高等数学
疑难精解

向熙廷　主编

湖南科学技术出版社

高等数学疑难精解

主　编　向熙廷
副主编　陈正廷　吴振廷
编　委　尹子立　向熙廷　李　滢
　　　　陈正廷　吴振廷　易济民
　　　　金淑良

湖南科学技术出版社

湘新登字004号

D149/25

内 容 提 要

本书编著者针对学生在学习高等数学时提出的各种问题，归纳为376问，包括800多道题，给予了解答，并列举了600多个典型例题，内容十分丰富，便于读者对高等数学基础知识、基本理论、基本技能与技巧的理解和掌握，是一本很有特色的教学参考书。

本书可作为综合大学、师范学院和工科院校数学、计算数学、物理学、力学等专业的高等数学教学用书，也可供工程技术人员参考。

高 等 数 学 疑 难 精 解

向熙廷 主编

责任编辑：胡海清

※

湖南科学技术出版社出版发行

（长沙市展览馆路3号）

湖南省新华书店经销　　湘潭大学印刷厂印刷

＊

1992年12月第1版第1次印刷

开本：787×1092毫米　1/32　印张：19.75　字数：458,000

印数：1—5000

ISBN7—5357—1128—6

O·102　定价：9.90元

地科 116—041

目 录

序言

数学，这门基础科学，已经越来越渗透到各个领域，成为各种科学、技术、生产建设以及日常生活所不可缺少的有力武器。高等学校的学生，除少数专业外，都要不同程度地学习高等数学。由于数学本身高度的抽象性，加之它的教材内容多，课程进度快，一般教材言简意赅，不可能对内容、方法详加解释。这就给教学上带来了较大的难度。前几年，关于高等数学教学参考书出了不少，但作者为了争速度、抢时间，在内容和写法上难免存在这样或那样的缺欠。我们在写作过程中，充分注意到这些情况，在广泛听取各方面意见后，又反复研究了同类书的作者在写作上的成败得失，借鉴他们的经验教训，博采众长，力图使本书能够成为一本比较实用的教学参考书。

我们经过四年多的努力，将教学和考试中所遇到的各种情况，从实际需要出发，按照教学进程，归纳成376个问，包括800多道题，采用问答的形式撰编成书，并精心选配了600多个典型例题，以帮助读者系统地学习和掌握基本知识、基本理论、基本技能，提高分析问题和解决问题的能力。本书强调知识的科学性，注重知识的实用性，讲究知识的深广度，考究知识的趣味性。不同学历层次的读者都可从中得到启发和教益，特别是对于刚担任高等数学教学工作的青年教师更是大有好处的。

本书在编著过程中，得到国家教委高等学校数学和力学教

学指导委员会委员、教材编审委员会委员陈仲沪教授和中国数学教学研究会理事、河南省数学教学研究会理事长吕绍明教授的热情指导；得到国家教委高等学校数学与力学教学指导委员会高等数学教材建设组的大力支持；得到湘潭大学教务处、数学系领导与高等数学教研室的同志们，洛阳教育学院领导、沈阳师范学院数学系领导以及湘潭大学朱起定教授、国防科技大学张干宗教授的热情帮助。在此表示衷心感谢。

本书不妥和疏漏之处，敬请读者批评和指正。

向熙廷

1991年12月14日于湘潭大学

第一篇　导论

1 这本书包括哪些内容？为什么要写这本书？本书的特点是什么？这本书是供给哪些读者的？

答　这是一本涉及高等数学课程全部内容的书。是教这门课程平均教龄达三十二年以上的编著者们，在备课、讲课、辅导、批阅作业、出试题和答疑中，所遇到问题的积累和解决问题的总结。有些是教材中不宜多讲，手册中不便列入的问题.

编著者们想把这本书作为对祖国、“四化”建设的贡献．书的特点是：1)强调知识的科学性．在讲清概念、基本理论的基础上，对某些书中叙述不确切或错误的内容予以纠正，并讲清道理；2)注重知识的实用性．通过问题的解答使读者了解如何运用所学理论知识解决实际问题，培养读者解题的技能技巧；3）讲究知识的深广度，对所学知识进行增补，使读者从更高的角度和不同的侧面来理解，掌握所学的知识，拓宽知识面，开阔眼界；4)考究知识的趣味性，结合讲述概念，基本理论与方法，介绍历史典故或数学家的工作，从中得到启示，引人入胜.

