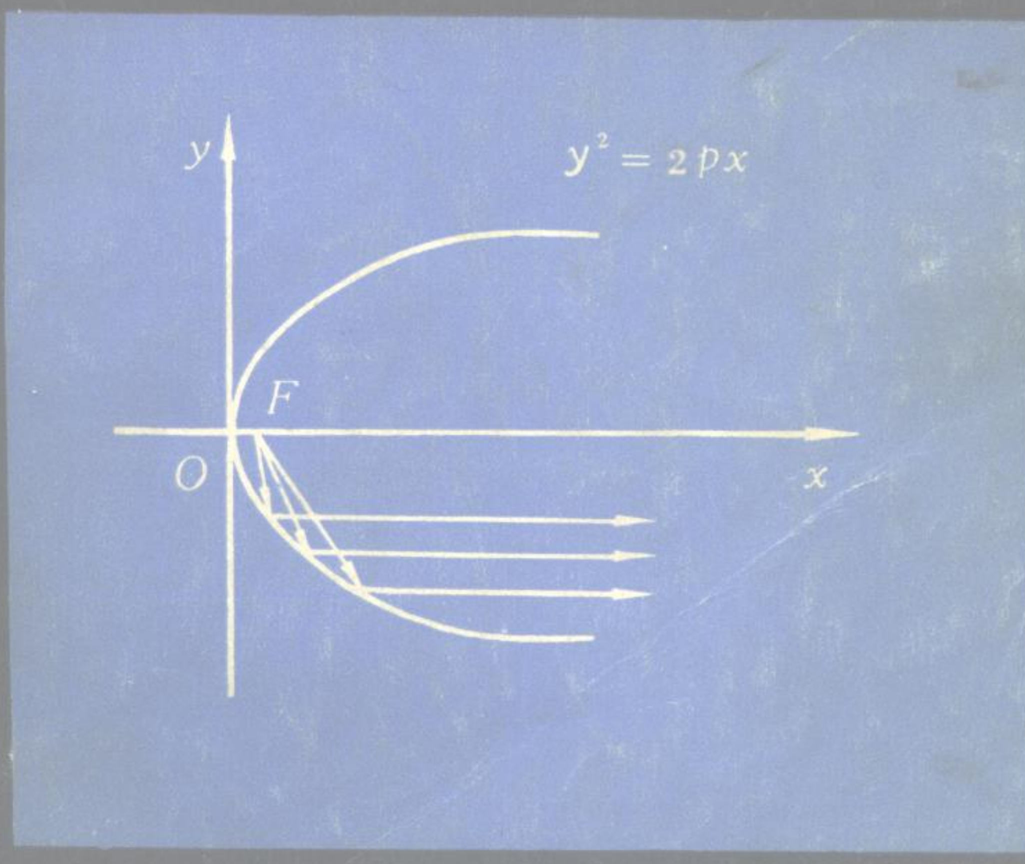
数学分析

SHUXUEFENXI



山东科学技术出版社

数 学 分 析

郭大钧 陈玉妹 裘卓明

山东科学技术出版社
一九八二年·济南

内 容 提 要

本书是郭大钧教授几十年教学经验的总结，曾多次作为山东大学数学系、华东石油学院、山东矿业学院的教材。本书具有概念明确，重点突出，由浅入深，循序渐进，启发性强，便于自学等特点，并重视了疑难、关键性问题的解惑，重视了提高读者利用数学分析解决实际问题的能力。这是一本内容丰富，水平较高有独到之处的数学分析教材，也是一本很好的学习参考书。

本书上篇主要介绍了极限理论和一元函数微积分学的基本理论和基础知识，包括函数、极限、连续函数、微分学及其应用、积分学及其应用；下篇主要介绍了级数和多元函数的微积分学的基本理论和基础知识，包括级数、多元函数的微分学及应用、广义积分、含参变量的积分、重积分、线积分与面积分、场论、傅立叶级数等内容。书中有较多的习题，每章后还有综合性补充题，书末附有答案。

本书可作为综合性大学和师范院校数学系的教材，也可作为理工科院校学生学习数学分析的参考书，还可供中学教师及广大数学爱好者自学数学分析之用。

数 学 分 析

郭大钧　陈玉妹　裘卓明

*

山东科学技术出版社出版
山 东 省 新 华 书 店 发 行
山东新华印刷厂潍坊厂印刷

*

787×1092毫米16开本　39.25印张　866千字
1982年6月第1版　1982年6月第1次印刷
印数：1—12,000

书号 13195·61　定价 4.20 元

出版说明

数学是重要的基础学科，数学分析又是数学中最重要的基础课程，它在力学、物理、天文、工程技术等方面都有着广泛的应用。

随着科学的迅猛发展，高等数学只靠大学的课堂教授已远远不能满足时代的需要。为配合自学成才和职工业余教育及在校学生的学习，满足广大有志者的急切需要，我们特请山东大学数学系郭大钧教授等编写了这本《数学分析》。

