几里得空间的子集

闭区间 $[a, b]$ 在 $\mathbf{R}^2$ 中有一自然的类比．这就是**闭矩形** $[a, b]\times[c, d]$，定义为一切数对 (x, y) 的全体，其中 $x\in[a, b]$，$y\in[c, d]$．更一般地，如 $A\subset\mathbf{R}^m$，$B\subset\mathbf{R}^n$，则 $A\times B\subset\mathbf{R}^{m+n}$ 定义为一切 $(x, y)\in\mathbf{R}^{m+n}$ 的集，其中 $x\in A$，$y\in B$．特别，$\mathbf{R}^{m+n}=\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n$．如 $A\subset\mathbf{R}^m$，$B\subset\mathbf{R}^n$，和 $C\subset\mathbf{R}^p$，则 $(A\times B)\times C = A\times(B\times C)$，二者皆简记为 $A\times B\times C$；这一记法也推广到任意个数的集的乘积．集 $[a_1, b_1]\times\cdots\times[a_n, b_n]\subset\mathbf{R}^n$ 称作 $\mathbf{R}^n$ 中的**闭矩形**，而集 $(a_1, b_1)\times\cdots\times(a_n, b_n)\subset\mathbf{R}^n$ 称作**开矩形**．更一般地，一个集 $U\subset\mathbf{R}^n$ 称作**开集**(图 1-1)，如果对每一个 $x\in U$，有一个开矩形 A 使

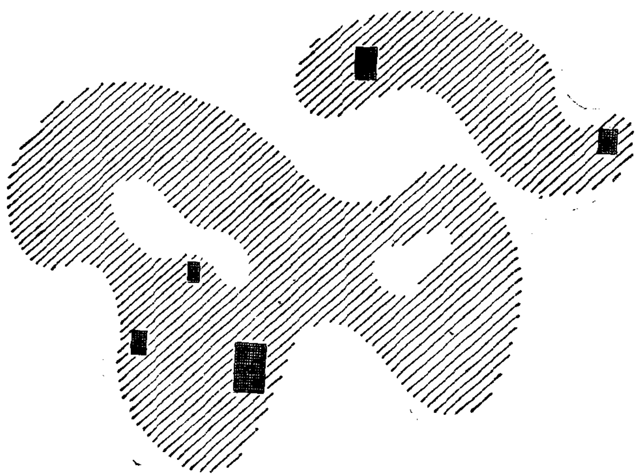

图 1-1

得 $x\in A\subset U$.

$\mathbf{R}^n$ 的一个子集 C 称为**闭集**如 $\mathbf{R}^n-C$ 是开集. 例如,如 C 只含有限多个点,则 C 是闭的. 读者应该补充证明: $\mathbf{R}^n$ 中的闭矩形确为一闭集.

如 $A\subset\mathbf{R}^n$ 且 $x\in\mathbf{R}^n$, 则下列三种可能性之一必成立(图 1-2).

1. 存在一个开矩形 B 使得 $x\in B\subset A$.

2. 存在一个开矩形 B 使得 $x\in B\subset\mathbf{R}^n-A$.

3. 如 B 是任一个开矩形使 $x\in B$ 者, 则 B 同时含有 A 与 $\mathbf{R}^n-A$ 的点.

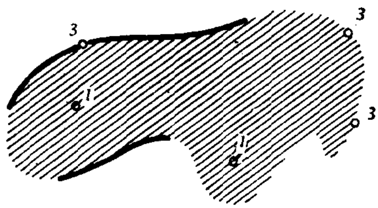

图 1-2

满足(1)的那些点构成 A 的**内域**,满足 (2) 的那些点构成 A 的**外域**, 满足 (3) 的那些点构成 A 的**边界**. 习题 1-16 到 1-18 表明这些术语有时可有意想不到的意义.

不难看出,任何集 A 的内域是开的; 对 A 的外域, 它实际上是 $\mathbf{R}^n-A$ 的内域,所以也是如此. 于是(习题 1-14) 它们的并集是开的,而所剩下的,即其边界,必定是闭的.

我们把一组开集称为 A 的一个**开覆盖** (或简称**覆盖** A)[1] $\mathcal{O}$, 如果任一点 $x\in A$ 是在 $\mathcal{O}$ 的某开集中. 例如,如 $\mathcal{O}$ 是一切开区间 $(a, a+1)$ 的集合, 其中 $a\in\mathbf{R}$, 则 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbf{R}$ 的一(开)

1) 原文意思是若一个集族 $\mathcal{O}$ 是 A 的覆盖, 就说 $\mathcal{O}$ 覆盖 A. 而不是说开覆盖可以简称为覆盖,而应说开集族 $\mathcal{O}$ 覆盖 A.——译者注