

高等学校教学用书



广义解析函数

上册

依·涅·維庫阿著

人民教育出版社

51.62

~~444~~

14

高等学校教学用书



广 义 解 析 函 数

上 册

依·涅·維庫阿著

中国科学院数学研究所偏微分方程组

北京大学数学力学系函数论教研组

合译

人民教育出版社

51.62

14

高等学校教学用书



广义解析函数

下 册

依·涅·维库阿著

中国科学院数学研究所偏微分方程组
北京大学数学力学系函数论教研组合译

人民教育出版社

本书是根据1959年苏联莫斯科数理出版社(Государственное издательство физико-математической литературы, Москва. 1959)出版的依·涅·維庫阿(И. Н. Вексуа)院士的“广义解析函数”(Обобщённые аналитические функции)一书翻譯的,它是作者在1952年发表的总结性論文“一阶偏微分方程組与边值問題及其在薄壳理論上的应用”的更完善、更深刻的发展。后一論文的譯本已由本社于1960年二月出版。

全书分两部分,中譯本分上下册出版。上册包括原书第一部分內容,叙述了广义解析函数一般理論的基础和边值問題。

本书讀者对象是高等学校数学力学系高年級学生、研究生以及各研究机关有关偏微分方程、函数論、微分几何曲面論、彈性薄壳等方面的科学工作者,特別可作为高等学校数学力学系专门化課程的教学参考书以及开展研究工作之用。

广义解析函数

上册

依·涅·維庫阿 著

中国科学院数学研究所偏微分方程組 合譯

北京大学数学力学系函数論教研組

人民教育出版社出版 高等学校教材編輯部
北京宣武門內承恩寺7号

(北京市书刊出版业營業許可證出字第2号)

民族印刷厂印裝 新华书店发行

統一書号 13010·770 开本 850×1168 $\frac{1}{32}$ 印张 10 $\frac{10}{16}$

字數 268,000 印數 0,001—5,000 定價 1.00

1960年1月第1版 1960年1月第1次印刷

本书是根据 1959 年苏联莫斯科数理出版社 (Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1959) 出版的依·涅·维库阿 (И. Н. Векуа) 院士的“广义解析函数”(Обобщенные аналитические функции) 一书翻译的, 它是作者在 1952 年发表的总结性论文“一阶椭圆型微分方程组与边值问题及其在薄壳理论上的应用”的更完善、更深刻的发展, 后者的中译本已由本社于 1960 年二月出版。

全书分两部分, 中译本分上、下册出版, 下册包括原书第二部分內容, 叙述了广义解析函数理论在微分几何曲面论及薄壳无矩理论上的应用。

本书读者对象是高等学校数学力学系高年级学生、研究生以及各研究机关有关偏微分方程、函数论、微分几何曲面论、弹性薄壳等方面的科学工作者, 特别可作为高等学校数学力学系专门化课程的教学参考书及开展研究工作之用。

广义解析函数

下 册

依·涅·维库阿著

中国科学院数学研究所偏微分方程组 合译

北京大学数学力学系函数论教研组

人民教育出版社出版 高等学校教材编辑组
北京宣武门内承恩寺 7 号

(北京市书刊出版业营业许可出字第 2 号)

京华印书局印装 新华书店发行

统一书号 13010-776 开本 850×1168 $\frac{1}{32}$ 印张 7 $\frac{1}{16}$

字数 180,000 印数 0001-9000 定价 (6) ¥0.70

1960 年 6 月第 1 版 1960 年 6 月北京第 1 次印刷

序 言

解析函数的古典理論，向来主要是用在和分析及其应用有联系的这样一些領域，在那里或者要用到柯西-黎曼方程組；或者要用到其他的方程，而这些方程的解可比較簡單地用柯西-黎曼方程組的解来表示。例如，流体动力学和彈性理論的平面問題就是这样。然而近十年来这些理論的应用范围大大地扩充了。特别是它已渗透到橢圓型方程的一般理論中。这方面的研究，开始很自然地限于具有解析系数的方程，然而，近年来它們已扩充到具有非解析系数的方程并得到了一些結果，这些結果大大地扩充了解析函数的古典理論及其应用范围。这些推广已被扩展到与十分广的一类含两个自变量的一阶橢圓型微分方程組的解族相联的函数类。在这一类中(它甚至也包含有在通常意义下不可微函数的确定的族)，保持着单复变解析函数的一系列基本的拓朴性質(唯一性定理、幅角原理等等)。此外，推广了这样的解析事实：如戴劳展开和罗朗展开、柯西积分公式等等。由于这些情况，我們所考虑的函数在书中称为广义解析函数。

在书的第一部分討論了广义解析函数一般理論的各种不同問題。这里不仅叙述了这一理論的基础，同时也考虑了范围十分广泛的边值問題。本书的理論叙述建立在一系列的关系式和公式上，它們把所討論的微分方程組的解族与单复变解析函数类联系了起来。这些基本关系式和公式构成了全部理論的基础，使我們能把研究归結为解析函数古典理論的研究。应该指出，这些結果是过去关于具有解析系数方程的研究的进一步的自然发展。这里，正如在解析的情形下一样，解的积分表达式是通过仅依赖于方程系数的核来表示的。在这些理論叙述中利用了复区域的积分方程，它們就其性質来說是应用于解析情形的伏尔特拉型积分方程。