郭大钧教授致力于数学分析的教学与研究工作近三十年，在这方面有较深的造诣。这本《数学分析》正是郭大钧教授多年教学经验的总结，曾多次作为山东大学、华东石油学院、山东矿业学院的教材。本书具有概念明确，重点突出，由浅入深，循序渐进，启发性强，便于自学等特点，并重视了重点、难点的解惑；重视了提高读者利用数学分析解决实际问题的能力。总之，这是一本内容丰富，水平较高，有独到之处的数学分析教材，也是一本很好的学习参考书。

本书包括极限理论、一元函数的微积分学、级数和多元函数的微积分学。书中配有相当数量典型性较强的习题，每章之后还有综合性的补充题，书末附有答案备查。本书可作为综合性大学和师范院校数学系的教材，也可作为理工科院校学生学习数学分析的参考书，还可供中学教师及广大数学爱好者自学数学分析用。

目　录

上　篇

下　篇

第一章　函　数

§1. 函数的概念

1·1　函数的概念

我们知道：微积分是研究变量的数学．客观世界中许多变量，它们之间不是孤立的，而是相互联系，相互制约，相互影响的．变量之间的相互联系抽象到数学上，就是所谓函数关系．下面我们先看几个例子：

例 1　自由落体运动．由物理学知道，空中的物体自由下落(即初速为零)，如果忽略空气的阻力，经过时间 t (秒)后下落的距离 S (米)有如下的公式：

$$S=\frac{1}{2}gt^2 \qquad (1\cdot1—1)$$

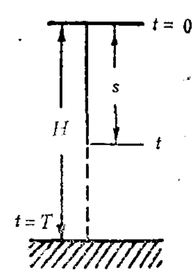


图 1—1

其中 g 是重力加速度，$g=9.8$ 米/秒^2 (图 1—1)，这里，t 和 S 是两个变量，它们之间不是孤立的而是由公式(1·1—1)联系起来，对于每一个时刻，物体都有一确定的位置，即是说对于 t 的每一个数值，S 都有一个对应值，例如 $t=1$ 秒时，$S=4.9$ 米．所以公式(1·1—1)事实上反映了 S 和 t 之间的对应关系，单知道公式(1·1—1)，还不能对整个运动情况完全了解，还必须知道 t 的变化范围，设物体在时刻 T 落到地上，则显然 t 的变化范围为 $0\leqslant t\leqslant T$(T 和物体离地面的高度 H 有关，我们有

$$H=\frac{1}{2}gT^2,$$

故

$$T=\sqrt{\frac{2H}{g}},$$

例如，如果 $H=122.5$ 米，那末 $T=5$ 秒)，知道了对应关系(1·1—1)和 t 的变化范围，整个运动情况完全清楚了．

例 2　某气象台用自动记录仪，记录了某一天气温 T 随时间 t(小时)的变化曲线(图1—2)，这个曲线本身就反映了 T，t 之间的依赖关系，这时 t 的变化范围是 $0\leqslant t\leqslant 24$，对这范围的每一时刻 t 都可在图上量出对应的温度 T，例如 $t=3$ 时(早晨 3 点钟)，$T=12$℃；$t=13.5$ 时，$T=22$℃ (从图中可知下午一点半时气温最高，为 22℃)。

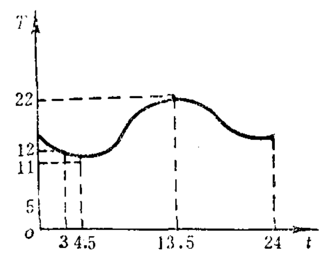


图 1—2

例 3　考察某河流的一个断面上各处水的深度 y (米)，显然水的深度 y 随测量点离

岸边的距离 x(米)而变(图 1—3)．设每隔一米，测量一次河深，得数据如下表：

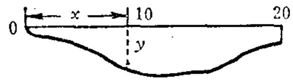
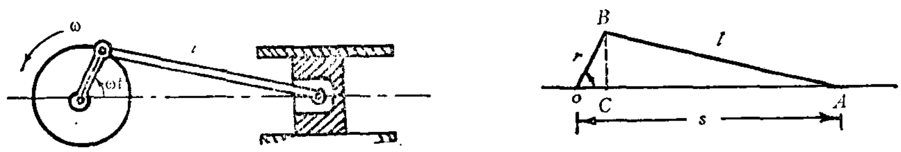


图 1—3

x(米)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y(米)	0	0.2	0.3	0.5	0.6	0.9	1.2	1.3	1.6	1.9	2.1	2.3	2.4	2.2	2	1.8	1.5	1.2	0.9	0.7	0.5

