实用代数学

[英] 汉斯·里贝克 著
费青云 潘介正 王建磐 译

高等教育出版社

实用代数学

[英] 汉斯·里贝克 著

费青云　潘介正　王建磐 译

高等教育出版社

本书根据Hans Liebeck著《Algebra for Scientists and Engineers》(1969)译出，介绍了近代科学与工程学中应用广泛的一些代数概念。虽然这些概念在通常大学代数教材中都可找到，但这里着重强调了它们的应用，并附有大量取自各学科的实际例子。

全书共分三个部分：第一部分阐述向量空间与线性方程；第二部分讨论对称变换群及其在晶体学中的应用；第三部分是矩阵论及其应用。

本书可供理、工科各专业师生作为教学参考书，也可供科学工作者与工程技术人员参考。本书内容浅显，只要具备微积分和力学的初步知识便可阅读。

实用代数学

[英] 汉斯·里贝克 著

费青云 潘介正 王建磐 译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北香河印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 14.125 字数 352,000

1985年7月第1版 1985年7月第1次印刷

印数 00,001—16,600

书号 13010·0976 定价 3.55元

序　言

代数学的某些概念是许多近代科学理论与工程学的基础，本书打算介绍的正是这样一些概念．它可供理、工科的学生以及对代数在科学中的应用感兴趣的学数学的学生作为大学代数学课程第一、二学年的教材．

从目录中可以看出，本书的内容与一本普通的代数学教程十分相似．的确，本书的新颖之处主要不在于所涉及的代数学内容，而在于强调它们的应用．

正文中包含许多例题，并且有450多道练习题．习题的答案与注释附在书末．我们要求学生们即使不去逐一解答所有习题，至少也要把它们浏览一遍，因为其中若干习题涉及到一些引起广泛兴趣的结果，指出了某些重要的发展情况．阅读本书所需要的预备知识只是一些初等微积分和力学的原理．

本书分为三部分．第一部分讨论线性代数，叙述了向量和向量空间的理论，强调了正交性的重要性．实例取自诸如正交多项式理论、富里埃分析和统计学这样一些背景学科．在线性方程一章中有一节讨论舍入误差，这个问题之所以重要，是因为它在近代计算中应用广泛．

第二部分涉及对称变换群．群的概念假定读者并不知道，因而介绍得较仔细．这里讨论了空间群与点群，并给出了大量晶体对称性和分子对称性的实例．

第三部分是矩阵论．矩阵既被看成线性变换（如旋转、反射、射影等）的表示，又被看成是线性方程组与二次型的系数阵列．这一部分的论述包括了把实对称矩阵化简为对角形式的问题和两个二次型(其中一个正定)同时化简的问题．这些理论用力学方面的

例子(特别是振动的例子)加以说明. 我们强调了特征值问题的重要性, 并以简短的一章介绍了如何在计算机上求特征值.

最后一章涉及四个独立的问题, 在这些问题中代数工具的应用都起着重要的作用. 选择其中前两个问题——分子振动和洛伦兹变换——是想要说明群论是怎样引入近代物理学的.

书中许多地方都附有可供深入学习的参考书目.

我谨向我的朋友们和 Keele 大学的同事们表示我的谢意, 他们在我撰写此书时给予了宝贵的意见和建议. 我特别要感谢 Peter Smith, Ralph Smith, Dominic Jordan 和 Goeffrey Fielding(数学), 以及 David Hughes 和 David Cohen (化学). 我感谢 D. S. Jones 教授, 他评阅了初稿. 他的建设性意见使本书获益非浅. 最后, Cynthia Kelsall 小姐为手稿的大部分进行打字, Valerie Lucking 夫人继续完成了这项工作, 我也要向她们致谢.

