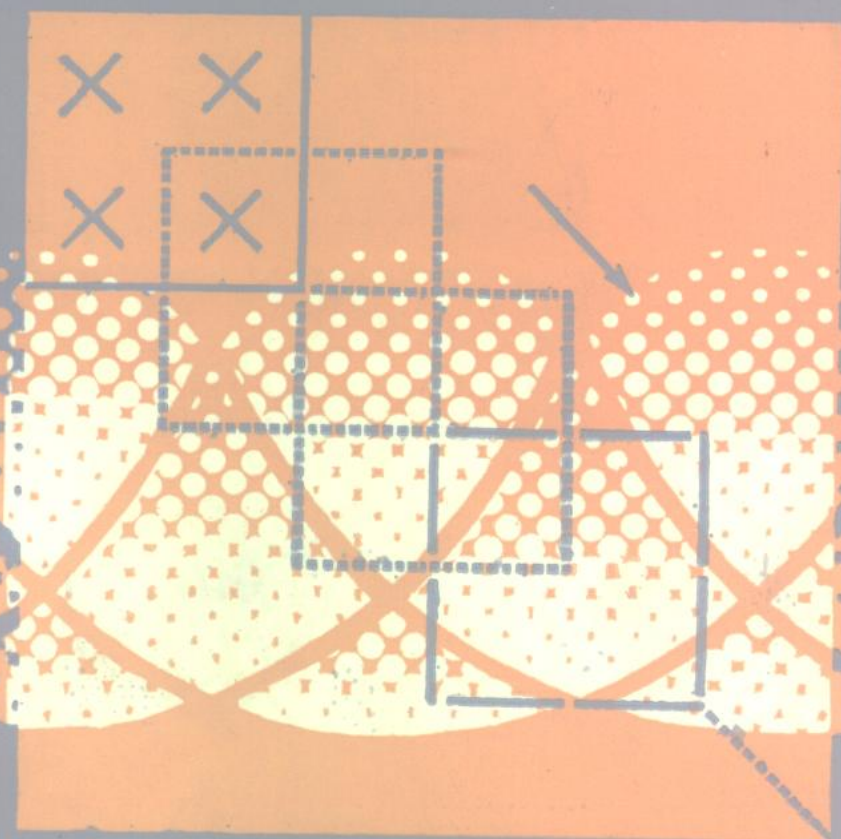


结构分析的 样条有限条法

吴兹潜 (中山大学)

张佑启 (香港大学)

范寿昌

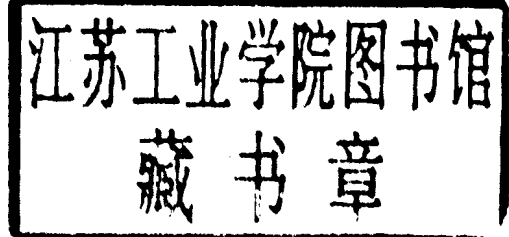


广东科技出版社

结构分析的样条有限条法

Jiegou Fenxi de yangtiao youxiantiaofa

吴兹潜 张佑启 范寿昌
(中山大学) (香港大学)



广东科技出版社

结构分析的样条有限条法

吴兹潜 张佑启 范寿昌

(中山大学) (香港大学)

•

广东科技出版社出版

广东省新华书店发行

韶关新华印刷厂印刷

787×1092毫米 16开本 20.5印张 470,000字

1986年10月第1版 1986年10月第1次印刷

印数 1—3,000册

统一书号13182·132 定价4.50元

内 容 简 介

本书介绍结构分析的样条有限条法，用三次 B 样条插值函数代替经典有限条法的梁振动函数，从而提高收敛速度和处理复杂边界问题的能力。
内容包括：基本理论、薄板弯曲、平面和空间应力分析、折板分析、扁壳分析、板壳振动分析等。每章附有丰富的工程算例，书末附有薄板弯曲和折板分析的源程序。

本书可供理科、工科院校师生、工程技术人员阅读和参考。

216B/53
11

序 言

一九八〇年我接到华罗庚教授来信，建议我和中山大学计算机科学系合作搞科学研究。经过一番联络以后，我邀请了中山大学吴兹潜副教授来港共同开展样条有限条法的研究。由一九八一年四月到九月的半年期间，我和吴兹潜、范寿昌（原香港大学土木系研究生，现已获得博士学位）一起工作，《结构分析的样条有限条法》就是我们三人的共同研究成果。