这里，变量 x 与 y 之间的依赖关系可通过上面所列的表反映出来． x 的变化范围是 $0\leqslant x\leqslant 20$，在这范围内，对每一 x 值，都确定了唯一的 y 值，例如，$x=6$ 米时，$y=1.2$ 米，y 的变化范围是 $0\leqslant y\leqslant 2.4$，注意，上面列的表反映 x 与 y 之间的依赖关系是不完全的，例如，当 $x=7.5$ 米时，从表上就查不出 y 的数值，所以测得的数据愈多，列的表愈细，反映的就愈完全．

例 4　在机械工业中(例如冲床上)，广泛应用着曲柄连杆机构〔图 1—4(a)〕，设半径为 r 的主动轮按反时针方向以等角速度 ω 旋转，于是，连杆(设其长为 l)BA 带动滑块 A 作往复直线运动，所以曲柄连杆是把转动转换成直线往复运动的一种机械结构．现在我们来求滑块 A 的运动规律．



(a)　　　　　　　　(b)

图 1—4

设 OA 的长为 S〔图 1—4(b)〕．我们要建立的就是 S 随时间 t 的变化规律，由 B 点作 OA 的垂线，设垂线足为 C，于是

$$S=OC+CA,$$

显然

$$OC=r\cos\omega t,$$

$$CA=\sqrt{BA^2-CB^2}=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}.$$

于是，所要求的规律就是

$$S=r\cos\omega t+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}. \qquad (1\cdot1—2)$$

变量 t (时间)的变化范围是 $0\leqslant t<+\infty$(注意，正无穷大 $+\infty$ 是一个符号，不是数，$0\leqslant t<+\infty$ 相当于 $0\leqslant t$)，S 的变化范围是 $l-r\leqslant S\leqslant l+r$(当 $t=0$ 时，$S=l+r$，当 $t=\frac{\pi}{\omega}$ 时，$S=l-r$)．

以上这些例子，虽然具体内容各不相同，但它们通过一定的规律反映两个变量之间的依赖关系却是共同的．这种依赖关系我们就叫做函数关系，于是抽象出下面的函数定义．

定义 设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y，如果对于变量 x 的变化范围内的每一个值，都按某一确定的规律有变量 y 的一个值与之对应（粗略地说，就是 y 随 x 变化而变化），则我们称变量 y 是变量 x 的函数．记为

$$y=f(x)$$

x 叫做自变量，y 叫做因变量，自变量 x 的变化范围叫做函数的定义域，因变量 y 对应的变化范围叫做函数的值域．

在例 1 中，落下的距离 S 是时间 t 的函数：

$$S=f(t)=\frac{1}{2}gt^2$$

对应规律是由公式(1·1—1)确定，t 是自变量，S 是因变量，此函数的定义域是 $0\leqslant t\leqslant T$，值域是 $0\leqslant S\leqslant H$．例 2 中，气温 T 是时间 t 的函数：$T=f(t)$ 对应规律由图 1—2 中的曲线确定，定义域是 $0\leqslant t\leqslant 24$，值域是 $11\leqslant T\leqslant 22$（从图 1—2 的气温曲线上看出）．

注 1：函数概念中包括三个东西，即对应规律，定义域，值域．如果知道了对应规律和定义域，则值域就随之而定（例如，在例 4 中，知道了对应规律公式 (1·1—2)，又知道定义域是 $0\leqslant t<+\infty$，则值域就可看出来是 $l-r\leqslant S\leqslant l+r$）．因此，确定一个函数需要知道两个东西：对应规律和定义域．

注 2：定义域和值域我们常用“区间”来表示．我们说，满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 构成一个闭区间，记为 $[a,b]$，从几何上说 $[a,b]$ 就是数轴上从 a 点到 b 点包括端点的闭线段〔图 1—5(a)〕（我们知道，所有实数和数轴上所有的点是一一对应的，因此，我们把实数 a 和数轴上的点 a 不加区别）．满足 $a<x<b$ 的所有实数 x 构成一个开区间，记为 (a,b)，所以，(a,b) 就是数轴上从点 a 到 b 不包括端点的开线段〔图 1—5(b)〕．有时，我们还要考虑半开闭的区间，例如 $[a,b)$ 就代表左端闭右端开的区间，即由满足 $a\leqslant x<b$ 的所有 x 构成〔图 1—5(c)〕．总之，读者记住，方括弧代表闭，圆括弧代表开．另外，经常还要考虑无穷区间．例如 $[a,+\infty)$ 代表满足 $a\leqslant x<+\infty$ 的全体实数 x 构成的右端无穷的区间〔图 1—5(d)〕；$(-\infty,+\infty)$ 代表满足 $-\infty<x<+\infty$ 的所有 x（即全部实数）构成的两端无穷的区间．这里，我们要再一次强调指出：正无穷大 $+\infty$ 和负无穷大 $-\infty$ 只是为了方便而使用的两个符号，但不是实数，因此，比如，区间 $[a,+\infty]$ 就没有意义，因为实数 x 不能等于 $+\infty$．