由于上述特点、本书对于不同专业、不同层次的大学生都会有所启发和教益．对担任高等数学教学工作的青年教师也会有所帮助，是值得师生一读的教学参考书．本书是高等数学课本的姊妹篇．当读教科书或做作业发生问题时，查阅本书会使你头

脑开窍，受到启发。因为本书写得全面，而且编排精当，系统地列举了一些典型例子，典型试题，同时还作了详细的解答。有些问题还指出了解答的要点和方法。

为了叙述方便，我们约定，本书把现行通用的高等数学教材简称为“教本”。

2 本书的写作结构有什么特点？为什么要这样写？

答 在高等数学的教学过程中，不可避免地会提出“为什么？”“怎么办？怎样做？”“这样做对不对？”“是否有此结论？等问题。如学极限的定理，会问：ε是否为无穷小量？δ是否为ε的函数？为了深刻理解一个定义，还会问：该定理之逆是否成立，为什么？碰到难题也会自问：应怎样下手？提问题的目的是为了解决问题，找出答案。学中问，问中学。到哪儿找答案？！访老师口授，找教本，查参考书。以查参考书为例，即使在最大的图书馆中，也许因为差一本，隔一页，欠一句未看到，而不得其解。甚至所有查到的资料中，都未明确回答你的问题。如“ε是否为无穷小量？”“函数的间断点与定义域有何关系？”本书就是帮助你早悟其解，及时为你解决疑难的。

本书写作结构有如下特点：1)都以提出题的方式列出。详细地写了答案。在多数答题之后，简述一些体会；2)内容次序与教本相符，但归了类，有如字典序那样便于查阅。对每一章而言，先写一元函数的情形，再写多元函数的情形，最后写增补，在理论或其他方面进行稍深入一步的探讨；3)我们从教学和理解概念及接受知识的角度写了一些看法，但本书不是讲稿，也不是答疑记录；4)在适当的地方，简略介绍点历史、典故。

读者若对内容顺序安排，问题提法，解答问题的词句、观

点、科学性等诸方面有不同看法，特别是对错误的地方，请不吝指教。

3 应该怎样读高等数学教本？

答 高等数学是一门基础理论课。通过对这门课程的学习，为今后学习专业课打下必要的数学基础。学好高等数学，掌握必要的数学概念、理论、方法和运算技能，不仅有利于大学阶段的学习，而且对将来参加“四化”建设工作也是大有益处的。因此，必须下决心学好高等数学，并在刻苦学习的同时，掌握好学习的方法。下面我们着重谈谈这个问题。

1） 认真读书，重在理解和运用。高等数学有较强的系统性和逻辑性。从一开始就要对每一基本概念和基本理论（有的包含在定理或公式中），具有正确的和比较深入的理解。除能正确叙述外，还要把它的背景、实质以及物理或几何意义搞清楚。又由于高等数学的严密性和逻辑推理，在定义、定理和推导中的一句话或几个字都会含有特定的意义。读书时要逐字、逐句地琢磨，依靠头脑这个加工厂，由表及里，融会贯通。一定要在读懂书的基础上再做习题，真正得到做题的好处。概括起来，核心是三个字：**学、思、习**，即对知识的**积累、加工、运用**。

2） 在积累知识的同时要注意培养分析问题、解决问题的能力。在学习高等数学时，要注意培养逻辑思维能力、空间想象能力、将实际问题抽象为数学问题的能力、自学能力和运算能力，要在各个学习环节（如预习、复习、做题、看参考书等）自觉地锻炼。如在看书和解题时，就要开动脑筋，积极思维，**多问些为什么**，遇到困难不回避，钻进去，反复探索，力求独立解决，这样有意识地长期坚持不懈，学习效率和质量就会有明显提高。更重要的是，逐步地把上述各项能力提高了，对今后