经典有限条是我在一九六六年首先提出的，和有限元法比较，它具有推导简易，未知数少和计算量少等优点。它的缺点是对集中荷重收敛慢以及不适用于某些较复杂的支承条件。样条有限条法采用三次 B 样条函数代替经典有限条法中的梁振动函数，则可以克服上述缺点。事实证明，我们的判断是完全正确的。

我对香港大学计算中心的帮助，使得研究工作能够顺利进行，对中山大学科研处、计算机科学系组织有关专家阅读本书的原稿及提供意见，表示衷心的感谢。

特别需要提出的是，何广乾院长、罗嵩发教授、李岳生教授、王磊副教授、刘世龄博士、陈树坚先生、罗恩先生对本书提出了宝贵的意见，在这里我表示衷心的感谢。

由于作者水平所限，本书错漏在所难免，敬请读者给予批评指正。

张佑启

一九八二年十一月十五日

于香港大学

目 录

一、引言	1
1.1 位移函数的选择	2
1.2 通用的位移函数	2
1.3 最小势能原理	19
参考文献	22
二、板的弯曲	23
2.1 低阶矩形条	23
2.2 经典有限条高阶条与样条低阶条的比较	27
2.3 弹性地基板	27
2.4 连续板	29
2.5 角支承板	31
2.6 柱支承板	31
2.7 非均布分划	36
2.8 样条曲线条	36
2.9 样条斜板条	40
2.10 数值算例	41
参考文献	80
三、平面应力分析	82
3.1 样条矩形平面应力条	82
3.2 高阶条	87
3.3 曲线条	88
3.4 数值算例	89
参考文献	108
四、折板 扁壳结构分析	110
4.1 样条矩形条	110
4.2 坐标变换	118
4.3 样条折锥壳条	119
4.4 样条圆柱壳条	124
4.5 样条扁壳条	125
4.6 数值算例	127
参考文献	208
五、板壳的振动分析	211
5.1 自由振动的矩阵原理	211

5.2	条的相容质量矩阵	211
5.3	弯曲板条的相容质量矩阵	212
5.4	弯曲板混合条的相容质量矩阵	213
5.5	样条平面应力板条的相容质量矩阵	216
5.6	样条折板矩形条的相容质量矩阵	216
5.7	样条折锥壳条的相容质量矩阵	218
5.8	样条圆柱壳条的相容质量矩阵	220
5.9	样条扁壳条的相容质量矩阵	220
5.10	数值算例	220
	参考文献	228
六、	样条有限层法及有限棱柱法	231
6.1	样条有限层法	231
6.2	样条有限棱柱法	235
	参考文献	238
附录1	薄板弯曲程序(ICL 1904S)	245
附录2	折板分析程序(ICL 1904S)	280

一、引言

本书向读者介绍对于规则的弹性薄板、扁壳、折板、箱形桥等结构分析十分有用的样条有限条法。上述的结构分析完全可用有限元法^[3, 4, 5]来求解, 但用有限元法所要求的未知数个数多, 计算量大。Y. K. Cheung的经典有限条法^[1]与有限元法比较, 它具有推导简易、未知数个数少和计算量小的优点。但经典有限条法的应用范围是相当狭窄的, 它对于集中荷重的情形收敛慢, 也不适用于较复杂的支承条件。样条有限条法采用三次B样条插值函数来代替经典有限条法的梁振动函数, 这一简单的修正, 使样条有限条法不但保持经典有限条法的优点, 而且克服了经典有限条法的缺点。突出的优点是: 样条有限条法能够统一地、简单地解决各种复杂的边界问题, 而无需作任何特殊的处理。

有限条法将规则的几何形状的结构划分成条形(二维)、棱柱或层(三维)等许多单元。这些单元有一对对边、一对或几对相对的面与结构的边界重合, 沿一个或两个坐标轴方向结构的几何形状不变, 因而沿全长条的宽度或棱柱和层的横截面不变。

有限条法和有限元法一样都是位移法, 有限条法是有限元法的一种特殊形式。它们的区别在于单元的位移函数的构造上。经典有限条法的位移函数是乘积型的, 它沿某一方向采用简单的多项式插值函数, 而沿其它方向则采用连续的光滑的级数。样条有限条法的位移函数的构造和经典有限条法的区别, 在于沿另一方向采用三次B样条插值函数。

样条有限条法的位移函数是乘积型的, 因而它能把二维问题简化为一维问题, 三维问题简化为二维问题或一维问题来处理。对于一个样条板条来说, 位移函数可以写成

$$w = [C] \otimes [\Phi] \{\delta\}. \quad (1.1)$$

这里, $[C]$ 是一行矩阵, 它的元素是 x 的函数, $[\Phi]$ 也是一行矩阵, 它的元素是 y 的函数, 它是三次B样条函数基, $\otimes$ 是Kronecker符号, $[C] \otimes [\Phi]$ 表示行矩阵 $[C]$ 内的元素都乘上行矩阵 $[\Phi]$, $\{\delta\}$ 是一列矩阵, 它表示广义位移。