有了区间的概念以后，例 1 中函数的定义域就可写为闭区间 $[0,T]$，值域是闭区间 $[0,H]$．同样，例 2、例 3、例 4 中函数的定义域与值域分别为 $[0,24]$ 与 $[11,22]$，$[0,20]$ 与 $[0,24]$，$[0,+\infty]$ 与 $[l-r,\ l+r]$．

注 3：确定函数的定义域一般分两种情况：

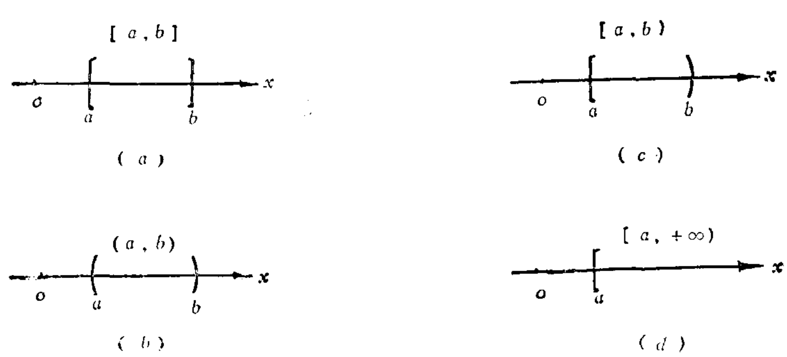


图 1—5

(i) 如果函数是联系着实际问题来考察的，其定义域应根据实际问题而定，例如，例1的定义域为$[0,T]$，例4的定义域为$[0,+\infty)$；

(ii) 在数学上，我们往往从具体问题中抽象出来，一般地去研究函数，这时函数的定义域就了解为使函数有意义的自变量的所有数值构成的。

例如：函数

$$y=4.9x^2 \tag{1·1—3}$$

的定义域为$(-\infty,+\infty)$；函数

$$f(x)=\frac{x^2+2x}{x-3} \tag{1·1—4}$$

的定义域为不等于3的所有实数x，即$(-\infty,3)$和$(3,+\infty)$。下面我们来求函数

$$y=\sqrt{1-x^2}+\frac{5}{\sqrt{x}} \tag{1·1—5}$$

的定义域，第一项仅当$1-x^2\geq 0$时才有意义（我们只考虑实数）即$x^2\leq 1$或$-1\leq x\leq 1$，第二项仅当$x>0$时才有意义，故此函数的定义域为$-1\leq x\leq 1$和$x>0$的公共部分，即$0<x\leq 1$或半开闭的区间$(0,1]$（图1—6）。

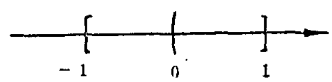


图 1—6

注4：函数$y=f(x)$中的"f"是一个符号，代表x与y间的对应规律，切不可把$f(x)$误解为f乘x，正如函数$\sin x$不能看成$\sin$乘x一样。

当自变量x取某特定的值x_0时，对应的函数值用$f(x_0)$或$y|_{x=x_0}$表示。例如，对于例1中的函数

$$S=f(t)=\frac{1}{2}gt^2=4.9t^2,$$

我们有

$$S|_{t=1}\text{ 或 }f(1)=4.9,$$
$$S|_{t=2}\text{ 或 }f(2)=19.6.$$

对于例4中的函数

$$S=f(t)=r\cos\omega t+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t},$$

我们有

$$S|_{t=0}\text{ 或 }f(0)=r+l,$$
$$S|_{t=\frac{\pi}{\omega}}\text{ 或 }f\left(\frac{\pi}{\omega}\right)=l-r,$$
$$S|_{t=\frac{2\pi}{\omega}}\text{ 或 }f\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)=r+l.$$

另外，当在一个问题中遇到几个函数时，为了区别起见，除f外我们往往还用其他的字母，如g，φ，ψ等等。例如，半径为r的圆的面积S，圆周长L，球体体积V为三个函数：

$$S=\pi r^2,\ L=2\pi r,\ V=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

我们可分别用 $S=f(r)$，$L=g(r)$，$V=\varphi(r)$表示。

今后，我们常用$x,y,z\cdots$等代表变量，a，b，$c\cdots$等代表常量。

1·2 函数的表示法

表示一个函数，一般有三种方法：

(1) 公式表示法。就是用一个数学公式来表达自变量和因变量之间的对应关系，例如，例1中的公式(1·1—1)，例4中的公式(1·1—2)都是用公式表示的函数。

(2) 图形表示法。就是用曲线来表达自变量和因变量之间的对应关系。如例2中所

述的函数就属此类。

(3) 列表表示法，就是用表格来表达自变量和因变量之间的对应关系，如例 3 中所述的函数就属此类。另外，如平方表，开方表，三角函数表，对数表等也属于此类。

事物都是一分为二的，三种表示法各有优缺点。图形表示法比较直观，能从图形上直观地看出函数值的变化情况和变化趋势，但不便于作理论研究；列表表示法可不用计算和度量，直接从表上查得函数值，使用方便，但表中所列的函数值不完全，也不便于作理论研究；公式表示法适于对函数作理论研究，但不直观，由于微积分学要对函数进行理论分析和运算，所以在微积分中我们一般都考虑用公式表示的函数。