的学习，研究和工作都会带来取之不尽，用之不竭的好处。

3） 要善于及时总结。在平时学习中，除了认真预习、复习和看参考书外，要特别注意在学完每一章后及时进行阶段复习和总结。对每章内容作系统复习并归纳整理，按自拟提纲，把概念、理论、方法分门别类地扼要列出，以便比较全面、系统地理解并掌握它们。这是一个由**“薄变厚”（发挥）和“厚变薄”（归纳）**的过程，也是一个由**认识、理解**到**消化、吸收**的过程。

4 为什么要引进和怎样对待高等数学中的基本概念？

答 为了有助于“人类思想表达的经济化”，数学引进概念比其他任何科学都要多得多。一方面，定义是为了正确地规定数学中使用的概念的意义，这是数学的明确性与严密性所要求的；另一方面，也是为了把很多思想、概念用几个字就简洁表达出来。

“极限”、“连续”、“微分”、“积分”等词中它含了多么丰富的思想啊？以这四个词（概念）中出现最早的最基础的“极限”一词为例，其“ε—δ语言”定义法中至少包含了“实数”、“顺序”、“存在”、“绝对值不等式”、“邻域”和“蕴含”的概念。首先，应知道ε、δ、N、极限l，各是怎样的数，要理解各起什么作用？进一步来说，它要求由ε确定的δ，只要x满足“$0<|x-x_0|<\delta$”时，总有“$|f(x)-l|<\varepsilon$”的关系，这至少在中学数学中是罕见的定义形式。对于初学高等数学的读者来说是不易越过而且又必须踏过去的**门坎**。极限这一概念“严密性”的表现，也就在于对任意的ε（>0）所存在的δ应满足的条件，这也正是难于理解之关键所在。

我们认为对待概念，首先一条是要建立必定能理解它的决心；因为不理解它，今后必然处处时时碰壁；第二就是把它所

涉及到的已知概念与其关系的作用一一搞清楚；第三是多看例题，多做习题，譬如，亲自动手去找到存在的δ（注意δ不唯一）；第四，由于每个概念都把事物集合分为两类，一定要找到两类的例子。

数学就是如此无情，对于每一概念必须步步为"营"，不可蜻蜓"点"水，"瞟一眼"了之，更不能"越"门而过，攀登到每一阶梯，回首俯视经"营"过的地方，那么运用自如，欣慰中的体会应该是每个概念都是砥柱桥墩。**数学不愧为"艺术"精湛的宝塔，应用极广的科学宝库**。有志者，则会继而攀登。

注意 在高等数学中，除少数不定义的，需要通过公理来确定的概念（如集合、元素、点、线、面等）外，绝大多数概念能掌握到如下境地就可以算是理解了。(i)对于每一个基本概念，应知道它是对怎样的集合分类，我们称此集合为所讨论的基础集，从而知道该概念所确定的是基础集中怎样的子集。如数列这个概念（定义见教本），以全体函数构成的集合为基础集，从而把该基础集分为两类：一类是全体数列，一类不是数列。两类互补；（ii）对于所述定义，给出否定判断或矛盾概念，并给出例子。

我们还要说明与数学概念有关的应引起注意的一件事，同时会体会到数学要求我们一丝不苟。如问$\left\{\frac{1}{n}\right\}$收敛吗？回答会说收敛（且收敛于0）。这是在实数范围内考虑的。可是如果我们仅在正实数中考虑，则数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$就不收敛了。因为"0"不是正实数。又问$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$收敛吗？回答会是收敛（且收

敛于无理数 e）。这也是在实数范围内考虑的，我们知道 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 总是有理数。如果我们仅在有理数范围内考虑，则数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 就不收敛了。事实上，实数集关于实数数列的极限运算是封闭的，这是实数集区别于其它任何真子集的重要特性。所以，在用极限方法处理极限问题的微积分学中，我们约定**在实数集内考虑**。

5 包含关系与命题有何联系？如何对待定理？

答 我们首先答第一问。

1）何谓命题？命题是以"若条件 A' 成立，则结论 B' 成立"的陈述句出现，其中条件 A' 也称为**假设**，结论 B' 也称为**判断**。从二者的关系上来讲，若命题为真，A' 为 B' 的充分条件，B' 为 A' 的必要条件。显然，所有的定义皆以 A' 与 B' 互为充分且必要的条件的出现，即若 A' 则 B' 且若 B' 则 A'。