任何数学理论的作用和意义, 只有当这个理论和研究的现实对象联系起来时, 才能最好地表露出来。这种联系不仅使理论由于具体内容而得以充实, 而且可正确地确定它的发展途径。假如理论的结果使它的应用范围大为扩充, 那么, 这显然就是它的生命力的标志。在这方面, 广义解析函数理论的可能性是很广阔的。它和分析、几何与力学的很多部门(拟保角映射、曲面论、薄壳理论、气体动力学及其他)有深刻的联系。

新的分析工具使我们对研究正曲率曲面的无穷小变形和凸薄壳无弯矩应力平衡状态时所出现的几何问题和力学问题, 可以作广泛而且深刻得多的研究。这些问题在书的第二部分有足够全面的讨论。这些讨论引出一系列新的结果, 除此以外, 它使得我们能更全面地揭露广义解析函数的几何意义和力学意义。

可惜, 在本书范围内不能把广义解析函数理论的许多其他重要应用讲得足够全面。对拟保角映射问题的应用只指出了极概略的结果。在这方面重要的结果是最近由 B. B. 保亚斯基[11]得到的。另外也指出了对非线性问题的某些应用。虽然我们的研究主要是以线性微分方程为基础, 但所得的结果在研究非线性椭圆型方程的性质时大可利用。

应该指出, 书中包含了作者和他的学生们的许多初次发表的结果。此外, 第四章的补充是由 B. B. 保亚斯基写的。

在准备付印本书的手稿时, B. C. 维诺格拉陀夫、Л. С. 克拉布科娃、孙和生、全哲荣(朝鲜)等给了作者很大的帮助。所有的图形是由 Ю. И. 克里文科夫完成的。A. B. 比查奇、B. B. 保亚斯基、И. И. 达尼柳克和 Э. Г. 帕兹涅克都阅读过本书的全文, 并提出了一系列宝贵的意见和建議, 作者应该感谢他们。对所有这些人作者谨致以衷心的谢意。

И. 維庫阿

1958年7月2日莫斯科

上册目录

序言.....	(xi)
---------	--------

第一部分

广义解析函数一般理論的基础和边值問題

第一章 某些函数类和算子.....	(3)
-------------------	-------

§ 1. 函数类和泛函空間.....	(3)
--------------------	-------

1. 函数类和空間: $C, C^m, H_\alpha, C_\alpha, C_\alpha^m, C(E), C_\alpha^m(E)$ (3). 2. L_p 空間. 赫爾曼和閔可夫斯基不等式. 在 L_p 度量下的連續性. 在 L_p 的强收斂和弱收斂. 在 L_p 的强致密性和弱致密性 (6). 3. L_p^α 空間 (8). 4. 泛函空間之交 (9). 5. $L_{p, \nu}(E)$ 和 $C_{\alpha, \nu}(E)$ 空間 (9). 6. $D_m^0(G)$ 和 $D_\infty^0(G)$ (11). 7. 解析函数类 $\mathcal{U}_0^*(G), \mathcal{U}_0(G)$. 在解析函数类中的一致收斂、平均收斂和弱收斂 (11). 8. 拟可和函数类 $\mathcal{U}_0^* \times L_p, \Sigma \mathcal{U}_0^* \times L_p$ 及其他 (13).

§ 2. 曲綫类和区域类·保角映射的某些性質.....	(14)
-----------------------------	--------

1. 各种不同的曲綫类和区域类: $C_\alpha^m(\Gamma), C_\alpha^m(G), \mathcal{U}(\Gamma), \mathcal{U}(G)$ 及其他 (14). 2. 給在曲綫上的函数类 (15). 3. 实现保角映射的函数性質. 具有角点的域的情形 (15).

§ 3. 柯西型积分的某些性質.....	(17)
----------------------	--------

§ 4. 非齐次柯西-黎曼方程組	(19)
------------------------	--------

1. 非齐次柯西-黎曼方程組的复数写法. 格林公式的复数写法. 龐貝公式 (19). 2. 非齐次柯西-黎曼方程的解 (20). 3. 对右端为拟可和的图形推广 (21). 4. 关于二重积分 Tf 的計算 (21).

§ 5. 在索波列夫意义下的广义微商和它們的性質	(22)
--------------------------------	--------

1. 关于 Tf 型函数的某些性質 (23). 2. 在索波列夫意义下关于复变量 z 和 $\bar{z}$ 的广义微商的定义. 类 $D_z(G), D_{\bar{z}}(G), D_{m, \nu}(G)$ 和 $D_{m, \infty}(G)$ (25). 3. 可和函数全纯性的条件 (26). 4. $D_{\bar{z}}(G)$ 类函数的一般表达式 (27). 5. 关于复变量的广义微商的局部和整体性質 (29). 6. 在广义观点下不依赖于微分次序的条件. 广义拉普拉斯算子 (30). 7. 函数类 D_z^* 和 $D_{\bar{z}}^*$. 具有拟可和右端的非齐次柯西-黎曼方程的广义解 (31).

