现代数学译丛

具非负特征形式的二阶微分方程

〔苏〕O. A. 奥列尼克 E. B. 拉德克维奇 著

科学出版社

现代数学译丛

具非负特征形式的二阶微分方程

〔苏〕O. A. 奥列尼克 E. B. 拉德克维奇 著

辜联崑 等 译

周毓麟 校

科学出版社

1986

内 容 简 介

本书着重介绍了偏微分方程理论的一个新分支——具非负特征形式的二阶微分方程理论．主要讨论边值问题解的存在性、唯一性和光滑性，二阶方程的亚椭圆性和弱解的局部光滑性以及解的定性性质．总结了七十年代以前的研究成果，是关于偏微分方程理论中一个新的重要研究课题的专著．

本书可供数学工作者、高等院校有关专业教师、高年级大学生和研究生参考．

O. A. Oleĭnik E. V. Radkevič
Second order equations with nonnegative characteristic form
American Mathematical Society, Rhode Island and Plenum Press, New York, 1973

现代数学译丛
具非负特征形式的二阶微分方程
〔苏〕O. A. 奥列尼克 E. B. 拉德克维奇 著
辜联崑 等 译
周毓麟 校
责任编辑 苏芳霞

科学出版社 出版
北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1986年7月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1986年7月第一次印刷 印张：9 1/8
印数：0001—4,300 字数：242,000

统一书号：13031·3217
本社书号：4976·13—1
定价： 2.60 元

译 者 的 话

本书是按照 1973 年英译本翻译的，英译本较俄文原版内容有所增加. 俄文原版为 O. A. Олейник, E. B. Радкевич, “Уравнения второго порядка с неотрицательной характери-стической формой” 于 1971 年出版.

由于时间匆促，译者水平有限，因此译文必定有不妥之处，敬请读者批评指正.

参加翻译的有辜联崑、张克农、庄琼珊、洪乃端、郑宝琚、许清泉、蔡晖等同志.

目　　录

引　　言

具非负特征形式的二阶方程构成了偏微分方程理论的一个新分支．它在过去的二十年中已经出现，近年来又得到了十分迅速的发展．

形式为

$$L(u) \equiv a^{kj}(x)u_{x_k x_j} + b^k(x)u_{x_k} + c(x)u = f(x) \qquad (1)$$

的方程，如果在G的每一点x上，对于任意的向量

$$\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_m),$$

有 $a^{kj}(x)\xi_k\xi_j \geqslant 0$，则说它在集合$G$上是具非负特征形式的二阶方程．在方程(1)中，规定重复指标表示从1到m求和，而

$$x = (x_1, \cdots, x_m).$$

这种方程有时也称为退化椭圆型方程或椭圆-抛物型方程．

这类方程包含椭圆型和抛物型方程，一阶方程，超抛物型方程，Brown 运动方程等等．

现在已经建立了具非负特征形式的二阶方程一般理论的基础，本书的目的在于介绍这些基础．

很早以前，特别在大约60年前发表的 Picone[105] 的论文中，就研究过与已深入研究的椭圆型或抛物型方程不相同的、形式为(1)的特殊类型方程．

Tricomi 的研究报告[131]以及后来的混合型方程的研究，引起了更一般地研究在区域边界退化的椭圆型方程的兴趣，即研究具有如下条件的形式为(1)的方程：在区域Ω的点上当 $\xi \neq 0$ 时 $a^{kj}(x)\xi_k\xi_j > 0$，而在区域边界的点上对于一切的ξ，有

$$a^{kj}(x)\xi_k\xi_j \geqslant 0.$$

M. B. Келдыш 在1951年 的论文[63]，开创了一系列的工作，在此理论的发展中起了重大的作用．正是 Келдыш 的这篇论文，

首先揭示了这样的事实：对于在边界退化的椭圆型方程的情况，在一定假设下，部分边界可以不受边界条件的限制．继 Келдыш 论文后的许多工作都深入研究了在边界退化的任意阶椭圆型方程的边值问题．在这些研究工作中使用了各种方法，这些方法以前在椭圆型方程理论和偏微分方程理论的其它分支中曾经应用过(在 [123] 中可以找到这些文章的一些概述)．联系泛函分析方法研究在边界退化的椭圆型方程，就出现带加权赋范函数空间理论，对于这个空间获得类似于 С. Л. Соболев 的嵌入定理(参看 [71, 84, 133] 等等)．最近研究了在区域内部的子流形上或在它的边界上退化的拟微分方程（这些是 [24, 77, 78, 134—136] 等论文所讨论的)．拟微分方程理论的方法，在很多情况下，对于在边界退化的椭圆型方程几乎导致决定性的结果．特别对研究古典的 Poincaré 斜导数问题导致了重要的进展(参看 [24, 77, 78])．

