高等学校教学用書

复变函数論方法

上册

M. A. 拉甫倫捷夫
Б. A. 沙巴特 著

高等教育出版社

高等学校教学用書

复变函数論方法

上册

M. A. 拉甫倫捷夫
Б. A. 沙巴特 著
施祥林 夏定中譯

高等教育出版社

本書是根据苏联國家技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的拉甫倫捷夫（М. А. Лаврентьев）和沙巴特（Б. В. Шабат）合著，"复变函數論方法"（Методы теории функций комплексного переменного）1951年版譯出的，原書經苏联高等教育部審定为國立大学數学力学系力学專業，物理系和物理數学系的教学参考書。

本書中譯本分上下兩册出版。

中譯本上册包括：基本概念，保角映射，函數論的边值問題及其应用等三章。

本書由南京大学施祥林、夏定中合譯。

复变函数論方法

上册

M. A. 拉甫倫捷夫，Б. A. 沙巴特著

施祥林 夏定中譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

商務印書館上海廠印刷 新華書店總經售

書號 13010·108 開本 850×1168 1/32 印張 10 14/16 字數 300,000

一九五六年七月上海第一版

一九五六年七月上海第一次印刷

印數 1—9,000 定價(8) ¥1.20

序

在我們已出版的書籍中，複变函數論的完善的教本，都是供數学專業的学生們用的，而其他的教本通常僅講些这理論的初步知識。可是，近來在物理学中和在技術科学中，有許多方法需要更深入地应用複变函數理論，而这些方法已經是大家都通用的了。要从數学專業用的教本中汲取这方面所必需的知識，对於一个不是学數学的人來說是有困难的，而在一般的初等教本中所講的那些知識，又嫌不夠。

補足所指出的这个缺陷，便是本書的目的。有一些人是由於複变函數論在物理問題与技術問題上的应用，因而对它感到兴趣的，我們的任务就是在这本書里給他們敍述一些複变函數論的基本方法。这本書可以給大学力学系，物理系，与应用物理系的学生，以及高等技術学校中具有足夠數学訓練的研究生作教本用。我們假定讀者已經熟悉了包含在 В. И. Смирнов 的"高等數学教程"(國家技術理論書籍出版社，1949)的首二卷范圍內的數学分析基本課程。有些地方，我們也引用 Г. М. Фихтенгольц 的"微積分学教程"(卷 I—III，國家技術理論書籍出版社，1947—1949)。

在第一章中敍述了複变函數論的全部基本概念，因之讀此書時便可以不依賴这門学科的其他教本。而就敍述方面說，第一章也与其他各章有些不同——它寫得更概括些，更簡潔些。这時我們已考慮到，对於第一章的材料方面，已經有許多容易了解的書籍了。

其余的各章講複变函數論在应用上具有重大意义的各种方法。除敍述方法外，还附有大量的例題。如果讀者在研究了關於某种方法的一些例題之后，已經通曉了这一方法，那么關於这方法的另外一些例

題，可以先不讀——等引用到这些例題時再回过來讀它們，这样比較好一些。

書中也包含了把複变函數論应用到各种物理問題上去的大量例子。不应当那样想，以为我們是說，电机学上的例子只对於电机工作者有意义，流体力学上的例子只对力学工作者有意义。其实，对於某一个問題而說明的那些方法，常常可以有效地用來解決含有其他物理内容的類似問題。通曉了函數論在物理学不同部門中的应用的那些原理，可以帮助讀者在以后的工作中，把書中就别的部門所陈述的那些方法，使用於他自己的部門中。

我們处处設法避免过於繁複的枝節証明，有時为了要敍述明晰起見，还有意地容許了若干不嚴格的地方。为了簡便起見，有一些命題，在証明它們時，所用到的条件，比它所需要的更強一些；有些命題則只是敍述一下而不加証明。