2）包含关系与命题的联系。如果用集合论的词句表述，大家知道，若把 A' 所确定的集合记作 A，B' 所确定的集合记作 B。若原有一个命题（可真可假）"若 A' 则 B'，即 $A\subset B$。我我们往往要讨论以下四种形式的命题：

原命题 $A\subset B$

其逆命题 $B\subset A$

其否命题 $A^c\subset B^c$（A^c 表示 A 的补集，若 X 表示基础集，则 $A^c=X-A$）．

其逆否命题 $B^c\subset A^c$

之间的关系，因为

$$A\subset B\Longleftrightarrow B^c\subset A^c,$$

$$B\subset A\Longleftrightarrow A^c\subset B^c.$$

故原命题与其逆否命题同真假，其否命题与逆命题同真假。

其次，我们回答第二问。

1） 哪些是定理？**“定理”**是对数学中的主要问题“陈述S是否正确？”做了肯定回答的陈述。如“[a，b]上的连续函数有界”，这个定理的完整叙述是：若f是闭区间（[a，b]，$b>a$）到实数空间的连续函数，则f是有界函数，事实上，也可以这样叙述：[a，b]上一切连续函数构成的集合A是一切有界函数构成的集合B的子集合，即$A\subset B$。所谓“证明”$A\subset B$，即系统地列出每步都能使读者稍费思索就能理解，若$f\in A$，就有$f\in B$的道理。如上所述，证明其逆否命题“若$g\notin B$，则$g\notin A$”，也同样有效。

在甲书中列的定理，在乙书中可能列为例题或习题。证明了的习题是不是定理呢？答，列为习题的真命题皆为定理。

引进任何一个概念后，都要列出几条定理，因为至少要考虑它有什么性质及判断定理或与其它条件结合起来会有什么新的结果。

2） 怎样才能掌握定理呢？如，有了极限定义后，会想“极限是否唯一呢？”假定不唯一可就遭糕了。于是就想去证明“若$f(x)$在点x_0有极限，则极限是唯一的”这个猜想。会发现教本上就有此定理且与自己猜想的一致，这是令人高兴的兴致勃勃地“不看书上证明，自己下手”的想法会油然而生，证出来了，居然与教本一致，当然自美。没证出来，或证错了，找出原因，尤其找出关键之处，应该说：这收获不小，因为给今后解决难题打下基础。

教本列出的定理或习题，自己未证出来，不是没有用完条件，对**条件**的性质未掌握，就是有**哪些技巧**没想到。所以解决一个问题的难点、关键，除一般理论上问题外，还会因人而

异。在证明某个定理之前，列出各条件的性质及结论成立的充分条件会给证明带来莫大的方便。

如果明白一点新的知识后，闭目小结一下，哪怕是很小的收获，日久天长，不愁"聪明"不起来。

3） 要透彻理解某定理，即包含关系$A\subset B$。深入考虑其"逆命题，即$B\subset A$或否命题是否成立？把条件减弱些，把结论加强些，即把A扩大些，把B缩小些，行不行？"以及"如何运用该定理"等问题是很有必要的。

如把定理"闭区间上的连续函数必有界"中的"闭"改为"开"行不行？不行。把"连续"条件去掉行不行？不行。有界函数一定是闭区间上的连续函数吗？不一定。

4） 为熟練掌握论证方法,可对已知定理给出另一证明法。如代数基本定理的证法，由于依据的定理和论证法不同，已有几十种（用介值定理去证明就是方法之一）。为什么一个定理会有多种证明呢？因为在$A\subset B$中，确定集合A与B的叙述方法并不唯一，以证明闭区间上连续函数性质定理来讲，方法就相当多（读者可以查一下）。