我们将研究形式(1)的一般方程，它在特征形式 $a^{kj}(x)\xi_k\xi_j$ 对于任意 $\xi\neq 0$ 可能为 0 的 x 点集上不加任何限制．本书所发展的理论，特别包含了在边界上退化的二阶椭圆型方程的成果．

1956 年 Fichera 发表的论文[29]，对发展具非负特征形式二阶方程的一般理论是一个重要的步骤．在那篇论文中，对于具非负特征形式的一般二阶方程，提出了类似于椭圆型方程的 Dirichlet 和 Neumann 问题的边值问题．在边界为 Σ 的区域 Ω 中，方程 (1) 的第一边值问题(或 Dirichlet 问题)表述如下：求函数 $u(x)$，使得

$$L(u)=f,\ \text{在}\ \Omega\ \text{内} \tag{2}$$

和

$$u=g,\ \text{在}\ \Sigma_2\cup\Sigma_3\ \text{上} \tag{3}$$

这里 f 和 g 是相应地定义在 Ω 和 $\Sigma_2\cup\Sigma_3$ 上的函数，后者是 Σ 的子集，将在下面定义．将区域 Ω 的整个边界 Σ 分划为集合 Σ_0, Σ_1, Σ_2, Σ_3. 设 $\bar{n}=(n_1,\ \cdots,\ n_m)$ 是边界 Σ 的内法向量．我们用 Σ_3 记边界 Σ 的非特征部分，即 Σ_3 是 Σ 上适合 $a^{kj}n_kn_j>0$ 的点集．在 $a^{kj}n_kn_j=0$ 的集合 $\Sigma\backslash\Sigma_3$ 上检验 Fichera 函数 $b\equiv(b^k-a^{kj}_{x_j})n_k$.

用 Σ_0，Σ_1，Σ_2 表示 $\Sigma\backslash\Sigma_3$ 的子集，那里相应的 $b=0$，$b>0$ 和 $b<0$.（仅在边界 Σ 退化的椭圆型方程的情况，问题 (2)，(3) 与 [63] 的 M. B. Келдыш 问题恰好相合.）

我们注意到边界 Σ 分划为 Σ_0，Σ_1，Σ_2，Σ_3 部分，关于自变量变换是不变的.

对于问题 (2)，(3) 产生如下的问题：方程的系数和区域的边界满足什么条件，问题 (2)，(3) 的解才存在、唯一，并且具有一定阶数的光滑性？（简单的例子表明，问题 (2)，(3) 可能没有光滑解(参看第一章 § 8).）

从 Fichera 的论文[29,30]中得到在 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 空间问题 (2)，(3) 的光滑解的一个先验估计. 特别证明了：如果在 $\Omega\cup\Sigma$ 中，$c<0$ 并且 $c^*<0$，则对于所有在 $\Sigma_2\cup\Sigma_3$ 上满足条件 $u=0$ 的 $C^{(2)}(\Omega\cup\Sigma)$ 类函数 u 和所有的 $p\geqslant 1$，估计

$$\|u\|_{\mathscr{L}_p(\Omega)}\leqslant\frac{p}{\min[-c^*+(1-p)c]}\|L(u)\|_{\mathscr{L}_p(\Omega)} \tag{4}$$

成立，这里 $c^*=a^{kj}_{x_kx_j}-b^k_{x_k}+c$. 我们用 $C^{(k)}(\Omega\cup\Sigma)$ 表示这样的函数类：它的直至 k 阶的导数在 $\Omega\cup\Sigma$ 上连续(参看第一章 §2).

利用估计 (4) 和 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 空间线性泛函的表示定理，Fichera 获得了问题 (2)，(3)在 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 空间弱解的存在定理.