最后，我們認为我們应該愉快地对 М. В. Келдыш 院士表示衷心的感謝，他曾愼重地審閱了全部原稿，並且給予了許多十分宝貴的忠告和指示。我們也感謝 А. В. Бицадзе 和 И. Г. Араманович，他們对本書的不同章節作了批評；感謝本書的出版者 Ю. К. Солнцев，他在許多地方对敍述方面作了改進。

М. А. 拉甫倫捷夫

Б. В. 沙巴特

目　　録

第二章 保角映射

第三章 函數論的边値問題及其应用

第一章　基本概念

在这一章里，要介紹複变函數論的所有基本概念：函數、函數的導數、積分等等。讀者就会看到，在实变函數分析中已熟悉的这些概念的普通定义，几乎全無变更地保留着，但是它們的內容却有了很重要的改变。例如，通常用平面上曲綫來表示函數的几何圖示法，已經不再存在了，代替它的是那把函數看做平面點集的映射的概念(第4節)。複变函數的可微条件顯得比实变函數的可微条件要嚴格得多(第5節)。例如，从函數在複变數范圍內的可微条件，就必然地会得出所有各階導數的存在(第17節)，以及函數的許多性質，这些性質在实变數分析中是極不常有的(第14、15以及其他諸節)。

在十八世紀，數学家們已經把複數和複变函數用在他們的研究工作中了。特別偉大的是十八世紀的彼德堡的大數学家歐拉(Leonhard Euler, 1707—1783)的貢献，他应当算做是複变函數論的一个締造人。在歐拉的那些卓越的著作中，詳細地研究了複变數的初等函數，其中包含了对數函數、指數函數、三角函數和反三角函數(1740—1749)；在这些著作中又給出了函數的可微条件① (1755)和複变函數積分法的基礎(1777)。歐拉也曾把複变函數論的很多应用使用於各种的數学問題，並且開始把它們应用到流体力学(1755—1757)与地圖制圖学(1777)上去。

在歐拉之后，他所發現的那些結果和方法，被繼續發展、改進和系統化。在十九世紀的前半期，複变函數論已經形成为數学分析中一个最

---

① 達朗倍尔(J. D'Alembert)在1752年从流体力学上的設想出發，也已得到了这些条件。但是只有在歐拉的著作中，才第一次弄清楚了它們的一般特性。

重要的部門了。其中主要的功績屬於勾犀(Augustin Cauchy, 1789—1857)和魏尔斯特拉斯(Karl Weierstrass, 1815—1897),他們發展了積分的計算和用級數表示函數的理論;还有黎曼(Bernhard Riemann, 1826—1866),他論証了函數論的几何問題和它們的应用。

§1. 複數

为了对讀者方便起見,我們在这里先敍述一些有關於複數的概念、複數的运算和複數的几何表示的主要定义和基本事实[①]。

1. 複數 像 $x+iy$ 样的式子叫做複數,其中 x 与 y 都是实數,而 i 則是一个符号,叫做虛數單位。x 与 y 二數分别叫做複數 $x+iy$ 的实數部分与虛數部分,用記号

$$x=\mathrm{Re}(x+iy), \quad y=\mathrm{Im}(x+iy) \tag{1}$$

來表示。特別是,在 $y=0$ 時,$x+i0$ 可以看做同实數 x 相合;而在 $x=0$ 時,$0+iy$ 就簡記作 iy,叫做純虛數。

我們來規定在複數集合里的相等概念与基本运算。当兩个複數 x_1+iy_1 与 x_2+iy_2 有

$$x_1=x_2, \quad y_1=y_2$$

時,而且也只有当这時,我們方說这兩个複數相等,記作

$$x_1+iy_1=x_2+iy_2。 \tag{2}$$

还有,如果 $x_1=x_2$ 而 $y_1=-y_2$,那么複數 x_1+iy_1 就称做是与 x_2+iy_2 共軛的,並用符号 $\overline{x_2+iy_2}$ 來表示。因此,

$$\overline{x+iy}=x-iy。 \tag{3}$$

① 第一次提到"虛數",把它作为負數的平方根,还是在十六世紀的事[卡丹(G. Cardano),1545]。到十八世紀中叶为止,複數僅是偶然地出現在个别數学家的著作里[牛頓,白諾利(N. Bernoulli),克列罗(A. Clairaut)]。第一篇複數理論的論文是歐拉用俄文發表的("Алгебра", Петербург, 1763, 以后这書被譯成別國文字並且出了許多版);符号"i"也是歐拉所創用的。複數的几何表示則是在十九世紀初叶的事[韋塞尔(C. Wessel),阿尔貢(J. Argand)]。