对于一些定理的证明，分析结论的充分条件和题设的必要条件，两面夹攻，有如从两岸出发修桥，合拢于中间，也颇为有效。

总之，搞清定理的内容；寻求简捷证法；通过学习某定理，又能自如地应用它，这就可以说算是彻底地理解掌握了它。

6 为什么要举反例？何时举反例？怎样构造反例？

答 1） 构造反例是数学两大类论证方法之一.不构造反例，数学就少了一臂一腿,无法判定"陈述S(命题$A\subset B$)是假的"。

2） 什么样的例子叫反例呢？即找到一个元素$a\in A$，但

$a\notin B$，我们就称a为**命题A⊂B的一个反例**。譬如"若连续函数f的反（逆）函数f^{-1}存在，则f^{-1}连续"。这个命题对不对呢？我们举一反例，才能使人心服口服。如令

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{当}x>1\text{时}; \\ 0, & \text{当}x=0\text{时}; \\ x+1, & \text{当}x<-1\text{时}. \end{cases} \tag{1}$$

可以验证f是连续函数（参考问题89），且其反函数存在：

$$f^{-1}(y)=\begin{cases} y+1, & \text{当}y>0\text{时}; \\ 0, & \text{当}y=0\text{时}; \\ y-1, & \text{当}y<0\text{时}. \end{cases} \tag{2}$$

或改写为

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} x+1, & \text{当}x>0\text{时}; \\ 0, & \text{当}x=0\text{时}; \\ x-1, & \text{当}x<0\text{时}. \end{cases} \tag{3}$$

显然，f^{-1}在$x=0$处不连续。

这就说明上述命题是假的，不用此法，何法之有？！

历史上一个比较著名的想当然的陈述（命题）："每个连续函数都至少在一点可微"。长期得不到其真假的判定。维尔斯特拉斯①给出了震惊数学界的一个反例，问题才算大白，该例是

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} b^n\cos(a^n\pi x) \tag{4}$$

其中b是一个奇整数，$0<a<1$，且有$ab>1+\frac{3}{2}\pi$，此函数处处连续，但处处不可微。

①维尔斯特拉斯（K.Weierstrass 1815.10.3—1897.2.19）是深受尊敬的德国著名数学家。读了五年大学，但不是数学专业，从1840年到1855年为中学教师，全靠业余时间钻研数学，他是创立实数理论者之一；是复变函数论的奠基人之一；是他引入了极限的"ε—δ"定义。

顺便说几句，首例问世，反例一个又一个地相继出现。有兴趣者，想知道窍门何在？请看微分学篇中的叙述。

3） 什么时候举反例呢？对于已证明了的定理是举不出反例的。而是在想当然地先做出猜想式的判断，又证明不出的时候，才去找反例；或为判定某定理$A\subset B$之逆命题$B\subset A$不真时，举反例（如果读者能对教本中各定理都下这方面的功夫，虽工作量大些，但收益不可低估）；有些定理的条件确实很强，如函数项级数中的M-判别法，使用方便但应用范围较窄，此时，考虑其逆$B\subset A$不成立的反例会发现一些新的结果；为巩固新学习的概念，故意把条件减弱，举些反例也是常见的事；建立一个新概念，则必须找到不属于此概念范围的例子，如存在着无极限的数列、不连续的函数、不可微的函数、不可积的函数、不收敛的级数等等。

4） 怎样构造命题$A\subset B$的反例呢？因为要找到a，使$a\in A$但$a\notin B$，所以应考虑A与B的补集B^c之**交**中的元素。为便于说明，下面仅举简单例子。

为判断命题："定义域为$(a,\ b)$的连续函数是有界函数"不真，我们要构造反例，只要是"定义域为(a,b)的无界连续函数"即可。由于满足$a<a_1<b_1<b$的$[a_1,\ b_1]$上之连续函数一定有界，而要求的无界又一定在一点的邻域内考虑，所以要想构造出在$(a,\ b)$内一点的邻域内使之无界的连续函数是不可能的，这就确定了要考虑端点$x=a$与$x=b$的邻域，在$(a,\ b)$内连续的函数很多，最简单的是多项式函数，但它们在$(a,\ b)$内有界（失效），分式函数，正切函数等在某些实数邻域内是无界的。这启示我们，如令$f_1(x)=\dfrac{1}{x-a}$或