对于 $g=0$，问题 (2)，(3) 的弱解定义为空间 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 的函数 $u(x)$，它对于在 $\Sigma_3\cup\Sigma_1$ 上等于 0 的任意 $C^{(2)}(\Omega\cup\Sigma)$ 类函数 $v(x)$，满足积分恒等式

$$\int_\Omega uL^*(v)dx=\int_\Omega vfdx \tag{5}$$

这里

$$L^*(v)\equiv a^{kj}v_{x_kx_j}+b^{*k}v_{x_k}+c^*v,$$
$$b^{*k}\equiv 2a^{kj}_{x_j}-b^k$$

(参看第一章 § 3).

Fichera 也证明了：在具内积

$$(u, v)_{\mathscr{H}} = \int_{\Omega}(a^{kj}u_{x_kx_j}v_{x_j} + uv)dx + \int_{\Sigma_1\cup\Sigma_2}|b|uvds$$

的 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中，问题 (2), (3) 的解的存在性. 其证明基于 Riesz 表示定理.

用椭圆正则化方法可以证明在 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 的函数类或有界函数类中，(2)，(3) 的弱解的存在定理 (参看 [91, 93] 和第一章 § 5). 在这个方法中，对于光滑的 f 和 g，问题 (2)，(3) 的弱解是由椭圆型方程

$$\varepsilon\Delta u + L(u) = f \text{ (在}\Omega\text{内)}, \quad \varepsilon = \text{const} > 0 \tag{6}$$

及边界条件

$$u = g_1, \quad \text{在}\Sigma\text{上} \tag{7}$$

的 Dirichlet 问题的解对 $\varepsilon \to 0$ 取极限而得到的，其中 g_1 是在 $\Sigma_2 \cup \Sigma_3$ 上与 g 重合的光滑函数. 为了证明 (6)，(7) 的解当 $\varepsilon \to 0$ 时存在极限，需要建立这些解在适当空间的范数的一致估计(关于 ε) 以及在区域边界上的导数的估计.

在 Fichera 的论文中，提出了问题 (2) 和 (3) 在空间 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 和 $\mathscr{H}$ 的弱解的唯一性问题.

(2)，(3) 的弱解的唯一性问题最早在 [91] 研究过(也可参看 [93]和第一章 § 6). 这种广义解的唯一性定理，是用椭圆正则化方法证明的. 在方程 (2) 的系数和区域 Ω 的边界广泛假定下，证明了在 (5) 的意义下的弱解在 $\mathscr{L}_p(\Omega)(p \geqslant 3)$ 的函数类中是唯一的. 在这个结果中，假设了集合 Σ_2 在 Σ 中的边界 Γ 是具有 $(m-1)$ 维零测度的.

在第一章 § 6 中，给出问题 (2)，(3) 的一些例子，它们满足 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ 函数类 $(p \geqslant 3)$ 弱解的唯一性定理的全部假定，但是在 $\mathscr{L}_p(\Omega)$ $(p < 3)$ 函数类中，唯一性却不成立. 这些例子表明第一章 § 6 关于弱解唯一性的基本定理在某种意义下是尽可能好的结果.

Phillips 和 Sarason[102] 给出问题 (2)，(3) 的一个例子，其中 Γ 具有正的 $(m-1)$ 维测度，甚至在有界可测函数类中，问题的弱

解不是唯一的.

他们在[102]中将(2)化为对称方程组并且应用对称算子的延拓理论，证明了在空间 $\mathscr{H}$ 中,问题(2),(3)弱解的唯一性定理. 在第一章§6中证明了类似的定理. 后面这个定理,对弱解的要求比在空间 $\mathscr{H}$ 存在有限范数更弱. 但要求(2)的最高阶导数的系数可以连续延拓到 Σ_2 的一个邻域,并且保持特征形式的非负性,还要求具有有界的二阶导数. 在这个定理中,系数可以连续延拓的条件可以换成要求弱解在 Σ_2 上在某种弱意义下取给定值.

对于分片光滑区域也建立了(2),(3)的解的唯一性定理.