现在我們來下複數的运算的定义。

(1)加法　複數

$$z=z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2) \tag{4}$$

叫做 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 这兩个複數的和 z_1+z_2。从定义可直接得出下面的加法定律：

(甲)交換律：　$z_1+z_2=z_2+z_1$，

(乙)結合律：　$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$。

如果 z_1 与 z_2 兩數都是实數(卽，$y_1=y_2=0$)，則定义(4)就同普通的加法定义相符合。

加法可以有逆运算：对任何兩个複數 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$，總可以找出一个複數 z 來，使 $z_2+z=z_1$。这个複數 z 叫做 z_1, z_2 兩複數的差，用符号 z_1-z_2 來表示。顯然

$$z=z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)。 \tag{5}$$

(2)乘法　複數

$$z=z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2) \tag{6}$$

叫做 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 这兩个複數的積，記作 z_1z_2。

从定义可得出下面的乘法定律：

(甲)交換律：　$z_1z_2=z_2z_1$，

(乙)結合律：　$z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$，

(丙)分配律(对於加法的)：

$$(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3。$$

如果 z_1 与 z_2 兩數都是实數(卽，$y_1=y_2=0$)，則定义(6)就同普通的乘法定义相符合。在 $z_1=z_2=i$ 時，从乘積的定义就有

$$i\cdot i=-1。 \tag{7}$$

容易看到，公式(6)也可用下面的方法得出：先照普通的代數法則將 x_1+iy_1 与 x_2+iy_2 相乘，再用 -1 來代替乘積 $i\cdot i$。还可看出，複數 $z=x+iy$ 乘它的共軛數所得的積，永远不会是負的。实际上从(6)

式便有

$$z\bar{z}=x^2+y^2\geqslant 0。\tag{8}$$

乘法也可以有逆运算，不过要所給的乘數不等於零。設 $z_2\neq 0$，便可求得这样的一个複數 z，使 $z_2z=z_1$；按照公式(6)，为了求出 z，需要解方程組

$$\left.\begin{aligned} x_2x-y_2y=x_1,\\ y_2x+x_2y=y_1,\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

当 $z_2\neq 0$ 時，这方程組總有一个唯一的解，因为它的系數行列式是 x_2^2+ $+y_2^2>0$。这个數 z 叫做 z_1 与 z_2 兩數的商，用符号 $\frac{z_1}{z_2}$ 來表示。解出方程組(9)，我們便得到

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}。\tag{10}$$

顯然，公式(10)也可由將分數 $\frac{z_1}{z_2}$ 的分子与分母各乘以 $\bar{z}_2$ 而得到。

(3)整次乘冪　n 个相等的數 z 的乘積叫做數 z 的 n 次乘冪，用符号 z^n 來表示：

$$z^n=\underbrace{z\cdots z}_{n\text{次}}。\tag{11}$$

其逆运算——求方根——規定如下：如果 $w^n=z$，則 w 就叫做數 z 的 n 次方根（用符号 $\sqrt[n]{z}$ 來表示，在 $n=2$ 時，就簡寫成 $\sqrt{z}$）。在下面我們將看到，对於任何一个複數 $z\neq 0$，它的方根 $\sqrt[n]{z}$ 都有 n 个不同的值。