H. Liebeck

目　录

第一部分　线性代数

第一章　向量空间……3

1.1 引论……3

1.2 向量……3

1.3 向量代数的法则……4

1.4 用向量方法解某些问题……12

1.5 在一个坐标系中的向量……20

第二章　线性方程组……24

2.1 引论……24

2.2 行初等变换……29

2.3 行初等变换的理论……32

2.4 高斯化简法：逐次消元……36

2.5 舍入误差……44

第三章　向量空间的理论……49

3.1 线性组合：向量空间的生成元……49

3.2 线性相关和线性无关……53

3.3 基和维数……60

3.4 无限维向量空间……66

第四章　用向量方法的坐标几何……68

4.1 三维空间中的向量的长度和方向……68

4.2 点积(或纯量积)……73

4.3 三维空间中的平面方程……77

4.4 向量积(或叉积)……84

第五章　内积空间……93

5.1 内积：欧几里得向量空间 ……………………………………93
5.2 欧几里得向量空间中的正交性和长度 ……………………………96
5.3 一些重要的不等式 ……………………………………103
5.4 正交集 ……………………………………109
5.5 微分方程的正交解 ……………………………………118
5.6 酉空间 ……………………………………123

第二部分　对称变换群

第六章　对称变换 ……………………………………131
6.1 引论 ……………………………………131
6.2 变换的代数 ……………………………………138
6.3 平面等距变换 ……………………………………145
6.4 三维空间等距变换 ……………………………………153
第七章　群 ……………………………………160
7.1 引论 ……………………………………160
7.2 群的同构 ……………………………………168
7.3 置换 ……………………………………171
7.4 置换在对称变换群中的应用 ……………………………………176
7.5 偶置换与奇置换 ……………………………………180
7.6 群的直积 ……………………………………183
第八章　对称变换群 ……………………………………186
8.1 平面对称变换群 ……………………………………186
8.2 点阵 ……………………………………191
8.3 晶体学中关于旋转对称的制约 ……………………………………193
8.4 空间群和点群 ……………………………………195
8.5 点群的几个例子 ……………………………………196

第三部分　矩阵论及其应用

第九章　线性变换与矩阵 ……………………………………203
9.1 引论 ……………………………………203

9.2 线性变换 …… 204
9.3 线性变换的矩阵 …… 205
9.4 两个正方矩阵的乘积 …… 213
9.5 长方矩阵 …… 217
9.6 关于列向量的约定 …… 219
第十章　矩阵代数续篇 …… 225
10.1 正方矩阵的乘积(续) …… 225
10.2 矩阵的加法与纯量乘法 …… 228
10.3 矩阵的转置 …… 231
10.4 二次型与埃尔米特型 …… 234
第十一章　矩阵的逆 …… 240
11.1 引论 …… 240
11.2 初等矩阵 …… 242
11.3 在正方矩阵中的应用 …… 248
第十二章　行列式 …… 254
12.1 引论与定义 …… 254
12.2 行列式的行变换 …… 261
12.3 行列式的列变换 …… 269
12.4 把行列式按一行(一列)展开 …… 270
12.5 行列式与线性方程组 …… 278
第十三章　特征值问题 …… 280
13.1 引论 …… 280
13.2 矩阵的特征方程 …… 285
13.3 坐标变换；矩阵的相似性 …… 293
第十四章　正交矩阵 …… 301
14.1 直角坐标系的变换；正交矩阵 …… 301
14.2 线性变换与坐标变换的矩阵表示 …… 306
14.3 正交群 …… 310
14.4 正交矩阵的推广 …… 312
第十五章　二次型与对称矩阵 …… 317

15.1 引论 …… 317
15.2 实对称矩阵的特征值 …… 324
15.3 实对称矩阵的对角化 …… 327
第十六章　二次型的化简 …… 335
16.1 化简过程 …… 335
16.2 二次方程 …… 341
16.3 正定二次型 …… 345
16.4 两个二次型的同时化简 …… 347
第十七章　特征值的计算 …… 352
17.1 用迭代法求主特征值 …… 352
17.2 迭代过程 …… 354
17.3 其余特征值的计算 …… 357
第十八章　代数学的若干应用 …… 361
18.1 分子振动：CO_2分子 …… 361
18.2 相对论：洛伦兹变换 …… 369
18.3 概率论：马尔可夫过程 …… 374
18.4 四端网络：传递矩阵；滤波器 …… 385
附录 …… 395
等价关系 …… 395
习题答案与注释 …… 398
汉英对照名词索引 …… 423