在 A. M. Ильин 的学位论文中，研究了一类特殊的具非负特征形式的二阶方程(2),(3)的光滑解的存在性问题(参看[57, 58, 59]). 他发现在这类方程中,为了使(2),(3)的光滑解存在,(2)的系数及其导数必须满足某些不等式.

在[92, 93]中给出了(2),(3)存在光滑解的广泛充分条件. 这些文章还证明了这个问题弱解的光滑性定理. 这些定理的证明基于如下的引理(参看[93],也可以参看第一章§7).

假定对于 R^m 的一切 x 和 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_m)$, $a^{kj}(x)\xi_k\xi_j\geqslant 0$, 还假定 $a^{kj}(x)$ 属于 $C_{(2)}(R^m)$ 类. 那么每个函数 $v\in C_{(2)}(R^m)$ 且满足不等式

$$(a^{kj}_{x_p}v_{x_kx_l})^2\leqslant M a^{kj}v_{x_kx_s}v_{x_jx_s} \tag{8}$$

其中,常数M仅仅依赖于 a^{kj} 的二阶导数. 我们用 $C_{(k)}(\Omega)$ 表示这样的函数类: 它及其直至 k 阶导数在 Ω 内有界. 这个引理对于研究方程(1)的弱解的局部光滑性同样具有重大的应用价值(参看第二章§6).

作为例子,(2),(3)在 $C_{(s)}(\Omega)$ 类中存在解的一个充分条件为: 方程的系数和函数 f 属于 $C_{(s)}(\Omega)$ 类, 区域 Ω 的边界充分光滑,不等式 $c\leqslant -c_0<0$ 成立(这里 c_0 是依赖于 s 的数),并且系数a^{kj} 可以连续延拓到 $\Sigma_0\cup\Sigma_1\cup\Sigma_2$ 的邻域,在该邻域中, a^{kj} 属于 $C_{(s)}$ 类且特征形式 $a^{kj}\xi_k\xi_j$ 非负. 此外,假设集合 Σ_3,$\bar{\Sigma}_2$ 和 $\Sigma_0\cup\Sigma_1$ 没有公共点(参看[92, 93, 147]). 在 Kohn 和 Nirenberg 的论

文[64]中，研究了(2)，(3)光滑解的存在问题（没有假定系数 a^{kj} 可以经过边界连续延拓而具有上面指出的性质）（参看第一章 §9）．他们获得(2)和(3)在 Соболев 空间 $W_2^N(\Omega)$ 存在解的条件．在这些结果中，假设 $\Sigma_0\cup\Sigma_1$ 和 $\overline{\Sigma_2\cup\Sigma_3}$ 的交集是空的，在 Ω 内系数 $c\leqslant -c_0<0$，并且在 Σ_2 上，$b\leqslant -b_0<0$，这里，常数 c_0 和 b_0 是充分大的．为了简单起见，假设方程(2)的系数，Ω 的边界和函数 f 及 g 都是无穷次可微的．在谈到的这篇文章中，用椭圆正则化方法同样获得了(2)，(3)的解．因此在 $\Sigma_0\cup\Sigma_1$ 的邻域中，(2)的左端增加一个乘以 ε 的椭圆算子，其阶数依赖于 N，而对 $\Sigma_0\cup\Sigma_1$ 在 Ω 内的一个邻域外，增加一个乘以 ε 的二阶椭圆算子．在空间 $W_2^N(\Omega)$ 中，建立这个椭圆型方程相应问题的解关于参数 ε 的一致的先验估计．在第一章 §8，我们用其它方法也获得了类似的定理．在那里我们给出问题(2)，(3)的解属于 $C_{(k)}(\Omega)$ 的条件，其中系数 a^{kj} 不能经过边界连续延拓而具有上面指出的性质．对这种情况，证明(2)，(3)的解可以用增加一个带小参数 ε 的二阶椭圆算子将(2)正则化而获得．我们注意：Lions 已经广泛应用椭圆和抛物正则化的方法（例如参看[75]），同样在非线性双曲型方程间断解的研究中，这种方法也广泛地被应用（参看[96]消失粘性法）．类似于椭圆型方程的 Neumann 问题，在[27，110]中研究了(1)的第二边值问题．

研究(2)，(3)解的局部光滑性及与此有关的二阶方程的亚椭圆性问题是具有重大的意义的．算子的亚椭圆性概念是在 Schwartz 的书[120]中引入的（也可参阅[50，51]）．