現在我們可以把等式(7)寫成 $i^2=-1$ 的形式，而对於虛數單位 i 來說，便有

$$i=\sqrt{-1}\tag{12}$$

（这里 $\sqrt{-1}$ 表示它所可能取的兩个值中的一个）。

2. 几何表示　我們考慮笛卡兒座标平面 xOy，並用座标为 (x, y) 的點來表示複數 $z=x+iy$。这時实數就用 x 軸（这条軸今后將称做

实軸)上的點來表示，而純虛數則用 y 軸(今后称做虛軸)上的點來表示。特别如，虛軸上的點(0, 1)就用來表示虛數 i。

容易看出，用这个方法，在 xOy 平面上每一个具有座标 (x, y) 的點，就都与一个完全确定的複數 $z=x+iy$ 成对应，反过來也是这样。所以，在全部複數与平面上一切點之間的这个对应關系是一一对应的關系。因此今后我們对複數与平面上的點这兩个概念，將不再加以區别，例如說"點 $1+i$"，"頂點为 z_1、z_2、z_3 的三角形"等等。

再者，平面上的每一个點 (x, y) 都对应於一个完全确定的向量——这个點的向徑，而在平面上的每一向徑，也都对应於一个完全确定的點——这向徑的終點(圖 1)。所以今后我們也將用平面上向徑的形式來表示複數。

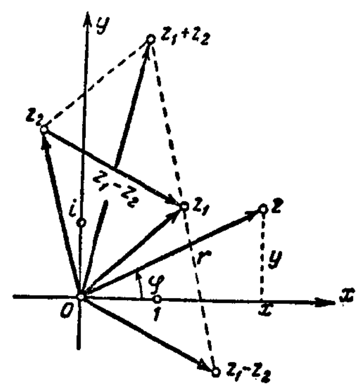

圖 1

複數的加法与減法运算的几何意义，从圖 1 中可以看得很清楚：兩个複數 z_1 与 z_2 的和与差，都可用向量來表示，即分别等於由 z_1 与 z_2 这兩个向量所構成的平行四边形的兩条有向对角線。

除了複數在笛卡兒座标內的表示法外，複數在極座标內的表示法，在以后也很有用。为了要用極座标來表示複數，我們同通常一样，取 x 軸的正向半軸作为極軸，取座标原點作为極點；於是，如果把點 z 的極徑記作 r，極角記作 φ(圖 1)，那么就有

$$z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)。\qquad (1)$$

極徑 r 叫做複數 z 的模，用記号 $|z|$ 來表示；極角 φ 叫做 z 的輻角，用記号 $\operatorname{Arg} z$ 來表示。複數的模是被唯一地确定了的：

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0, \qquad (2)$$

它的輻角却可以相差 2π 的任何一个整倍數：

$$\varphi=\operatorname{Arg} z=\begin{cases}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}+2k\pi & (\text{I, IV 象限}),\\ \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}+(2k+1)\pi & (\text{II, III 象限}),\end{cases} \tag{3}$$

在这里 arc tg 表示 Arc tg 的主值，即，$>-\frac{\pi}{2}$ 而 $\leqslant\frac{\pi}{2}$的那个值。除了用來表示輻角的全体值的那記号 Arg 外，以后我們將用記号 arg 來表示 Arg 的值中的一个值，在必要時，並將特別預先說明所取的是那一个值(參看第 6 節)。

下面的这兩个不等式很为明顯(見圖 1)：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|;\quad |z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||。\tag{4}$$

在(4)中的等号，在 $\operatorname{Arg} z_1=\operatorname{Arg} z_2$ 時，而且也只在这時，方能成立。

从上節中的定义(6)得出：当兩个複數相乘時，它們的模相乘，而輻角則相加。实际上，我們有

$$\begin{aligned}z_1z_2=r_1r_2\{&(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+\\&+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_2\cos\varphi_1)\}=\\=r_1r_2\{&\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\}。\end{aligned}\tag{5}$$