第一部分

线性代数

第一章 向 量 空 间

1.1 引论

我们通过叙述向量空间的概念开始代数的学习．读者可能因为在物理学中碰到过向量而熟悉它们了．它们被大小与方向所确定，因而从本质上说是几何量．但是，如果我们希望解决向量方面的一些问题，仅在纸上画箭头是不够的．我们必须学会按某些规则进行向量的运算，而这些规则又必须与物理学的经验一致．我们将介绍一种向量的代数，它仅仅是建立在向量加法与纯量乘法这两种运算的基础上的．这将导致我们把向量空间定义为一个数学系统，其代数性质类似于物理学中的向量．

数学中向量空间的例子俯拾皆是，其中不少还是科学工作者感兴趣的．我们在这一章及后面几章中将看到这一点．

1.2 向量

由大小和方向所刻画的物理量，例如力、位移、速度和加速度，称为向量．在图上，向量用一个带箭头的线段表示，箭头确定了它的方向，而根据给定的尺度，用线段的长度表示向量的大小．以下我们将用黑体字表示向量，例如 $\mathbf{v}$．若 $\mathbf{v}$ 的起点与终点分别为 A 与 B，则我们还可以记

$$\mathbf{v}=\overrightarrow{AB}.$$

两个长度相等、方向相同的带箭头的线段确定同一个向量，而不管它们在纸上的位置怎样．于是，在图 1 中

$$\overrightarrow{AB}=\mathbf{v}=\mathbf{u}.$$

虽然向量本质上是几何量，但在这里我们所关心的却是向量的代数性质，亦即，在我们即将引入的某些合成规则（向量加法与减法、纯量乘法）下，向量的有关性质.

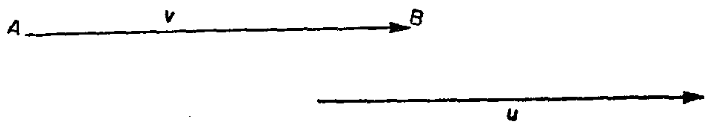

图 1 向量的相等

1.3 向量代数的法则

法则 I

按照向量加法的三角形法则可以把两个向量 **v** 及 **w** 相加，得出唯一的第三向量 **v**+**w**，它称为 **v** 与 **w** 的和（图 2）. 把 **w** 的起点放到 **v** 的终点上，则从 **v** 的起点画到 **w** 终点的箭头表示 **v**+**w**. 即使 **v** 和 **w** 是同向（或反向）的向量，这个法则仍适用，虽然在这种情况我们得到的三角形是退化的.

图 2 向量加法

在“**v**+**w**”中的加号表示向量加法，而且这个加号和用于加数的加号有相当不同的功用. 严格地说，我们应当发明一个新符号来表示向量加法. 然而，在不致产生混淆的情况下，特别是为了强调这些运算的共同特点时，数学家们乐意用同一个符号来表示不同的运算. 在法则 II 和 III 中给出了两种加法的重要的共同性

质.

法则 II

向量加法是可交换的，即对一切向量 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 有

$$\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{w}+\mathbf{v}.$$

由图 3，这是显然的.