但是需要特别指出的是，由于函数的对应规律，其表现形式是可以各种各样的，因而函数是一个十分广泛和深刻的概念。在函数的定义中并没有限定变量间的对应关系非要用公式来表示不可。事实上，就是用公式来表达函数，也经常出现用几个公式来表示一个函数的情形。

例 5 $y=f(x)=\begin{cases}x^2, & -\infty<x<0,\\ \sin x, & 0\leqslant x<+\infty.\end{cases}$

就是定义在$(-\infty,+\infty)$上的一个函数，而不是两个函数！其对应规律是在定义域$(-\infty,+\infty)$的两段上分别用两个公式来表示的，即函数在定义域的其中一段$(-\infty,0)$上所对应的值按公式 x^2 来计算，而在另一段$[0,+\infty)$上的函数值则是 $\sin x$。如

$$f(-2)=(-2)^2=4,\qquad f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{4}$$

$$f(0)=\sin 0=0,\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1,\ \cdots.$$

这种函数，我们通常称为分段定义的函数。

例 6 另外一种函数关系（即对应规律）是可以用一句话来表示的。比如，"y是不超过x的最大整数"，这就是数论中一个极为重要的函数。

因为对任何给定的实数 x，就有而且只有一个不超过它的最大整数 y，如：

$$x=0,\ y=0;\ x=\frac{1}{2},\ y=0;\ x=1,\ y=1;\ x=2.4,\ y=2;\ x=\pi,\ y=3;$$

$$x=-\frac{1}{2}, y=-1;\ x=-2, y=-2;\ x=-2.4;\ y=-3,\cdots.$$

因而根据函数的定义，这样的整数 y 就是 x 的函数，其定义域是$(-\infty,+\infty)$，由于这个函数在数论中的特殊的重要性，我们用一个特别的记号 $y=[x]$来表示它。即$[x]$表示不超过 x 的最大整数，或者说$[x]$是 x 的整数部分。

容易看到，当

$$n\leqslant x<n+1\quad (n=0,\pm1,\pm2,\ \cdots)\text{时},$$

$$[x]=n.$$

由此，就不难作出 $y=[x]$ 的图形是一个逐段升高的"阶梯"形。

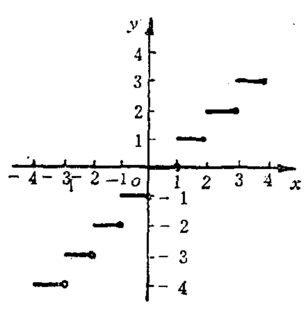


图 1—7

例 7 狄里赫勒(Dirichlet)函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

例如，当 $x=-2$，$\frac{3}{7}$，$\frac{4}{7}$ 时，$y=1$；当 $x=\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，π 时，$y=0$，这个函数的图形是画不出来的，但可以作一些直观的想象：有无数多个点子"稠密"地分布在 x 轴上，也有无数多个点子"稠密"地分布在直线 $y=1$ 上。

另外，从对应的传递性，我们还可以得到表达函数的又一种重要的形式即复合函数。所谓对应的传递性，就是：若 x 对应 u，而 u 对应 y，则通过 u，x 就与 y 建立了对应。

例如，

$$y=\sin u,\ u=a^x \qquad (a>0)$$

容易看出，y 是 x 的函数

$$y=\sin a^x \qquad (a>0)$$

这种形式的函数称为复合函数。

一般地说，若 y 是 u 的函数：$y=f(u)$，u 又是 x 的函数：$u=\varphi(x)$ 则通过变量 u，y 就是 x 的函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，并称它为前两个函数的复合函数，而变量 u 则称之为中间变量。

必须注意：复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域应该是使 $u=\varphi(x)$ 的函数值属于 $y=f(u)$ 的定义域的那些 x 所组成，因此经常只是 $u=\varphi(x)$ 的定义域的一部分。

例 8　设 $y=\log_{10}u$，$u=\sin x$，求复合函数 $y=\log_{10}\sin x$ 的定义域。

函数 $u=\sin x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，而复合函数 $y=\log_{10}\sin x$ 的定义域应该是使 $u=\sin x>0$ 的所有 x 所组成，即：

$$2n\pi<x<(2n+1)\pi \qquad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots).$$