定义在区域 Ω 内系数无穷次可微的线性微分算子 P，如果对于 $D'(\Omega)$ 内的任意广义函数 $u(x)$ 和包含在 Ω 内的任意区域 Ω_1，由 Pu 在 Ω_1 内无穷次可微的条件可以推出 $u(x)$ 在 Ω_1 内也是无穷次可微的，则算子 P 在 Ω 内是亚椭圆算子．

对于常系数方程和方程组，其亚椭圆性的充分必要条件已经在[50，51]中获得．对于变系数方程和方程组以及对于拟微分算子，也找到了亚椭圆性的各种充分条件．

L. Hörmander 在 [55] 中证明了：二阶亚椭圆方程在 Ω 的每一个点上有非负特征形式（可能乘以 -1 后）（也可参看第二章 § 3）。

在 [55] 中，Hörmander 给出形式为

$$Pu \equiv -\sum_{j=1}^{r} X_j^2 u + iX_0 u + cu = f \tag{9}$$

的二阶方程亚椭圆性的一个充分条件，其中 $X_j(j=0,1,\cdots,r)$ 是具有无穷次可微实系数的一阶算子

$$X_j \equiv \sum_{k=1}^{m} a_j^k(x) D_k;$$

$$D_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k}$$

对算子 (9)，Hörmander 的条件是关于算子 $X_j(j=0,1,\cdots,r)$ 的李代数的条件. 算子 (9) 在区域 Ω 的亚椭圆性的充分条件是：在 Ω 的每一点上，在算子 $X_j(j=0,1,\cdots,r)$ 和由这些算子生成的换位子中，存在 m 个线性独立算子. 这个 Hörmander 条件也是算子 P 在区域 Ω 中的亚椭圆性的必要条件. 如果只限于形式为 (9) 的一类算子，对于每一点 x，在算子 X_j 和由它们生成的换位子中，刚好存在 μ 个线性独立算子，这里 $\mu \leqslant m$ 与 x 无关. 对这种情况，我们说算子组 $\{X_0,\cdots,X_r\}$ 在 Ω 内有秩 μ. Hörmander 的证明利用了李代数和某些特殊函数空间的理论.

[112] 给出算子 (9) 亚椭圆性的 Hörmander 定理的另一证明. 第二章 § 5 给出更一般的定理. 这些证明是基于拟微分算子的理论的. 借助于拟微分算子获得了 (9) 的解在空间 $\mathscr{H}_s$ 的范数的先验估计；利用第二章 § 4 中证明了的定理，由这些估计可以推出 P 的亚椭圆性. 由第二章 § 5 中所建立的先验估计同样可以推出 (9) 的广义解的局部光滑性.

在第二章 § 5 中，我们列举了一类形式为 (9) 的亚椭圆算子，对于它们，在 Ω 的某点集 M 上 Hörmander 条件可能不满足. 证明

算子 P 在 Ω 是亚椭圆的，如果：1) 在 $\Omega\backslash M$ 中，算子组 $X_j(j=0,1,\cdots,r)$ 有秩 m，其中 M 是位于有限个 $m-1$ 维光滑流形 $\mathfrak{M}$ 上的有界点集，其闭包在 Ω 内；2) 在 M 的每一点 x 上，或者对于某些 $j=1,\cdots,r$，

$$\sum_{k=1}^{m} a_j^k \Phi_{x_k} \neq 0$$

或者在

$$\sum_{j=1}^{r} \left| \sum_{k=1}^{m} a_j^k \Phi_{x_k} \right| = 0$$

的情况下满足条件

$$\sum_{j=1}^{r} - X_j^2 \Phi + i X_0 \Phi \neq 0$$

其中，$\Phi(x_1,\cdots,x_m)=0$ 是 $\mathfrak{M}$ 在 x 点邻域内的方程，且

$$\operatorname{grad} \quad \Phi \neq 0.$$

对于点集 M 只由一点 x^0 所组成的情况，如果在这点上，系数 $a_j^k(k=1,\cdots,m;\ j=0,\cdots,r)$ 中有一个不为 0，则算子 (9) 在 Ω 内是亚椭圆的． В. С. Федий[28] 也找到了形式为 (9) 但不满足 Hörmander 条件的某些亚椭圆算子．