- § 6. 算子 $T_G f$ 的性质 (31)
1. 算子 Tf 在空间 $L_p(G)$ 和 $Dm_p(G)$, $p > 2, m \geq 1$ 的性质 (在赫尔登意义下的连续性和微分性质)。广义庞贝公式(31)。 2. 算子 Tf 在空间 $L_p L_{p'}(E)$ 和 $L_{p,2}(E)$ (35)。 3. 当 $A \in L_{p,2}(E)$, $p > 2$, 算子 $Pf = T(Af)$ 在空间 $C(E)$ 和 $L_{q,0}(E)$, $q \geq \frac{2p}{p-2}$ 的性质(39)。 4. 算子 Tf 在空间 $L_p(G)$, $1 \leq p \leq 2$ 的性质(40)。 5. 当 $A \in L_{p,2}(E)$, $p > 2$, 算子 $Pf = T(Af)$ 在空间 $L_q(G)$, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$, 的性质(43)。 6. 在域的边界上 Tf 形函数的可和性程度(44)。
- § 7. 函数类 $D_{1,p}$ 的格林公式 · 面积微商 (45)
- § 8. $T_G f$ 形函数的微分性质 · 算子 Πf (48)
1. 算子 $\Pi f = \partial_z Tf$ 。算子 Tf 和 Πf 在空间 $C_a^m(\bar{G})$ 的探讨(48)。 2. 在域的边界上 Πf 形函数的间断性质(54)。 3. 算子 Tf 和 Πf 在 $L_p C_a^m(E)$ 函数类中的探讨(55)。
- § 9. 算子 Πf 的扩充 (56)
1. 算子 Πf 在 $L_2(E)$ 的么正性(56)。 2. 算子 Πf 在空间 $L_p(E)$, $p > 1$ (58)。
- § 10. $D_z(G)$ 与 $D_{\bar{z}}(G)$ 类函数的一些其他性质 (64)
1. $D_{\bar{z}}$ 类函数乘积的微分公式(在广义观点下的)(64)。 2. 某些复合函数类的微分规则(65)。

第二章 正的微分二次形化为标准型 · 贝尔特拉米方程 · 几何应用 (68)

- § 1. 引言 · 二次形的同胚 (68)
- § 2. 贝尔特拉米方程组 (69)
- § 3. 贝尔特拉米方程的基本同胚的建立 (71)
- § 4. 证明局部同胚的存在 (72)
1. 局部同胚的建立(72)。 2. 局部同胚的微分性质(76)。 3. 借助于局部同胚在点的邻域内贝尔特拉米方程一般解的表达式(77)。 4. 贝尔特拉米方程解的零点的孤立性的情况(78)。 5. 单演性的条件(79)。 6. 辐角原理(80)。 7. 雅可比性质(80)。
- § 5. 完全同胚存在的证明 (81)
1. 当 1) $|q(z)| \leq q_0 < 1$, 2) $q \in L_{p'} C_a^m(E)$, $p' < 2$ 的情形(81)。 2. 贝尔特拉米方程的一般解的公式(82)。 3. 完全同胚的族(82)。 4. 5. 6. $|q(z)| \leq q_0 < 1$ 的一般情形(83—87)。
- § 6. 正的微分二次形化为标准形 · 在曲面上的等距坐标系和共轭等距坐标系 (88)

1. 正的分二次形的同胚(88)。
2. 在表面上的等距坐标系。第一基本二次形的同胚的分性质(89)。
3. 在正曲率表面上的共轭等距坐标系。第二基本二次形的同胚的分性质(91)。
4. 关于共轭等距坐标系第一基本二次形系数的不同表示式。曲面上二切线方向间夹角的公式。共轭曲线网的性质(93)。
5. 在共轭等距坐标系中, 对于曲面点的笛卡尔坐标系的拉普拉斯方程的复形式(98)。
6. 高斯和科达齐方程的复形式。第二类克利斯多夫记号的表示式(100)。
7. 在复形式下的共变微商和反变微商(101)。
8. 函数 A, B, C 的分性质(102)。
9. 当区域作保角变换时, 一些量的变换公式。卵形面的情形。无穷远点附近的条件(102)。
10. 在共轭等距映射下, 属于曲面的曲线在平面上的同胚象曲线的光滑性质(104)。

§ 7. 椭圆型方程化为标准型 (106)

1. 椭圆型方程组整体的化为标准形(106)。
2. 二阶椭圆型偏微分方程整体的化为标准形(110)。

第三章 广义解析函数的一般理论的基础 (112)

§ 1. 基本概念·术语和记号 (112)

1. 一阶椭圆型偏微分方程组的标准形。复数形式的写法。方程组在古典意义下的解。没有古典解的例子。广义解和正规解的定义。函数类 $\tilde{\mathfrak{U}}^*(A, B, F, G)$, $\tilde{\mathfrak{U}}(A, B, F, G)$ 及其他。广义解析函数。广义解析函数的各种不同的类 $\mathfrak{U}^*(A, B, G)$, $\mathfrak{U}_p^*(G)$ 及其他] 生成对 (A, B) (111)。
2. 当域保角变换时方程的变换。在无穷远点附近解的性质(116)。