总之，由于对应规律表现形式的多样性，我们可以得到各种不同的函数。

习　题　一

1. 设一物体从离地面 490 米处自由下落，经过时间 t（秒）以后，它离地面的高度设为 h（米），试将 h 表为 t 的函数，并求出此函数的定义域和值域。
2. 试求下列函数的定义域：

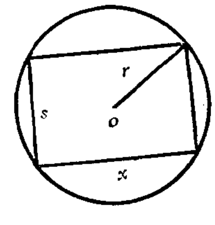
   (1) $y=x+3$；

   (2) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}$（并求 $f(0)$）；

   (3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$（并求 $f(0)$，$f(a)$，$f\left(\dfrac{1}{b}\right)$，其中 $0\leqslant a<1$，$b>1$）；

   (4) $y=2\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x^2}$（并求 $y|_{x=2}$，$y|_{x=x_0}$，其中 $1<x_0<2$）；

   (5) $g(x)=\sqrt{3x-x^3}$　（并求：$g(-2)$，$g(1)$）。
3. 在半径为 r 的圆中内接一矩形，设矩形的一边长为 x，试将此矩形的面积 S 表成 x 的函数，并指出此函数的定义域。



（第 3 题）

4. 函数 $y=\operatorname{sgn} x$ 定义如下

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

作出此函数的图形，并证明

$$|x| = x\,\mathrm{sgn}\,x.$$

5. 设 $f(x) = 1 + [x]$,

求 $f(0.9)$, $f(0.99)$, $f(1)$, $f(-0.9)$, $f(-\pi)$.

6. 设 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & -\infty < x \leqslant 0, \\ 2^x, & 0 < x < +\infty. \end{cases}$

求 $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(\pi)$.

7. 设 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$,

求 $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$, $f[f(x)]$.

8. 设 (1) $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = 2^x$;

(2) $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ x & x > 0, \end{cases}$ $\psi(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ -x^2 & x > 0. \end{cases}$

分别求 $\varphi[\varphi(x)]$, $\psi[\varphi(x)]$, $\varphi[\psi(x)]$, $\psi[\varphi(x)]$.

§2. 基本初等函数及其图形

在理论和实际问题中遇到的函数是各式各样的，但仔细分析一下，它们大都是由几个基本而简单的函数经过加、减、乘、除和复合运算结合而成的。我们认识事物的规律是由简单到复杂，由特殊到一般，因此，我们首先要认识这几种基本的函数，然后，其他较复杂的函数就比较容易认识了。基本的函数有五种：幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数，这五种函数叫做基本初等函数。下面，我们就分别进行研究。

2·1 幂函数

幂函数指的是函数

$$y = x^a.$$

其中 a 表示任何实数，大家在初等数学里已经遇到过幂函数的几个特殊情形：

正比函数：$y = x$（直线，函数图象见图 1—8）

二次函数：$y = x^2$（抛物线，函数图象见图 1—9）

反比函数：$y = \frac{1}{x}$（双曲线，函数图象见图 1—10）

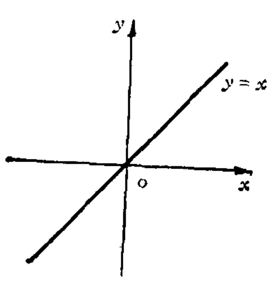


图 1—8

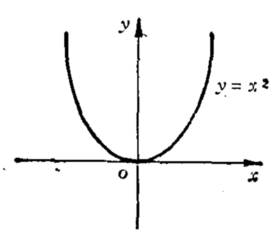


图 1—9

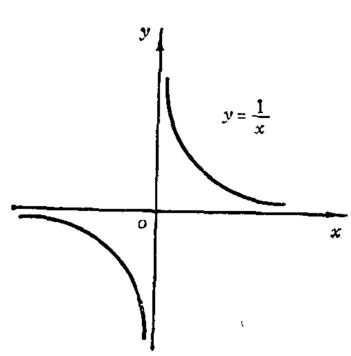


图 1—10

下面，我们再举几个例。应当指出，现在我们只能粗略地讨论函数的图形（只能讨论定义域，值域，对称性，变化趋势等）。在讲过微分学之后，我们将在第五章以微分学为工具，更深入地讨论函数的图形。

例 1　讨论函数 $y=x^3$ 的图形。

显然，此函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，y 随 x 增大而增大；当 x 为正时 y 也为正，而且当 x 无限增大时，y 也无限增大；x 为负时，y 也为负，而且 x 沿负的方向无限变大时，y 也沿负的方向无限变大；故函数的值域也是 $(-\infty,+\infty)$，并且函数的图形在第一、三象限（图 1—11）。