并不是每一个系数无穷次可微的方程 (1) 都可化为方程 (9) 的形式． Hilbert 构造过一个两自变量 x 和 y 的 6 次非负多项式 $P(x,y)$ 的例子(参看 [48])，它不能表示为有限的多项式的平方和。容易证明：形式为

$$L(u) \equiv z^6 P\left(\frac{x}{z},\ \frac{y}{z}\right)\Delta u + Tu$$

的算子，在原点的任何邻域内不可能表示为 (9) 的形式，其中 T 是系数无穷次可微的一阶算子，而 $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$.

对于具非负特征形式形为 (1) 的一般二阶方程来说，[113]给出了一个亚椭圆性条件．在第二章 § 6 中给出更一般的定理．

令 $L^0(x,\xi) = a^{kj}(x)\xi_k\xi_j$. 我们用 L^0 表示具有象征 $L^0(x,\xi)$

的拟微分算子(参看第二章§2). 对于任意的拟微分算子 A, 我们分别用 $A^{(j)}$ 和 $A_{(j)}$ 表示相应于象征 $\partial A(x,\xi)/\partial\xi_j$ 和 $D_jA(x,\xi)$ 的拟微分算子,其中 $A(x,\xi)$ 是算子 A 的象征,而 $D_j=-i\partial/\partial x_j$. 我们将算子 $L(u)$ 写为形式

$$L(u)\equiv -D_j(a^{kj}D_ku)+iQu+cu$$

其中, $Qu\equiv(b^k-a^{kj}_{x_j})D_ku$. 我们考虑算子组 $\{Q_0,Q_1,\cdots,Q_{2m}\}$, 其中 $Q_0=Q$, 当 $j=1,\cdots,m$ 时, $Q_j=L^{0(j)}$; $j=m+1,\cdots,2m$ 时,$Q_j=E_{-1}L^0_{(j-m)}$;E_{-1} 是象征为 $\varphi(x)(1+|\xi|^2)^{-1/2}$ 且 $\varphi(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ 的拟微分算子. 对于任意的多重指标 $I=(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$(其中, 对于 $l=1,\cdots,k$, $\alpha_l=0,\cdots,2m$), 我们设 $|I|=\Sigma_1^k\lambda_l$, 其中,当 $\alpha_l=1,\cdots,2m$ 时 $\lambda_l=1$, 而当 $\alpha_l=0$ 时 $\lambda_l=2$. 对于每个多重指标 I, 我们联想到算子 $Q_I=\mathrm{ad}Q_{\alpha_1}\cdots\mathrm{ad}Q_{\alpha_{k-1}}Q_{\alpha_k}$, 其中,对于任意算子 A 和 B, 记 $\mathrm{ad}AB=AB-BA$.

下面我们考虑由算子组 $\{Q_0,\cdots,Q_{2m}\}$ 生成的算子 Q_I. 算子 Q_I 可以表示为形式 $Q_I=Q_I^0+T_I$, 其中算子 T_I 的阶数至多为零, 而 Q_I^0 是象征为 $q_I^0(x,\xi)$ 的拟微分算子. 我们说算子组在紧集 K 上有秩 m: 如果存在一个数 $R(K)$, 使得对于所有 $x\in K$ 和 R^m 的一切 ξ,下式

$$1+\sum_{|I|\leqslant R(K)}|q_I^0(x,\xi)|^2\geqslant C_1(1+|\xi|^2),$$

$$C_1=\text{const}>0 \tag{10}$$

成立.