§ 2. 对于 $\tilde{\mathfrak{U}}(A, B, F, G)$ 类函数的积分方程 (118)

§ 3. $\tilde{\mathfrak{U}}_p(G)$ 类函数的连续性和可微性 (120)

1. 类 $\tilde{\mathfrak{U}}_{p,2}(G)$, $p > 2$ 的函数在域内在赫尔兹意义下的连续性(120)。
2. 当 $A, B, F \in D_{m,p}(G)$, $p > 2$, $m \geq 1$ 时类 $\tilde{\mathfrak{U}}(A, B, G)$ 的函数在域内的可微性质(121)。
3. 类 $\tilde{\mathfrak{U}}_{p,2}(G)$ 的函数在闭域上在赫尔兹意义下的连续性的条件(122)。
4. 关于具解析系数的方程的附注(123)。

§ 4. 基本引理·某些古典定理的推广 (123)

1. 基本引理(123)。
2. 广义解析函数的第一类表达式或相关性公式。零点、极点和本性奇点的孤立性。索霍茨基-魏尔斯特拉斯定理(124)。
3. 唯一性定理(卡列曼)(125)。
4. 方程 $\partial \bar{z} w + A w = 0$ 的一般解。戴奥多斯克公式(126)。
5. 第一类表达式推广到具有拟可和系数的方程的情形(126)。
6. 对广义解析函数的基本不等式(128)。
7. 广义解析函数的解析因子和对数差。正规解析因子和正规对数差(128)。
8. 广义极大模原理。关于广义解析函数序列一致收敛性的定理。广义许瓦兹引理

- (130)。 9. 广义刘维尔定理。类 $\mathfrak{U}(A, B, E)$ 的广义常数或方程 $\partial \bar{z} w + Aw + B\bar{w} = 0$ 的常数解。类 $\mathfrak{U}_{p,2}(E)$ ($p > 2$) 的广义多项式和广义有理函数(131)。 10. 关于幅角原理的附注(133)。
- § 5. 广义解析函数的第二类积分表达式……………(133)
1. 积分方程 $w - Pw = h$ 的可解性的证明(133)。 2. 对于类 $\mathfrak{U}_{p,2}(A, B, G)$ ($p > 2$) 的函数用关于 z 的解析函数表示的第二类表达式(134)。 3. 广义分区全纯函数。在广义解析函数类中形如 $w^+ - w^- = g$ 的非齐次希尔柏脱问题的解(135)。 4. 逐次逼近法。化为形式: $\partial \bar{z} w + B\bar{w} = F'$ 的代换(135)。 5. 具变形核的积分方程。在已知点的有限集合上取已知值的广义解析函数的建立(136)。
- § 6. $\mathfrak{U}_{p,2}(A, B, E)$ 类函数的生成对 · 在倍尔斯基意义下的微商……………(137)
1. 派生对 (w_0, w_1) 及其和生成对 (A, B) 的关系。派生对 (w_0, w_1) 的基本性质。 $\text{Im}[w_0 w_1] > k_0 > 0$ (137)。 2. 在倍尔斯基意义下的微商(139)。 3. 第一类和第二类拟解析函数(在倍尔斯基意义下)(139)。 4. 关于由广义解析函数实现的映射(140)。
- § 7. 非线性积分方程 (4.3) 的反演……………(140)
- 化为形如 $w - Pw = 1$ 的等价的线性积分方程。算子 $\mathfrak{U}_t(\mathcal{D})$ 。在广义解析函数类中齐次希尔柏脱问题 $w^+ = gw^-$ 的解的建立(140)。
- § 8. 基本广义解析函数组与 $\mathfrak{U}_{p,2}(A, B, G)$ 类 ($p > 2$) 的基本核……………(142)
1. 对于方程 $\mathfrak{C}(w) \equiv \partial \bar{z} w + Aw + B\bar{w} = 0$ 的基本解组 $X_1(z, \zeta)$, $X_2(z, \zeta)$ 的积分方程(142)。 2. 方程 $\mathfrak{C}(w) = 0$ 的基本核 $\Omega_1(z, \zeta)$ 和 $\Omega_2(z, \zeta)$ (143)。
- § 9. 共轭方程 · 格林恒等式 · 二阶方程……………(144)
1. 格林恒等式(144)。 2. 类 $\mathfrak{U}(A, B, G)$ 的实位势函数。对于实位势的二阶方程(145)。 3. 类 $\mathfrak{U}(A, B, G)$ 的复位势函数。对于复位势的二阶方程(146)。
- § 10. 广义柯西公式……………(147)
1. 相互共轭的方程的基本解和基本核之间的关系(147)。 2. 对于方程 $\mathfrak{C}(w) = F'$ 和 $\mathfrak{C}(w') = F'$ 的解的广义柯西公式(149)。 3. 关于广义解析函数序列的一致收敛性定理(151)。
- § 11. 广义解析函数的连续拓展 · 广义对称原理……………(151)
- 通过可求长约当弧的连续性的拓展。广义黎曼-许瓦兹对称原理(151)。
- § 12. 致密性……………(153)
1. 在类 $\mathfrak{U}(A, B, G)$ 中致密性的定义。关于广义解析函数序列的一致收敛性。强收敛性和弱收敛性的定理。类 $\mathfrak{U}(A, B, G)$ 的函数族的致密性判别法(153)。 2. 在类 $\mathfrak{U}_{p,2}(G)$ ($p > 2$) 中致密性的定义。致密性判别