样条有限条法要求将连续体离散成条形单元, 使得在最后公式中只含有有限个未知数。解题的具体步骤如下:

(1) 用假想的线(面)将连续体划分成若干条形单元(棱柱单元、有限层单元), 又将假想中的条形或面离散成点格。这些条形(棱柱、层)的端部往往构成连续体边界的一部分, 相邻两个单元的节线以及节线上的节点彼此重合。节点上的自由度称为节点位移参数, 它们通常与位移和位移对变量 x 的一阶偏导数(转角)有关, 它们还可以包含非位移项, 例如应变(包括正应变、剪应变、弯曲和扭曲曲率);

(2) 构造用节点位移参数线性表示的位移函数, 并以此来表征位移场。这样就能够表示每个单元内的应变和应力场(包括正应力、剪应力、弯曲和扭矩);

(3) 有了位移函数, 可由虚功原理或最小势能原理, 获得刚度矩阵和荷载列阵;

(4) 迭加所有条的刚度矩阵和荷载列阵, 形成一组总刚度矩阵方程。一般说来, 它是等带宽稀疏的矩阵, 通常用追赶法来求解。

1.1 位移函数的选择

位移函数的选择是能否顺利地解决问题的关键。虽然不同的位移函数(假设都是正确的)能收敛于同一结果,但其收敛速度却迥然不同。如果位移函数的选择是错误的,必然会产生荒谬的答案或出现不收敛的情形。为了确保所选择的位移函数能收敛于真解,位移函数必须满足下述的条件:

(1) 位移函数的三次B样条函数部分,应满足预先给定的边界条件(振动问题仅需要满足位移条件)。例如,一个弯曲的简支板条的位移函数,其两端必须满足挠度 w 和法向曲率 $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ 都为零的条件。顺带指出,在变分方法中,端部的简支条件只给出挠度 $w=0$ 就可以了,因为法曲率为零是自然边界条件,它在变分方程中自动满足。自由端的边界条件 $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$, $\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}=0$,也是自然边界条件,在变分方程中能自动满足,无需让它们预先适合。这些情形在下文关于位移函数的构造里,将清楚地显示出来;

(2) 位移函数的多项式部分,应该能表示 x 方向的常应变状态,保证网格无限细分时应变分布能收敛于真正的应变;

(3) 位移函数必须满足相邻条节点上的位移协调性,即转角和位移值的连续性。

总之,所选择的位移函数,必须使能量公式中所需要的应变在条的分界线上保持有界。

在平面弹性问题中,应变仅涉及一阶导数,因而在条的分界节线上只需位移连续;弯曲问题中应变涉及二阶偏导数,在条的分界节线上要求位移和转角都连续。

只要遵循这些条件,在分界线上将不会出现无限的应变,因为分界线被认为是面积趋于零的一个很窄很窄的条,因而不影响能量,这样就能保证所有条的势能简单迭加后等于该弹性体的总势能。

1.2 通用的位移函数

位移函数由两部分组成,一部分是多项式,另一部分是三次B样条插值函数,它适合给定的边界条件。下面分别进行讨论。

1.2.1 位移函数的三次B样条函数部分^[3]

1. 三次B样条函数

最常用的样条函数是一种被称为三次B样条的函数。从广义四阶微分方程

$$Y^{(4)} = \sum_{j=-1}^{n-1} \beta_j \delta(x - x_j) \quad (1.2)$$

的解可推导出这种函数。这里 $x_{j+1} - x_j = h$, $j = -1, 0, 1, \dots, n$ 。

定义 三次样条函数是四阶微分方程(1.2)的解,它的表达式为

$$Y(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \frac{\alpha_2}{2} x^2 + \frac{\alpha_3}{6} x^3 + \sum_{j=1}^{n-1} P_j (x - x_j)_+^3 / 3!, \quad (1.3)$$

它分段为三次多项式, 有直至二阶的连续导数, 但三阶导数在节点 $x = x_j$ 处有跳跃, 即

$$Y^{(3)}(x_{j+0}) - Y^{(3)}(x_{j-0}) = P_j. \quad (1.4)$$

当所有的 $P_j = 0$ 时, $Y(x)$ 的三阶导数也连续. 如果梁在节点 $x = x_j$ 处承受集中荷载 P_j , 在集中荷载 P_j 作用下的挠度曲线就是三次样条函数 $Y(x)$ (见图1.1).