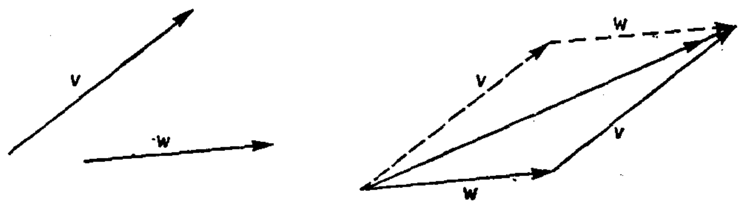

图 3 交换率：$\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{w}+\mathbf{v}$

法则 III

向量加法是可结合的，即对任意三个向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}).$$

这里括号指明了进行加法的次序. 为了证明结合律，参看图 4.

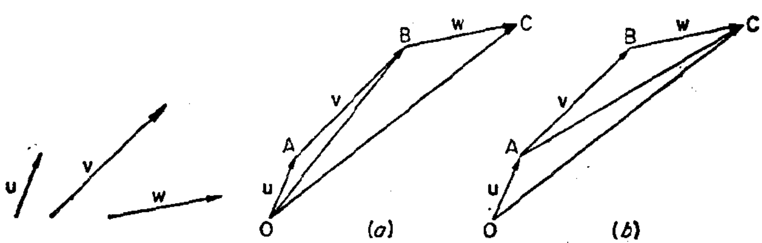

图 4 结合律：$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

这个法则表明，当求三个向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 的和的时候，先求 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 的和还是先求 $\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{w}$ 的和都可以. 于是我们可以把和写作 $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$ 而不会有异义.

依次用 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 代表向量 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{w}$. 图 4 (a) 说明

了 $\mathbf{w}$ 加$(\mathbf{u}+\mathbf{v})$(用 $\overrightarrow{OB}$ 代表)的加法，而在图 4(b)中，是把$(\mathbf{v}+\mathbf{w})$(用 $\overrightarrow{AC}$ 代表)加到 $\mathbf{u}$ 上．两种情形下结果都是向量 $\overrightarrow{OC}$．

设 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{v}'$ 是有相同长度而方向相反的向量（图 5）．由三角形法则，$\overrightarrow{OC}$ 表示 $\mathbf{v}+\mathbf{v}'$，而 C 和 O 是重合的．于是 $\mathbf{v}+\mathbf{v}'$ 是长度为零的向量(并因此没有特定的方向)．下面的法则给出了这个向量的代数性质．

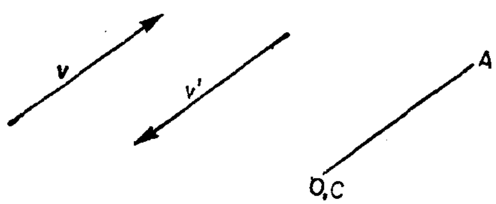

图 5

法则 IV

存在一个零向量 $\mathbf{0}$，对一切 $\mathbf{v}$ 有性质

$$\mathbf{v}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{v}=\mathbf{v}.$$