- 法(154)。3. 由 $\mathcal{U}_{F,2}(G)$ 类中致密性判别法的某些推论(156)。
- § 13. 用核表示豫解式.....(157)
1. 方程 $\mathfrak{C}(w)=0$ 的关于域 G 的正规核 $\mathfrak{Q}_1(z, t, G)$ 和 $\mathfrak{Q}_2(z, t, G)$ 。方程 $\mathfrak{C}(w)=0$ 和 $\mathfrak{C}'(w')=0$ 的解通过圆道积分表示的公式(157)。
 2. 通过方程 $\mathfrak{C}(w)=0$ 的正规核表示积分方程 $w - Pw = h$ 的豫解式。借助于按域的积分, 方程 $\mathfrak{C}(w)=0$ 和 $\mathfrak{C}'(w')=0$ 的解的一般表达式(158)。
 3. 对于建立非齐次方程 $\mathfrak{C}(w)=F'$ 和 $\mathfrak{C}(w')=F'$ 的特解的公式(160)。
- § 14. 广义解析函数借助于广义柯西型积分的表达式.....(161)
1. 广义柯西型积分。对于边界值的公式(161)。
 2. 在边界上已知的連續函数 $\varphi(t)$ 是广义解析函数的边值的必要和充分条件(162)。
 3. 在閉域上广义柯西型积分連續(在赫尔曼意义下)的条件(163)。
 4. 关于任意的广义解析函数借助于具实密度的广义柯西型积分来表示的定理(163)。
- § 15. 广义解析函数的完全組·广义幂級数.....(164)
1. 方程 $\mathfrak{C}(w)=0$ 的解的完全系。广义多项式和广义有理函数的完全系(164)。
 2. 广义戴劳級数和广义罗朗級数(167)。
 3. 第一类广义幂級数。收斂域(169)。
 4. 第二类广义級数。广义阿倍尔定理。系数的計算(171)。
- § 16. 对于广义解析函数实部的积分方程.....(173)
- § 17. 一般形式橢圓型方程組解的性质.....(175)
1. 写方程組为复数形式的一个方程。当域保角变换时方程的变换(175)。
 2. 方程 $\partial \bar{z} w - q(z) \partial_z w + Aw + B\bar{w} = 0$ ($|q(z)| \leq q_0 < 1$) 的解的第一类表达式(177)。在圓域情形中解析因子和对数差的特殊选择(179)。
 3. 推广上述結果到一般方程: $\partial \bar{z} w - q_1(z) \partial_z w - q_2(z) \overline{\partial_z w} + Aw + B\bar{w} = 0$, $|q_1| + |q_2| \leq q_0 < 1$ (*) (180)。
 4. 方程(*)的解的第二类表达式。把問題化为按域解奇异积分方程。按逐次逼近法求解(182)。
 5. 方程(*)的在有限个固定点上取已知值的解的建立(184)。
 6. 关于方程(*)具已知奇异性解的建立(186)。
- 第四章 边值問題.....(188)
- § 1. 广义黎曼-希尔柏脫問題的提出·問題的解的連續性特征.....(188)
1. 广义黎曼-希尔柏脫問題的提出。問題 A (188)。
 2. 条件 I. 在閉域上問題 A 的解的連續性(在赫尔曼意义下)的定理(189)。
 3. 保角变换的应用。化問題 A 为边界是圓的标准域的情形(193)。关于化問題 A 为 $F \equiv 0$ 或者 $\gamma \equiv 0$ 的情形(194)。
- § 2. 共軛边值問題 $\bar{A}'$ ·問題 A 可解的必要和充分条件.....(194)
1. 共軛齐次問題 $\bar{A}'$ 的边界条件。对于非齐次問題 A 的可解性, 条件