如果在每个属于 Ω 的紧集 K 上,算子组 $\{Q_0,\cdots,Q_{2m}\}$ 的秩等于 m, 那么形式(1)的算子 L 在 Ω 内是亚椭圆的. 如果算子组 $\{Q_0,\cdots,Q_{2m}\}$ 在 $\Omega\backslash M$ 的每个紧集上有秩 m, 并且在 M 的点上有

$$a^{kj}\Phi_{x_k}\Phi_{x_j}+|a^{kj}\Phi_{x_kx_j}+b^k\Phi_{x_k}|>0$$

(集合 M 具有前面指出的性质),则算子 L 在 Ω 内也是亚椭圆的.在此,象在形式为(9)的算子的类似定理中那样,在亚椭圆性定义中的区域 Ω_1, 或者包含集合 M 或者与它不相交. 在这些条件下,方

程(1)具有广义解局部光滑的性质，并且在空间 $\mathscr{H}_s$ 中可以建立一个类似于已知的 Schauder 内估计的先验估计[118]。

如果集合M由一点组成，则在Ω内，要使(1)是亚椭圆的，只须在该点满足不等式

$$\sum_{j=1}^{m} a^{jj} + |b^j| > 0$$

就够了. 形式为 (1) 的算子亚椭圆性的研究也是以第二章 § 6 的拟微分算子理论为基础来实现的.

对于具有解析系数的方程(1)和(9)，已经获得亚椭圆性的充分必要条件(参看[20]，[98]和第二章 § 8).

容易验证 Brown 运动方程满足上面叙述的亚椭圆性条件. 在 Т. Г. Генчев[43]，Hörmander[55]，А. М. Ильин[57] 等人的文章中讨论过类似于 Brown 运动方程的方程类，而且在 [55] 和 [57] 中构造了这类方程的基本解.

对于满足 Hörmander 条件或条件(10)的亚椭圆方程，在非光滑区域的第一边值问题的解，可以用类似于 М. В. Келдыш[63]用以研究在Ω的边界退化的二阶椭圆型方程的方法来构造（参看第二章 § 7). 在这个过程中，用区域 $\Omega_1,\cdots,\Omega_n,\cdots$来逼近区域 Ω，并且 $\Omega_n\subset\Omega_{n+1}$，将连续边界函数 g 连续延拓到Ω内，再在 Ω_j 内考虑椭圆方程

$$\varepsilon\Delta u + L(u) = f$$

满足边界条件(在 Ω_j 的边界) $u_j^\varepsilon = g$ 的解 u_j^ε. 根据第二章 § 5 和 § 6 证明过的先验估计，证明在内点上当 $\varepsilon\to 0$ 且 $j\to\infty$ 时，序列 $u_j^\varepsilon(x)\to u(x)$. 用闸函数方法证明问题 (2)，(3) 的解 $u(x)$ 的边界连续性.

具非负特征形式的二阶方程的解的定性性质已经有所研究. 在[29]中 Fichera 证明了(1)的光滑解的极大值原理，在[91]和第一章 § 5 中证明了广义解的同样原理(也可以参看第一章 § 1). 我们要注意在第一章 § 1 中所证的极大值原理和在[29]及第一章 § 2 中所证明的极大值原理的定理之间的差异. 在 Pucci 的论文[108,109]

和 А Д. Александров 的论文[1-5]中对具非负特征形式的一般二阶方程，在 Bony 的论文[15-17]中对形式(9)的方程，都进行了强极大值原理的研究(参看第三章§1).

在G的每点x上，考虑相应于矩阵 $\|a^{kj}\|$ 的正特征值的特征向量，并令 $E(x)$ 表示由这些向量生成的线性空间. 如果在曲线 l 上每点的邻域内，存在向量场 $\bar{Y}=(Y_1(x),\cdots,Y_m(x))$，使得 $Y_j\in C^{(1)}$，并且在邻域的每点 x 上，向量 $(Y_1(x),\cdots,Y_m(x))$ 位于平面 $E(x)$ 内，$a^{kj}(x)Y_k(x)Y_j(x)\geqslant \text{const}>0$，而曲线 l 是向量场 $\bar{Y}$ 的轨线，则称曲线 l 为方程(1)的椭圆性曲线. 如果集合 $\mathfrak{M}$ 的任意两点可以用有限段椭圆性曲线弧段组成的曲线联结，并且不存在真正包含 $\mathfrak{M}$ 而具有这种性质的集合，则称集合 $\mathfrak{M}$ 为方程(1)的椭圆连通集合. 如果整个区域 Ω 是一个椭圆连通集合，那么称方程(1)在 Ω 内椭圆连通. 不难找到方程在 Ω 是椭圆连通但不是椭圆型方程的例子.