图 5 的向量 $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ 满足代数法则

$$\mathbf{v}+\mathbf{v}'=\mathbf{0}.$$

和普通算术相似，自然地可记

$$\mathbf{v}'=-\mathbf{v}.$$

法则 V

对每个向量 $\mathbf{v}$ 存在一个向量 $-\mathbf{v}$，满足

$$\mathbf{v}+(-\mathbf{v})=(-\mathbf{v})+\mathbf{v}=\mathbf{0}.$$

$-\mathbf{v}$ 称为 $\mathbf{v}$ 关于加法的逆向量，或者 $\mathbf{v}$ 的负向量．

现在我们可以用

$$\mathbf{v}-\mathbf{w}=\mathbf{v}+(-\mathbf{w})$$

来定义向量减法．图 6 说明了这一点．

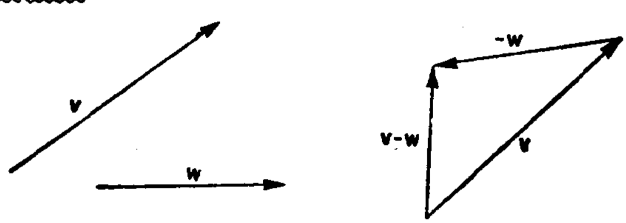

图 6 向量减法

向量减法很象普通减法．例如，如果我们已知

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{w},$$

我们可由这些法则断言

$$\mathbf{v}=\mathbf{w}-\mathbf{u}.$$

因为

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}-\mathbf{u}&=\mathbf{w}+(-\mathbf{u}) && \text{（根据定义）}\\
&=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+(-\mathbf{u}) && \\
&=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+(-\mathbf{u})) && \text{（根据结合律）}\\
&=\mathbf{u}+(-\mathbf{u}+\mathbf{v}) && \text{（根据交换律）}\\
&=(\mathbf{u}+(-\mathbf{u}))+\mathbf{v} && \text{（又根据结合律）}\\
&=\mathbf{0}+\mathbf{v} && \text{（根据法则 V）}\\
&=\mathbf{v} && \text{（根据法则 IV）}
\end{aligned}$$

法则 VI

可以用一个数（纯量）k 来乘一个向量 $\mathbf{v}$，得到一个向量 $k\mathbf{v}$.

向量 $k\mathbf{v}$ 的大小为 $\mathbf{v}$ 的大小的 $|k|$ 倍．当 k 为正的时，$k\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{v}$ 同向；当 k 为负的时，$k\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{v}$ 反向（图 7）.

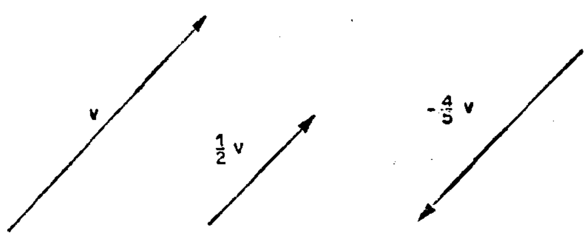

图 7　向量的纯量乘法

法则 VII

下面的运算规则对任何纯量和向量成立：

(i) $k(\mathbf{u}+\mathbf{v})=k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$　　对向量加法的分配律.

(ii) $(k+l)\mathbf{v}=k\mathbf{v}+l\mathbf{v}$　　对纯量加法的分配律.

(iii) $(kl)\mathbf{v}=k(l\mathbf{v})$　　　　纯量乘法结合律.

(iv) $1\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}$　　　　纯量单位律.

用画图的办法容易看出向量确实满足这些运算规则.

向量代数法则一览

现在我们来总结向量代数的法则，不再引用在物理向量相应情形中它们的几何意义. 这种纯粹代数抽象是向量空间一般定义的基础.

法则 I 到 V　关于向量加法

I. 可以把两个向量 $\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{w}$ 相加，得到称为和的第三个向量 $\mathbf{v}+\mathbf{w}$. 这称为向量加法的封闭律.

II. 向量加法是可交换的.

III. 向量加法是可结合的.

IV. 存在一个零向量，用 $\mathbf{0}$ 表示，对一切 $\mathbf{v}$ 有性质

$$\mathbf{v}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{v}=\mathbf{v}.$$

V. 对任何向量 $\mathbf{v}$，存在一个相应的向量 $-\mathbf{v}$，称为 $\mathbf{v}$ 的负向量或逆向量，有性质

$$\mathbf{v}+(-\mathbf{v})=-\mathbf{v}+\mathbf{v}=\mathbf{0}.$$

法则 VI 和 VII　关于纯量乘法

VI. 一个纯量 k 和一个向量 $\mathbf{v}$ 的积 $k\mathbf{v}$ 本身是一个向量. 这称为纯量乘法的封闭律.

VII. 纯量乘法满足分配律

(i) $k(\mathbf{u}+\mathbf{v})=k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$

和

(ii) $(k+l)\mathbf{v}=k\mathbf{v}+l\mathbf{v}$,

满足结合律

(iii) $(kl)\mathbf{v}=k(l\mathbf{v})$,

以及纯量单位律

(iv) $1\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}$.