- (2.5)的必要性的証明(194)。 2. 化問題 $\dot{A}'$ 为等价的奇异积分方程(195)。 3. 奇异积分方程理論的某些結論(196)。 4. 伴随齐次問題 $\dot{A}'_*$ (198)。 5. 对問題 A 导出奇异积分方程(199)。 6. 伴随齐次問題 $\dot{A}'_*$ (200)。 7. 条件(2.5)的充分性的証明(200)。 8. 非齐次問題 A 的解的一般形式(201)。 9. 推广到一般形式橢圓型方程組的情形(202)。
- § 3. 問題 A 的指数 · 化問題 A 的边界条件为标准形 (203)
1. 問題 A 的指数。共轭的問題 $\dot{A}$ 和 $\dot{A}'$ 的指数之間的关系(203)。 2. 对于沒有化为标准形的方程組的边界問題 $\alpha u + \beta v = \gamma$ 的指数的附注(204)。 3. 問題 A 的标准形式(204)。
- § 4. 齐次問題 $\dot{A}$ 的解的零点性質 · 問題 $\dot{A}$ 和 A 的可解性判别法 (206)
1. 在閉域中問題 $\dot{A}$ 的解的零点个数的有界性的証明。关于問題 $\dot{A}$ 解的边界零点的重数(206)。 2. 問題 $\dot{A}$ 的零点和极点的个数及其指数之間的关系(208)。 3. $n < 0$ 的情形。在 $n = 0$ 的情形問題 $\dot{A}$ 解的一般形式。当 $n > 0$ 时問題 $\dot{A}$ 的解的零点的个数。在 $n \geq 0$ 的情形問題 $\dot{A}$ 的解的个数的上界(211)。 4. 共轭齐次問題 $\dot{A}$ 和 $\dot{A}'$ 的解的个数之間的关系。当 $n > m - 1$ 时齐次問題 $\dot{A}$ 的解的个数。当 $n > m - 1$ 时非齐次問題 A 的解的一般形式(213)。 5. 黎曼-希尔柏脫問題的特別情形: $0 \leq n \leq m - 1$ 预先附注(216)。
- § 5. 在 $0 \leq n \leq m - 1$ 情形下 A 型边值問題的特殊类的研究 (218)
1. $n = 0, m \geq 1$ 的情形。問題(5.2)(218)。 2. 問題(5.6)和(5.7)。边界 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ 上 $u_1, \dots, u_m$ 的調和測度和它們的基本性質(219)。 3. 問題 D 。域的标准調和函数和它們的基本性質。問題 D 的可解性条件(在域的边界上实部取已知值的多連通域中的全純函数的存在性条件)(222)。 4. 定理 4.5 的新的証明(225)。 5. 域的共轭标准調和函数。域的标准解析函数和它們多值性的特征。保角映射多連通域到对应的标准域的函数的建立(225)。 6. 問題 D' 和它与二阶凸曲面的无穷小变形的联系(227)。 7. 在多連通域情形的广义齐次黎曼-希尔柏脫問題(在全純函数类中)。問題化为标准形: $\operatorname{Re}[\overline{\Omega_n(z)} e^{i\alpha(z)} \Phi(z)] = 0$ (在 Γ 上)。边界点的实的逐段常函数 $\alpha(z)$ 依赖于域内固定点的性質(229)。 8. 具有边界条件 $\operatorname{Re}[(z - a)^{-n} \Phi(z)] = 0$ 的問題的研究(在 Γ 上)。問題 $A_n(a)$ 。在域映射为沿实軸有切口的平面的情形下問題 $A_n(a)$ 的解的个数(231)。 9. 对任意多連通域的情形边值問題 $A_n(a)$ 的研究。一个特别的行列式 $\Delta_n(a)$ 的性質。齐次問題 $A_n(a)$ 的解的最小个数 ($l = 1$) 的存在性的証明(232)。 10. 問題 $\dot{A}(a_1, \dots, a_n)$ 。特殊行列式 $\Delta(a_1, \dots, a_n)$ 的性質。齐次問題 $A(a_1, \dots, a_n)$ 的解的最小个数存在的必要和充分条件(237)。
- § 6. 問題 A 的适定性条件 (239)

1. 关于問題 A 的适定性問題的一般提法(239)。	2. 关于边界条件的右端問題 A 的适定性条件。不适定的情形(240)。	3. $(k, k'; G + \Gamma)$ 是固定点的正规分布组。当 $n > m - 1$ 时保証問題 A 的适定性的补充(点的)条件组(242)。	4. 具有极点的解(244)。	5. 研究特别情形: $0 \leq n \leq m - 1$ 。不等式 $0 \leq l \leq n + 1$ 的证明(246)。
§ 7. 借助于域上的积分方程来解問題 A · 广义对称原理的应用 · 广义許瓦兹积分.....	(248)			
1. 对单连通域的問題 A 。对圆域化为标准問題的情形(248)。	2. 当 $n \geq 0$ 时化問題 A 为按域的弗莱特霍姆积分方程并証明解的存在性(248)。	3. 当 $n < 0$ 时化問題 A 为按域的弗莱特霍姆积分方程。問題 A 的可解性条件(252)。	4. 所考察的方程的类的某些推广(256)。	5. 对于問題 A 的解的实部的弗莱特霍姆积分方程($n \geq 0$ 的情形)(256)。
6. 当 $n \geq 0$ 时問題 A 的豫解式。利用豫解式建立問題 A 的特解($n \geq 0$ 的情形)。	7. 利用广义对称原理得到广义許瓦兹积分($n = 0$ 的情形)(259)。	8. 当 $n > 0$ 时借助广义許瓦兹积分来解問題 A (264)。	9. 在閉域上問題 A 的解的可微性质(265)。	
§ 8. 二阶椭圆型方程的斜微商边值問題.....	(268)			
1. 对方程 $\Delta u + au_x + bu_y = f$ 具有斜微商的边值問題的提出(問題 B)。化为問題 A (269)。	2. 諾依曼問題和狄立赫来問題的情形(171)。	3. 对一般形式的二阶椭圆型方程具有斜微商的边值問題的提出(問題 C)。化問題为积分方程(272)。	4. $n \geq 0$ 情形的研究(275)。	5. $n < 0$ 情形的研究(278)。
6. 問題 C 的解的光滑性特征和可微性质(280)。	7. 推广到不化为标准形的二阶方程的情形。推广到不化为标准形的一阶椭圆型方程組的情形(281)。			
§ 9. 按域的奇异积分方程应用于边值問題.....	(282)			
1. 对于二阶拟綫性椭圆型微分方程的第一基本边值問題。化問題为非綫性奇异积分方程。問題的可解性条件。先驗估計(283)。	2. 綫性方程的情形(291)。	3. 关于狄立赫来問題的共軛边值問題(二阶綫性方程的情形(294)。	4. 对于二阶綫性方程的第二基本边值問題(問題 N)(297)。	5. 共軛(于問題 N 的)边值問題(300)。
6. 对于不化为标准形的椭圆型方程組的黎曼-希尔柏脫問題(302)。				
§ 10. 与問題 A 有关的一些工作的附注 · 更一般的問題的某些提法.....	(312)			
第四章的补充 关于黎曼-希尔柏脫問題的奇异情形(B. 保亚斯基)	(312)			