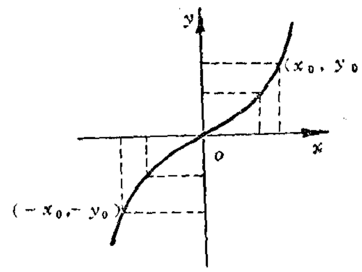


图 1—11

这里我们发现在 $x=x_0$ 的函数值 $y|_{x=x_0}=x_0^3$（以 y_0 表示）和 $x=-x_0$ 的函数值 $y|_{x=-x_0}=(-x_0)^3$ 之间刚好差一个符号；即

$$y|_{x=-x_0}=(-x_0)^3=-x_0^3$$
$$=-y_0=-y|_{x=x_0} \qquad (1\cdot2—1)$$

因此，(x_0,y_0) 与 $(-x_0,-y_0)$ 两点都在函数的图形（曲线）上（图 1—11）（例如 $y|_{x=1}=1$，$y|_{x=-1}=-1$，故 $(1,1)$ 与 $(-1,-1)$ 两点都在函数图形上。又如 $y|_{x=2}=8$，$y|_{x=-2}=-8$，故 $(2,8)$ 与 $(-2,-8)$ 两点都在函数图形上）。显然 (x_0,y_0) 与 $(-x_0,-y_0)$ 两点关于坐标原点是对称的。由于对于 x 的每一个值 x_0 都有此性质，故函数的图形是关于坐标原点对称的（图 1—11）。因此，只要描出第一象限的图形，第三象限的图形立刻就知道了，至于描图法，大家在初等数学里学过，就是描出一些点（例如对应于 $x=0$，$\frac{1}{2}$，1，2 的点），然后圆滑地连起来。

注：上面的结果显然对于一般的函数 $y=f(x)$ 也成立，如果

$$f(-x)=-f(x). \qquad (1\cdot2—2)$$

对于任何 x 值（定义域内的，这里假定定义域关于原点对称）成立，则函数 $y=f(x)$ 的图形关于坐标原点是对称的，满足（1·2—2）的函数，我们叫做**奇函数**。

例 2　讨论函数 $y=\frac{1}{x^2}$ 的图形，此函数是 $\alpha=-2$ 时的幂函数，显然其定义域是 $x\neq0$ 的所有实数 x，即 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$，当 x 不论从正方向还是从负方向无限地接近 0 时，y 都无限地增大；而当 x 无限增大时（不论从正方向还是从负方向），y 都无限接近于 0（图 1—12），故函数的值域是 $(0,+\infty)$。由于 y 恒为正；故函数的图形在第一、第二象限。

这里，我们发现，在 $x=x_0$ 的函数值 $y|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0^2}$（以 y_0 表示）和 $x=-x_0$ 的函数值 $y|_{x=-x_0}=\frac{1}{(-x_0)^2}$ 是相等的；即

$$y|_{x=-x_0}=\frac{1}{(-x_0)^2}=\frac{1}{x_0^2}=y|_{x=x_0} \qquad (1\cdot2—3)$$

因此，(x_0,y_0) 与 $(-x_0,y_0)$ 两点都在函数 $y=\frac{1}{x^2}$ 的图形上（图 1—12）。由于 (x_0,y_0) 与

$(-x_0, y_0)$两点关于 y 轴是对称的，故函数 $y=\frac{1}{x^2}$ 的图形关于 y 轴是对称的(图 1—12)，因此，只要描出第一象限的图形，那么第二象限的图形立刻就知道了。

注：上述的结果显然对于一般的函数 $y=f(x)$ 也成立，如果

$$f(-x)=f(x) \tag{1·2—4}$$

对任何 x(定义域内的，这里假定定义域关于原点对称)都成立，则函数 $y=f(x)$ 的图形关于 y 轴是对称的。满足(1·2—4)式的函数，我们叫做**偶函数**。

显然，幂函数 $y=x^\alpha$，当 α 为偶数（正和负)时，是偶函数；而当 α 是奇数(正和负)时，是奇函数。这也正是偶函数、奇函数名称的来源。

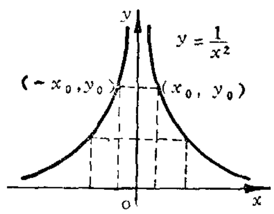


图 1—12

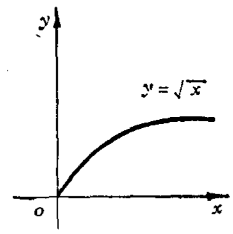


图 1—13

例 3 讨论函数 $y=\sqrt{x}$ 的图形，此函数是 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时的幂函数，显然定义域是 $[0,+\infty)$，值域也是 $[0,+\infty)$，y 随 x 增大而增大，当 x 无限增大时，y 也无限增大，函数的图形在第一象限(图 1—13)。