对于方程(1)，强极大值原理有如下形式(参看[1—5]和第三章§1)：设在区域 Ω 内 $L(u)\geqslant 0$，并且系数 $c(x)$ 和 $M=\sup_\Omega u$ 在 Ω 内满足 $Mc\leqslant 0$. 如果对于某点 $x^0\in\Omega$，$u(x^0)=M$，则在包含点 x^0 的椭圆连通集合上，或者 $u\equiv 0$，或者 $u\equiv M$ 并且 $c\equiv 0$. 对于方程(1)，А. Д. Александров[1-5] 也证明了类似于抛物型方程强极大值原理的定理. 对于形式为

$$Pu=-\sum_{j=1}^{r}X_j^2u+iX_0u+cu=f$$

的方程有关强极大值原理的定理已由 Bony[15-17] 证明. 设 $\bar{X}_j(x)$ 表示向量 $(a_j^1(x),\cdots,a_j^m(x))$，$F$ 表示 Ω 上使 $u(x)=M=\sup_\Omega u$ 的点集. 我们将假设 $c\leqslant 0$ 而 $M\geqslant 0$.

[15]证明了：如果 $P(u)\geqslant 0$，$u\in C^{(2)}(\Omega)$ 并且向量场 $\bar{X}_j(x)$ $(j=1,\cdots,r)$ 的轨线 $x(t)$ 包含集合 F 的一点 $x(t_0)$，则整条轨线 $x(t)$ 属于 F. 对于算子组 $\{X_1,\cdots,X_r\}$ 在 Ω 具有秩 m 的情况，这个方程的强极大值原理与 Laplace 方程的强极大值原理具有相同的形式：如果在 Ω 内 $P(u)\geqslant 0$ 并且 $c\equiv 0$，$u\in C^{(2)}(\Omega)$

而在Ω的点x^0上取最大正值M,则在Ω内 $u\equiv M$。

对于算子组 $\{X_1,\cdots,X_r\}$ 在Ω的每点的秩 $\mu<m$ 的情况，方程(9)的强极大值原理与热传导方程的强极大值原理具有相同的形式. 也就是说，设在Ω内 $P(u)\geqslant 0$, $u\in C^{(2)}(\Omega)$ 并且 $u(x)$ 在Ω的点x^0上取得最大正值M，那么在Ω的这些点上$u\equiv M$: 1) 它可以用一条由有限段向量场 $\bar{X}_j(x)(j=0,\cdots,r)$ 的轨线弧段组成的曲线联结到x^0点; 2)当沿这条曲线离开点x^0时,位于这曲线上的向量场 $\bar{X}_0(x)$ 的轨线的任何部分必须顺着向量 $\bar{X}_0(x)$ 的方向.

在 Bony 的论文[15-17]中,证明了具有解析系数形式为(9)的方程的 Cauchy 问题的唯一性定理和 Harnack 定理. 在区域Ω的所有点上适合 $u\geqslant M$ 的条件下，A. Д. Александров[1-5] 研究了在Ω内满足关系式 $L(u)\leqslant 0$ 的函数 $u(x)$ 的等位面集合 $u=M$.

大量的文章致力于研究形式为

$$u_t=a^{kj}(x,t)u_{x_kx_j}+b^k(x,t)u_{x_k}+c(x,t)u+f(x,t) \qquad (11)$$

的退化抛物型方程,其中在所考虑区域的所有的点上,$a^{kj}(x,t)\xi_k\xi_j\geqslant 0$. 显然(11)是(1)的特殊情况. 一系列的文章（例如参看[92, 124]等等）用各种方法研究方程(11)的 Cauchy 问题. 我们注意到,也可以用第一章和第二章的方法研究(11)在$t=0$时取初始值的 Cauchy 问题(参看[92]).

联系混合型方程 Tricomi 问题的研究，引起了研究在边界上退化的双曲型方程的兴趣. 在[88, 89]中研究了二阶方程的 Cauchy 问题，在所考虑区域的每个点上，方程的特征形式有一个负的特征值，而其余特征值为正或为零. 这种方程的 Cauchy 问题，可用类似于研究具非负特征形式的二阶方程所用的方法来进行研究. 在[88, 89]中和第三章 §2 中利用双曲正则化方法，获得方程

$$u_{tt}=L(u)+f \qquad (12)$$

具初始条件