由此可見：在複數 z_1 乘以 z_2 的运算中，z_1 的模伸長[①]到 $|z_2|$ 倍，此外，向量 z_1 还旋轉了(照逆時針方向)角度 $\arg z_2$。在圖 2 中表示了乘積 $z=z_1z$ 的作法；为了作出 z，只要在線段 Oz_1 上作一个三角形 Oz_1z，使它同三角形 $O1z_2$ 相似就行了。

又，複數 z_1 被 z_2 除的运算，可以看做是乘 z_1 以 $\frac{1}{z_2}$，因此只要找出运算 $w=\frac{1}{z}$ 的几何意义就夠了。首先假定 $|z|<1$(圖 3)。从 z 點作射線 Oz 的垂線，再經过这垂線与圓周 $|z|=1$ 的交點，作那圓周的切線。对於这切線与射線 Oz 的交點 ω，顯然有

$$\operatorname{Arg}\omega=\operatorname{Arg} z,$$

---

① 如果 $|z_2|<1$，那么实际上就是把 $|z_1|$ 縮短到原長的 $\frac{1}{|z_2|}$。

而且由於直角三角形 $Oz\zeta$ 与 $O\zeta\omega$ 是相似的，有

$$\frac{|\omega|}{|\zeta|}=\frac{|\zeta|}{|z|},$$

又因为 $|\zeta|=1$，故有

$$|\omega|=\frac{1}{|z|}。$$

因此，數 ω 与 $\frac{1}{z}$ 共軛，$\omega=\frac{1}{\bar{z}}$。因而为了要得到點 $w=\frac{1}{z}$，便只要作出 ω 对於实軸的对称點就可以了。

从點 z 到點
$$\omega=\frac{1}{\bar{z}}$$
的变换，叫做反演，或对於單位圓 $|z|=1$ 的对称变换。因此，运算 $w=\frac{1}{z}$ 在几何上講，就是实施兩个相繼的对称变换——反演与对於实軸的对称变换。

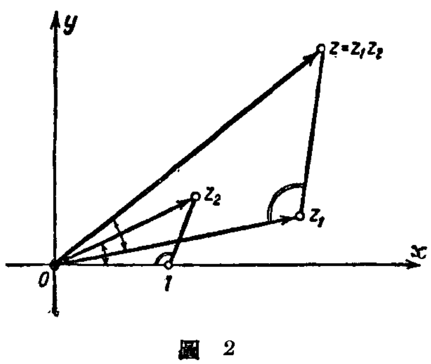

圖 2

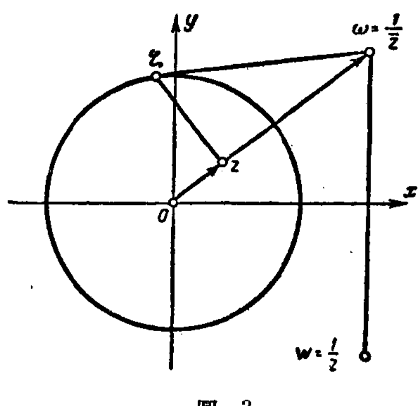

圖 3

如果 $|z|>1$，那么就用相反的次序來進行上面所說的作圖法；如果 $|z|=1$，那么點 $\omega=\frac{1}{\bar{z}}$ 就同 z 重合，而求 $w=\frac{1}{z}$ 的作圖，也就变成一个对於实軸的对称变換了。