下册目录

第二部分

对曲面論和无矩薄壳理論問題的某些应用

第五章 曲面无穷小变形一般理論的基础	(330)
§ 1. 矢量形式的无穷小变形方程	(331)
位移場的基本方程。显易位移場(331)。	
§ 2. 关于笛卡儿坐标系的无穷小变形方程。卵形面剛性的第一个証明	(333)
1. 对在平面上单值投影的曲面的位移場分量的一阶偏微分方程組。对位移場“垂直”分量的二阶偏微分方程(333)。 2. 位移場的一阶偏微分复方程(334)。 3. 投影变换的应用(335)。 4. 借助于位移場的复方程証明卵形面的剛性(337)。 5. 分区正则(凸)卵形面的剛性(338)。	
§ 3. 关于曲面上任意坐标系的位移場的分量的方程組·剛性的一些判別法	(341)
1. 动力学方程組,对法位移的公式(341)。 2. 关于曲率綫坐标系的位移場方程組(345)。 3. 在零曲率($k=0$)曲面情形下位移場方程組的积分,关于零曲率曲面剛性的一个判別。对曲面平面块的位移場(346)。 4. 关于渐近綫坐标系的位移場方程組。关于負曲率曲面剛性的一个判別(348)。 5. 关于共轭等距坐标系的位移場方程組对复的位移函数的方程。用复的位移函数来表达位移場。与不可伸长的綫相粘合的凸曲面的剛性。卵形面的剛性。对切向位移場的极大值原理(349)。 6. 导出对复的位移函数的方程的新方法(352)。	
§ 4. 关于二阶曲面的一个性質	(353)
§ 5. 旋轉場·无穷小变形的特征方程	(357)
1. 通过位移場分量来表达旋轉場分量(357)。 2. 关于自然标架的位移場分量和旋轉場分量間的关系式(358)。 3. 特征方程的导出(360)。 4. 特征方程的写法: a) 关于曲率綫坐标系。 6) 关于渐近綫坐标系($K<0$)。 a) 关于共轭等距坐标系($K>0$)(361)。	
§ 6. 变形場·靜力場	(363)
1. 对(反变)变形場的方程組。靜力学場(363)。 2. 共变变形場。通过变	

形場来表达旋轉場和位移場。位移場和旋轉場的單值性的充要条件。基本积分恒等式(365)。3. 通过旋轉場和位移場的分量来表达变形場的分量(368)。4. 关于曲率綫坐标系的靜力学場方程組(369)。5. 关于漸近綫坐标系的靜力学場方程組($K < 0$) (369)。6. 关于共轭等距坐标系的靜力学場方程組($K > 0$)。复的应力函数。对复应力函数的方程。复的变形函数。使复的应力函数是变形函数的充要条件。通过复的变形函数来表达旋轉場。通过复的应力函数来表达力場(370)。

§7. 当曲面无穷小变形时不同几何量的变分·某些剛性判別法……(372)

1. 当曲面无穷小变形时, 一些量的变分的定义(372)。2. 通过第一基本二次形的系数来表达的量的变分。張量的量的变分(373)。3. 对第二基本二次形系数的量的方程(374)。4. 通过位移場的分量来表达第二基本二次形的变分。与复的变形函数的联系(375)。5. 在曲面上曲綫的曲率 k 和撓率 α 。在曲面上曲綫的主法綫 m 和付法綫 b 的变化。法曲率、測地曲率和測地撓率 σ_g 。測地綫的微分方程(376)。6. 測地曲率、法曲率、曲面上曲綫的曲率、曲面法綫与曲綫主法綫之間的角 θ 、曲面漸近曲率、測地撓率和曲面上曲綫撓率的变分。用复的变形函数来表达曲面法曲率和測地撓率的变分(379)。7. 标量变形場(p, q)。量 p, q 的几何意义。通过标量函数 p 和 q 来表达第二基本二次形系数的变分(381)。8. 复的标量变形函数以及对它的方程。卵面的剛性。具有边界的正曲率曲面的剛性的某些判別(384)。9. 通过 p 和 q 来表达法曲率和法撓率的变分。