此函数无对称性。它实际是抛物线 $y^2=x$ 的一半。

上面我们举了一些幂函数的例子，初看起来，好象它们的图形(图 1—7 到图 1—13)没有什么规律性，但仔细分析一下，就可看出：当 $\alpha>0$ 时和 $\alpha<0$ 时分别都有一些共同点。

当 $\alpha>0$ 时，函数 $y=x^\alpha$，在 $x\geqslant 0$ 时，都有定义($x<0$ 时不一定有意义)，而且 $y|_{x=0}=0$，$y_{x=1}=1$，即它的图形通过原点(0,0)和点(1,1)，而且当 x 无限增大时，y 也无限增大，图 1—14 中画出了取不同正值 $\alpha\left(\alpha=10,4,3,2,\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{10}\right)$ 的函数 $y=x^\alpha$ 在第一象限的图形。从图中可以看出，α 愈大，图形通过点(1,1)以后就愈陡；α 愈小，图形通过点(1,1)后愈平。

当 $\alpha<0$ 时，函数 $y=x^\alpha$ 在 $x>0$ 时都有定义 ($x<0$ 时不一定有意义)，而且当 x 无限变小时，y 无限变大；当 x 无限变大时，y 无限变小，并且都通过点(1,1)。图 1—15

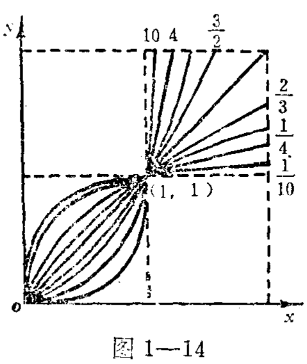


图 1—14

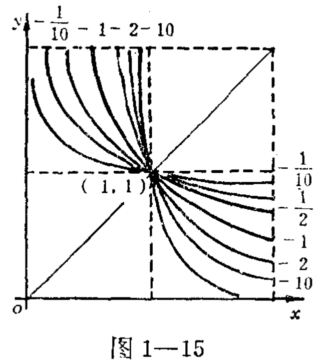


图 1—15

中画出了对不同负值$\alpha\left(\alpha=-10,-3,\ -2,-1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{10}\right)$，函数$y=x^{\alpha}$在第一象限的图形．从图中可以看出，$\alpha$愈小（即负的愈多），通过点（1,1）前函数的图形愈陡；α愈大（即负的愈少），通过(1,1)前图形愈平．

习　题　二

1．试讨论函数$y=x^4$的图形．

2．试讨论函数$y=\sqrt[3]{x}$的图形．

3．试讨论函数$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$的图形．

4．什么叫奇函数？什么叫偶函数？它们的图形有何特点？

5．判断下列函数是奇函数，还是偶函数，或者都不是．

（1）$f(x)=x^4-2x^2$；　　（2）$f(x)=x+9x^3$；

（3）$y=x^3(5x-7x^5)$；　　（4）$y=-\dfrac{x+1}{x^2+1}$；

（5）$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0;\end{cases}$　　（6）$y=D(x)=\begin{cases}0, & x=\text{有理数},\\ 1, & x=\text{无理数}.\end{cases}$

6．两个奇函数的乘积是什么函数，并证明之．

7．设函数$f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，试证明$f(x)+f(-x)$是偶函数，$f(x)-f(-x)$是奇函数．

2·2　指数函数

指数函数是

$$y=a^x \tag{1·2—5}$$

其中常数$a>0$，$a\neq1$，此函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$，由于恒有$y>0$，故函数的图形在第一、第二象限，并且都通过点(0,1)．但是$a>1$和$a<1$，函数(1·2—5)的图形是截然不同的，若$a>1$，则当x增大并无限增大时，y也增大并无限增大(图1—16)；若$a<1(a>0)$，则当x增大并无限增大时，y就减小并无限减小(图1—17)．

在图1—18中，我们画出了当$a=2,3,10$以及$a=\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{10}$时指数函数的图形．

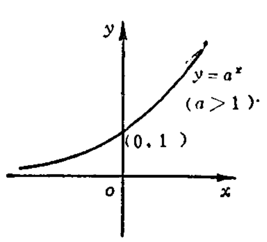


图1—16

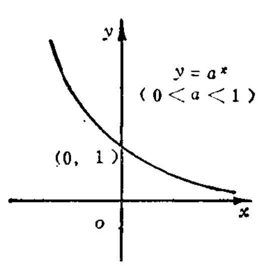


图1—17

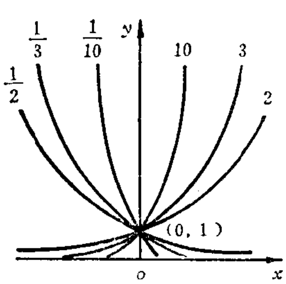


图1—18