以 E^1 表示移位算子,

$$E^1 f(x) = f(x + h). \quad (1.5)$$

以 I 表示单位算子,

$$If(x) = f(x). \quad (1.6)$$

以 δ_h 表示对称差分,

$$\delta_h f(x) = (E^{\frac{h}{2}} - E^{-\frac{h}{2}}) f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right). \quad (1.7)$$

显然

$$\delta_h = (E^{\frac{h}{2}} - E^{-\frac{h}{2}}) = (I - E^{-h}) E^{\frac{h}{2}}, \quad (1.7a)$$

$$\begin{aligned} \delta_h^4 f(x) &= \sum_{j=0}^4 (-1)^j \binom{4}{j} E^{(2-j)h} f(x) \\ &= \sum_{j=0}^4 (-1)^j \binom{4}{j} f(x + (2-j)h). \end{aligned} \quad (1.7b)$$

对 $(x - x_j)_+^3 / 3!$ 进行四次对称差分得

$$\begin{aligned} &\delta_h^4 \left[(x - x_j)_+^3 / 3! \right] \\ &= h^3 \sum_{i=0}^4 (-1)^i \binom{4}{i} \left(\frac{x - x_0}{h} - (i + j - 2) \right)_+^3 / 3!. \end{aligned} \quad (1.7c)$$

命

$$\varphi_j(x) = \delta_h^4 \left[(x - x_j)_+^3 / 3! \right] / h^3, \quad (1.8)$$

得

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} (x - x_{j-2})^3 & \text{当 } x_{j-2} \leq x \leq x_{j-1}, \\ h^3 + 3h^2(x - x_{j-1}) + 3h(x - x_{j-1})^2 - 3(x - x_{j-1})^3 & \text{当 } x_{j-1} \leq x \leq x_j, \\ h^3 + 3h^2(x_{j+1} - x) + 3h(x_{j+1} - x)^2 - 3(x_{j+1} - x)^3 & \text{当 } x_j \leq x \leq x_{j+1}, \\ (x_{j+2} - x)^3 & \text{当 } x_{j+1} \leq x \leq x_{j+2}, \\ 0 & \text{在其它处.} \end{cases} \quad (1.9)$$

由此可见, $\varphi_j(x)$ 仍然是分段的三次函数, 称 $\varphi_j(x)$ 为三次 B 样条函数 (见图1.2).