§8. 在粘合綫上的联結条件·具有边界的曲面剛性的某些判別法·插綫約束·理想的夹住……(388)

1. 引进附注(388)。2. 位移場的連續性条件。在粘合綫上旋轉場的間断性質。在粘合性上粘合角的变分(388)。3. 对应于粘合綫上联結条件的广义解析函数的边值問題。吻切情形(391)。4. 剛性粘合。在吻切綫上的联結条件(398)。5. 以漸近帶鑲边的曲面。具有鑲边边界的卵形面。具有一个鑲边边界的卵形面的剛性的証明(399)。6. 削弱腰帶相粘合。力学膠鐳(402)。7. 与直紋面相粘合(402)。8. 与柱面相粘合(402)。9. 在动力学形式联結条件(404)。10. 正曲率曲面与直紋面相粘合的情形(404)。11. 插綫約束或滑动約束的边值条件(406)。12. 理想夹住的边值条件(408)。

§9. 剛性分区正則閉曲面的某些类……(409)

1. (Бляшке)积分恒等式的导出(409)。2. 对正則卵形面的剛性的証明的应用(410)。3. 凸的分区正則曲面的剛性的証明(411)。4. 非凸非負曲率曲面的剛性的某些判別(415)。5. 有对称平面的組合曲面的位移場(416)。

§ 10. 具有边界的刚性凸曲面的若干类.....(418)

1. 适定(最适宜)、不适定(过分)的和拟适定的约束的概念(418)。 2. 基本动力学边值问题(问题 A_t)(420)。 3. 位移场的光滑程度依赖于曲面的光滑程度(421)。 4. 共振问题 A'_t 和它的几何意义(422)。 5. 问题 A_t 的指数。属于同一类的切方向(对曲面)。I 或 s 类方向的指数。切方向的正规扰动。边值问题 A_t 的正规扰动。问题 A_t^* 。问题 A_t 的正规适定的概念(424)。 6. 问题 A_t 可解性条件的研究。不适定的判别($n_t < 0$)。问题 A_t 拟适定性情形($n_t > n - 1$)。添加补充(点的)条件的办法保证适定性。考察特别情形($0 \leq n \leq m - 1$)(425)。 7. 非刚性的充分判别。刚性的必要判别(428)。 8. 当方向 t 属于类 I 时, 问题 A_t 的研究。正交的插栓约束的边值问题。外约束条件。插栓约束的自由度。刚性固定插栓约束($k=0$)。自由插栓约束。刚性的和非刚性的刚性固定插栓约束($k=0$)的情况。在刚性固定插栓约束时, 几何刚性的单联通和二联通凸曲面的例子。借助于附加点条件以保证运动学的刚性。一般情况的研究。在一般情况下, 插栓约束问题可解性的必要与充分的条件(428)。 9. 几何型的边值条件的研究。当几何约束时, 刚性和非刚性的情况。具有多个锁边边界的卵形面的刚性定理的证明(434)。

§ 11. 旋转曲面的无穷小变形.....(438)

1. 开的旋转曲面。关于旋转和变形的位移场的方程组化为标准形(438)。 2. 在退化线($K=0$)上的联结条件。拉甫-伦捷夫-比查奇方程的情形(440)。 3. 整个旋转曲面所适合的二阶常微分方程(442)。 4. 闭的旋转曲面(443)。 5. 环面的刚性(443)。 6. 具有边界的分区正规旋转曲面在插栓约束情况下刚性的若干判别法(445)。 7. 沿着锥面上(两)纬线的孔的滑动约束(449)。 8. 球带的边界沿着两个同轴圆锥面滑动的情况(452)。 9. 边界沿着圆锥面滑动的椭球缺的刚性条件(457)。 10. 一个在另一个里面所装起来的旋转曲面的刚性问题(459)。 11. 由两个球缺粘合起来的非凸闭曲面的刚性问题(462)。 12. 由两个球缺和圆柱面粘合起来的非凸旋转曲面的刚性问题(465)。 13. 一族旋转曲面的刚性问题。

第六章 薄壳的无矩理论问题.....(470)

§ 1. 力和力矩.....(472)

1. 与薄壳中面正规联系的坐标系(472)。 2. 横截面上的力和力矩(474)。 3. 力和力矩的反变矢量(475)。 4. 以反变力和反变力矩表示力和力矩(476)。

§ 2. 薄壳的基本平衡方程组.....(477)

1. 以作用在坐标曲面上的应力表示任意横截面上的应力(477)。 2. 法向力和切向力、横向力、扭矩和弯矩(478)。 3. 对于力和力矩(矢量形式)