乘冪的几何意义，由上面所說已經很是明顯。關於求 n 次方根，我們看到，根据方根的定义及公式(5)，对於 $w=\sqrt[n]{z}$ 來說有

$$|w|^n=|z|,\quad n\arg w=\arg z,$$

所以就得出

$$|w|=\sqrt[n]{|z|},\quad \arg w=\frac{\arg z}{n}。\tag{6}$$

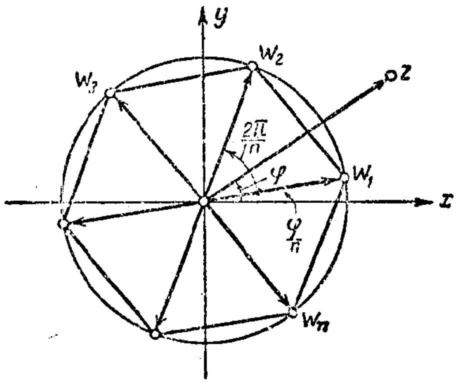

圖 4

關系式(6)中的第一个式子表明,所有那些方根的模都是相同的;第二个式子表明,它們的輻角都彼此相差$\frac{2\pi}{n}$的一个整倍數。因此我們就知道,任何複數$z\neq0$的n次方根,都有n个不同的值,而且这些值可以被排成内接於圓$|w|=\sqrt[n]{|z|}$的一个正n角形上的n个頂點(見圖4,在圖中置$n=6$)。

§2. 複变函數

在这一節中,我們將要介紹複变函數論的一些最基本的概念:複变函數,它的極限、導數等,最后还要介紹解析函數的概念。在这里佔中心地位的是第5節中确立複变函數的可微条件的那个定理。这条件普通称做勾犀-黎曼条件,但是在勾犀和黎曼以前,这条件已經基本地被採用在達朗倍尔和歐拉的著作里了(参看本章的引言)。因此① 我們將称之为達朗倍尔-歐拉条件。

3. 几何概念 複數平面上的一个點集D,叫做在複數平面上的一个區域,假若它具有下述这兩个性質:(1)在D中的每一个點,必有以这个點为圓心的一个充分小的圓,同它一起都屬於这集合(開集性),(2)在D中的任何兩个點,都可以用一条由D内的點所構成的折線來联起來(連通性)。

① 按照 А. И. Маркушевич 教授的建議。

複數平面上的點的鄰域，可以作为區域的簡單例子。所謂一个點 a 的 ε 鄰域，是指以这一點 a 为圓心，以 ε 为半徑的一个開圓，即，滿足不等式

$$|z-a|<\varepsilon$$

的那些點的集合。

凡是其本身不屬於區域 D，而在它的任何鄰域內都包含有屬於 D 的點的那种點，叫做區域 D 的界點。區域 D 的所有界點的集合，叫做这區域的边界。區域 D 同它的边界合在一起，叫做閉區域，用記号 $\overline{D}$ 來表示。

我們將假定，一个區域的边界是由有限多的閉曲線、截痕与點所組成的（我們不給这些概念下定义；参看圖 5，圖中的那个區域的边界是由三条閉曲線 Γ_0, Γ_1, Γ_2，兩条截痕 γ_1, γ_2 与一个點 α 所組成的）。組成边界的那些曲線与截痕，我們將總假定是逐段光滑的，就是說，是由有限个光滑的弧（具有連續变動的切線的弧）所構成的。在有界區域 D 的情形中，它的边界被分成若干連接部分，这些部分的數目，叫做这个區域的連通階數[①]（在圖 5 中，表示一个五階連通區域；Γ_0 与 γ_1 形成边界的一个連接部分）。特別是，如果區域 D 的边界是連接的（由一个連接部分所構成的），那么 D 就称做是一个單連區域。

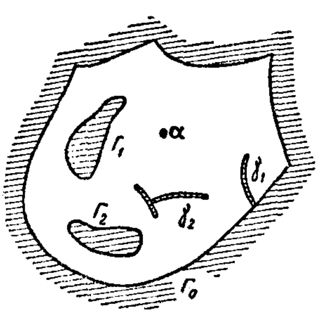

圖 5

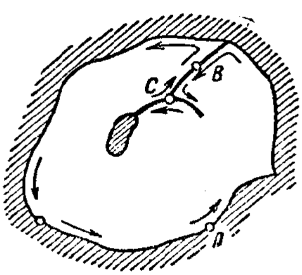

圖 6

① 在这个定义中，我們假定區域 D 是有界的，就是說，是包含在某一个圓 $|z|<R$ 內的；連通階數的定义推廣到無界區域的情形，見第 24 節。