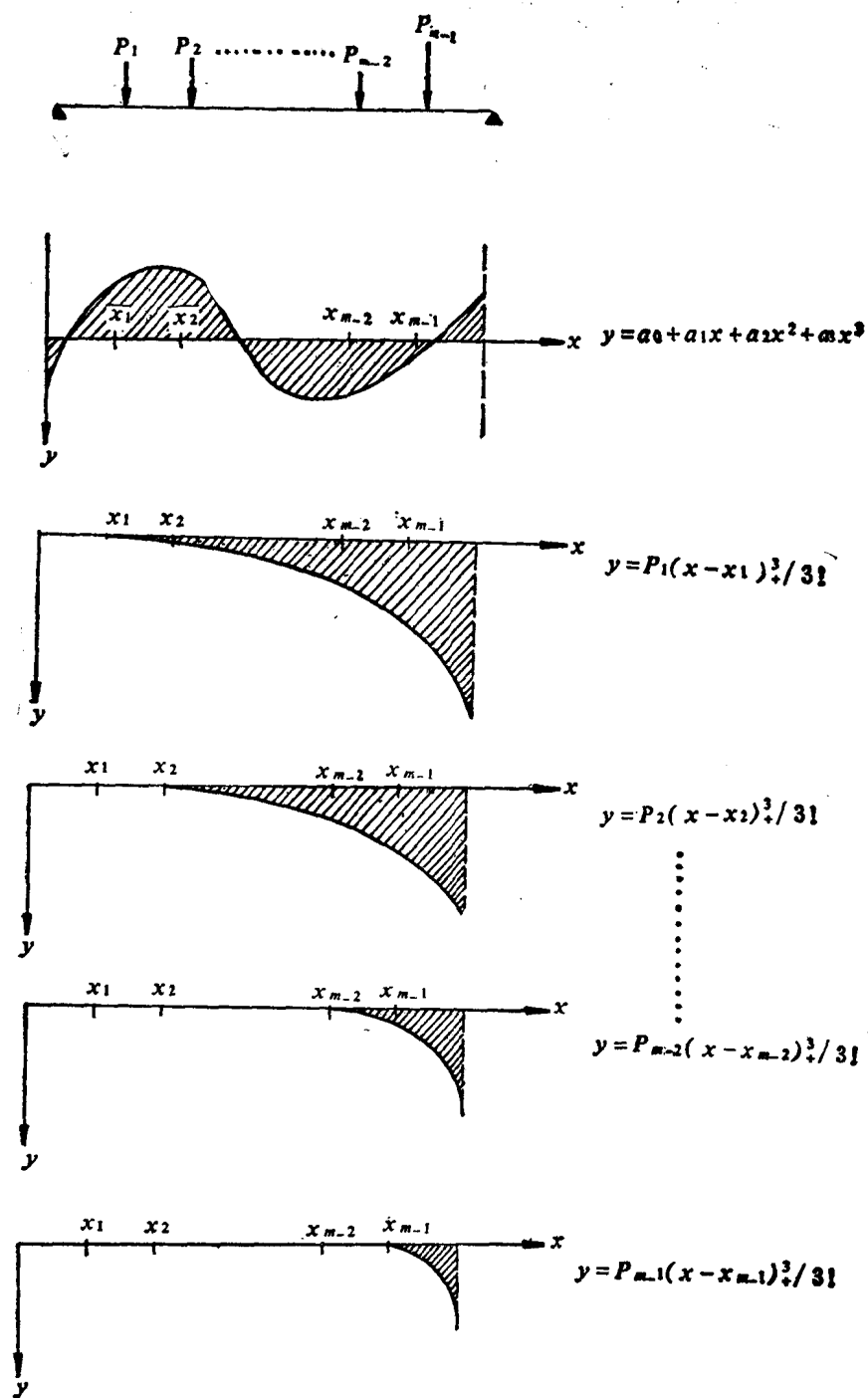


图1.1 三次样条插值函数的分解图

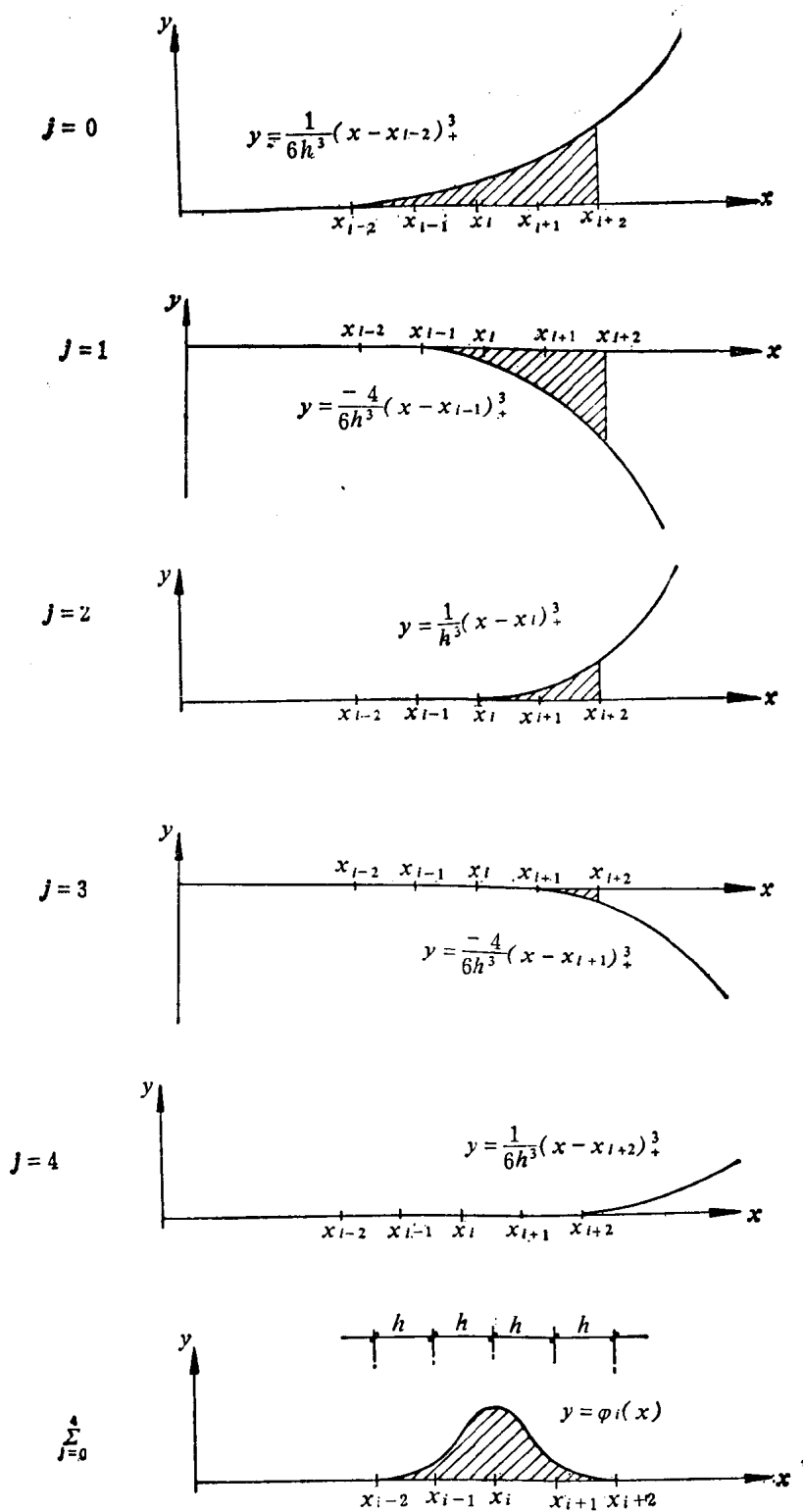


图1.2 三次B样条函数的分解图

在区间 $[a, b]$ 作分划

$$\pi: x_{-1} < a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b < x_{n+1},$$

在分划 π 上的三次B样条插值函数可以表示为

$$Y(x) = \sum_{j=-1}^{n+1} a_j \varphi_j(x), \quad x \in [a, b]. \quad (1.10)$$

三次B样条函数 φ_j 及其一阶、二阶导数 $\varphi_j'(x)$, $\varphi_j''(x)$ 在节点上的值见表1.1.

表1.1 样条函数在节点处的值

节点 函 数	x_{j-2}	x_{j-1}	x_j	x_{j+1}	x_{j+2}	其它处
φ_j	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0
φ_j'	0	$\frac{1}{2h}$	0	$-\frac{1}{2h}$	0	0
φ_j''	0	$\frac{1}{h^2}$	$-\frac{2}{h^2}$	$\frac{1}{h^2}$	0	0

在区间 $[a, b]$ 上, 函数 $Y = 1$, $Y = x$, $Y = x^2$, $Y = x^3$ 都可以通过 $\{\varphi_j\}$ 来线性表示. 下面将证明下列等式成立:

$$\begin{aligned} \sum_{j=-1}^{n+1} \varphi_j(x) &= 1, \\ \sum_{j=-1}^{n+1} x_j \varphi_j(x) &= x, \\ \sum_{j=-1}^{n+1} \left(x_j^2 - \frac{h^2}{3} \right) \varphi_j(x) &= x^2, \\ \sum_{j=-1}^{n+1} \left(x_j^3 - h^2 x_j \right) \varphi_j(x) &= x^3. \end{aligned} \quad (1.11)$$

三次B样条函数的插值函数可以表示成

$$Y(x) = \sum_{j=-1}^{m+1} c_j \varphi_j(x),$$

在 $x = x_i + x^*$ 处, φ_{i-1} , φ_i , φ_{i+1} , φ_{i+2} 不为零(见图1.3), 从而得

$$\begin{aligned} Y(x_i + x^*) &= \sum_{j=-1}^{m+1} c_j \varphi_j(x_i + x^*) \\ &= c_{i-1} \varphi_{i-1}(x_i + x^*) + c_i \varphi_i(x_i + x^*) \\ &\quad + c_{i+1} \varphi_{i+1}(x_i + x^*) + c_{i+2} \varphi_{i+2}(x_i + x^*). \end{aligned}$$

记

$$\{H_x\} = \begin{Bmatrix} h^3 \\ h^2 x^* \\ h x^{*2} \\ x^{*3} \end{Bmatrix}$$

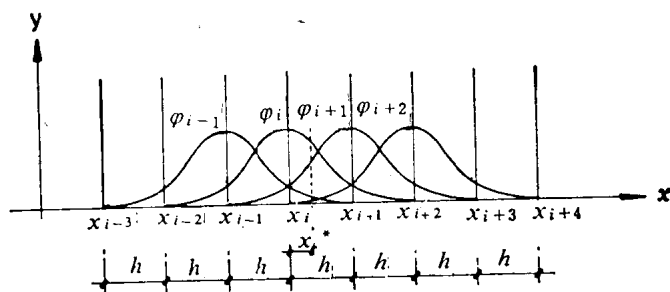


图1.3 在 $x = x_i + x^*$ 处非零的三次B样条函数

则

$$\begin{aligned} \varphi_{i-1}(x_i + x^*) &= -\frac{1}{6h^3} (h - x^*)^3 \\ &= -\frac{1}{6h^3} [1, -3, 3, -1] \{H_x\}, \\ \varphi_i(x_i + x^*) &= \frac{1}{6h^3} [h^3 + 3h^2(h - x^*) + 3h(h - x^*)^2 - 3(h - x^*)^3] \\ &= \frac{1}{6h^3} [4, 0, -6, 3] \{H_x\}, \\ \varphi_{i+1}(x_i + x^*) &= \frac{1}{6h^3} (h^3 + 3h^2x^* + 3hx^{*2} - 3x^{*3}) \\ &= \frac{1}{6h^3} [1, 3, 3, -3] \{H_x\}, \\ \varphi_{i+2}(x_i + x^*) &= \frac{1}{6h^3} x^{*3} \\ &= \frac{1}{6h^3} [0, 0, 0, 1] \{H_x\}. \end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned} Y(x_i + x^*) &= \frac{1}{6h^3} (c_{i-1} [1, -3, 3, -1] + c_i [4, 0, -6, 3] \\ &\quad + c_{i+1} [1, 3, 3, -3] + c_{i+2} [0, 0, 0, 1]) \{H_x\}. \end{aligned}$$

样条函数有如下性质:

$$(1) \sum_{j=-1}^{m+1} \varphi_j(x) \equiv 1.$$

因为当 $x = x_i + x^*$ 和 $c_j = 1$ ($j = -1, \dots, m+1$) 时,

$$\begin{aligned} Y(x_i + x^*) &= \sum_{j=-1}^{m+1} \varphi_j(x_i + x^*) \\ &= \frac{1}{6h^3} ([1, -3, 3, -1] + [4, 0, -6, 3] \\ &\quad + [1, 3, 3, -3] + [0, 0, 0, 1]) \{H_*\} \\ &= \frac{1}{6h^3} [6, 0, 0, 0] \{H_*\} \\ &= \frac{1}{6h^3} (6h^3) \\ &= 1, \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{j=-1}^{m+1} \varphi_j(x) \equiv 1.$$

$$(2) \sum_{j=-1}^{m+1} x_j \varphi_j(x) \equiv x.$$

因为当 $x = x_i + x^*$ 和 $c_j = x_j$ ($j = -1, \dots, m+1$) 时,

$$\begin{aligned} Y(x_i + x^*) &= \sum_{j=-1}^{m+1} x_j \varphi_j(x_i + x^*) \\ &= \frac{1}{6h^3} \left((x_i - h) [1, -3, 3, -1] \right. \\ &\quad + x_i [4, 0, -6, 3] + (x_i + h) [1, 3, 3, -3] \\ &\quad \left. + (x_i + 2h) [0, 0, 0, 1] \right) \{H_*\} \\ &= \frac{1}{6h^3} (6x_i h^3 + 6h^3 x^*) \\ &= x_i + x^*, \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{j=-1}^{m+1} x_j \varphi_j(x) \equiv x.$$

$$(3) \sum_{j=-1}^{m+1} \left(x_j^2 - \frac{h^2}{3} \right) \varphi_j(x) \equiv x^2.$$

因为当 $x = x_i + x^*$ 和 $c_j = x_j^2 - \frac{h^2}{3}$ ($j = -1, \dots, m+1$) 时,

$$\begin{aligned}
 Y(x_i + x^*) &= \sum_{j=-1}^{m+1} (x_j^2 - \frac{h^2}{3}) \varphi_j(x_i + x^*) \\
 &= \frac{1}{6h^3} \left(((x_i - h)^2 - \frac{h^2}{3}) [1, -3, 3, -1] \right. \\
 &\quad + (x_i^2 - \frac{h^2}{3}) [4, 0, -6, 3] \\
 &\quad + ((x_i + h)^2 - \frac{h^2}{3}) [1, 3, 3, -3] \\
 &\quad \left. + ((x_i + 2h)^2 - \frac{h^2}{3}) [0, 0, 0, 1] \right) \{H_*\} \\
 &= \frac{1}{6h^3} \left(x_i^2 [6, 0, 0, 0] + x_i h [0, 12, 0, 0] \right. \\
 &\quad \left. + h^2 [2, 0, 6, 0] - \frac{h^2}{3} [6, 0, 0, 0] \right) \{H_*\} \\
 &= -\frac{1}{6h^3} [6x_i^2, 12x_i h, 6h^2, 0] \{H_*\} \\
 &= \frac{6h^3}{6h^3} (x_i^2 + 2x_i x^* + x^{*2}) \\
 &= (x_i + x^*)^2,
 \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{j=-1}^{m+1} (x_j^2 - \frac{h^2}{3}) \varphi_j(x) \equiv x^2.$$

$$(4) \quad \sum_{j=-1}^{m+1} (x_j^3 - h^2 x_j) \varphi_j(x) \equiv x^3.$$

因为当 $x = x_i + x^*$ 和 $c_j = x_j^3 - h^2 x_j$ ($j = -1, \dots, m+1$) 时,

$$\begin{aligned}
 Y(x_i + x^*) &= \sum_{j=-1}^{m+1} (x_j^3 - h^2 x_j) \varphi_j(x_i + x^*) \\
 &= \frac{1}{6h^3} \left(((x_i - h)^3 - h^2(x_i - h)) [1, -3, 3, -1] \right. \\
 &\quad + (x_i^3 - h^2 x_i) [4, 0, -6, 3] \\
 &\quad + ((x_i + h)^3 - h^2(x_i + h)) [1, 3, 3, -3] \\
 &\quad \left. + ((x_i + 2h)^3 - h^2(x_i + 2h)) [0, 0, 0, 1] \right) \{H_*\} \\
 &= \frac{1}{6h^3} \left(x_i^3 [6, 0, 0, 0] + x_i^2 h [0, 18, 0, 0] \right. \\
 &\quad \left. + x_i h^2 [6, 0, 18, 0] + h^3 [0, 6, 0, 6] \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -h^2x_i[6,0,0,0] - h^3[0,6,0,0] \} \{ H_x \} \\
 & = \frac{1}{6h^3} (6x_i^3h^3 + 18x_i^2x^*h^3 + 18x_ix^{*2}h^3 + 6x^{*3}h^3) \\
 & = (x_i^3 + 3x_i^2x^* + 3x_ix^{*2} + x^{*3}) \\
 & = (x_i + x^*)^3,
 \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{j=-1}^{n+1} (x_j^3 - h^2x_j)\varphi_j(x) \equiv x^3.$$

上述三次B样条函数的四个性质如图1.4所示。

2. 适合端部条件的样条插值函数

在1.1中我们指出，自然边界条件在变分方程中让其自动满足，无需让位移函数预先适合。基于这一考虑，我们来讨论适合端部条件的样条插值函数。三次B样条函数的基底为

$$[\tilde{\Phi}] = [\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}],$$

它由 $(n+3)$ 维线性无关的集合张成。在分划 π 上三次B样条插值函数表示为^[7]

$$w = \sum_{i=-1}^{n+1} a_i \varphi_i = [\tilde{\Phi}]\{A\}.$$

关于梁的端部条件有七种，即两端固支、两端简支、两端自由、一固一简、一固一自、一简一自，以及固滑支承等七种。考虑在分划 π 上的端部 $x = x_0$ ，三次B样条函数基适合各种端部条件的表达式。设适合端部条件的三次B样条基为

$$[\Phi] = [\tilde{\varphi}_{-1}, \tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-2}, \tilde{\varphi}_{n-1}, \tilde{\varphi}_n, \tilde{\varphi}_{n+1}], \quad (1.12)$$

现将 $\tilde{\varphi}_{-1}, \tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1$ 的表达式列于表1.2中，而 $\tilde{\varphi}_{n-1}, \tilde{\varphi}_n, \tilde{\varphi}_{n+1}$ 可用与 $\tilde{\varphi}_{-1}, \tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1$ 同样的方式表示。

表1.2 各种端部条件 $[\Phi]$ 的表示式

端 部 条 件	$\tilde{\varphi}_i$	$\tilde{\varphi}_{-1}$	$\tilde{\varphi}_0$	$\tilde{\varphi}_1$
自由端 $w(x_0) \neq 0, w'(x_0) \neq 0$		φ_{-1}	$\varphi_0 - 4\varphi_{-1}$	$\varphi_1 - \frac{1}{2}\varphi_0 + \varphi_{-1}$
简支端 $w(x_0) = 0, w'(x_0) \neq 0$		消去	$\varphi_0 - 4\varphi_{-1}$	$\varphi_1 - \frac{1}{2}\varphi_0 + \varphi_{-1}$
固支端 $w(x_0) = 0, w'(x_0) = 0$		消去	消 去	$\varphi_1 - \frac{1}{2}\varphi_0 + \varphi_{-1}$
固滑端 $w(x_0) \neq 0, w'(x_0) = 0$		消去	φ_0	$\varphi_1 - \frac{1}{2}\varphi_0 + \varphi_{-1}$