3040/21

中学数学实验教材

第三册（上）

中学数学实驗教材編写組

*

北京师范大学出版社出版

新华書店北京发行所发行

北京师范大学印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/32　印张：8.75　字数：183千

1983年6月第1版　1984年6月第2次印刷

印数：32，501——50，601

统一书号：7243·128　定价：0.73元

前　言

这一套中学数学实验教材，内容的选取原则是精简实用，教材的处理力求深入浅出，顺理成章，尽量作到使人人能懂，到处有用.

本教材适用于重点中学，侧重在满足学生将来从事理工方面学习和工作的需要.

本教材的教学目的是：使学生切实学好从事现代生产，特别是学习现代科学技术所必需的数学基础知识；通过对数学理论、应用、思想和方法的学习，培养学生运算能力，思维能力，空间想象力，从而逐步培养运用数学的思想和方法去分析和解决实际问题的能力；通过数学的教学和学习，培养学生良好的学习习惯，严谨的治学态度和科学的思想方法，逐步形成辩证唯物主义世界观.

根据上述教学目的，本教材精选了传统数学那些普遍实用的最基础的部分，这就是在理论上、应用上和思想方法上都是基本的、长远起作用的通性、通法.比如，代数中的数系运算律，式的运算，解代数方程，待定系数法；几何中的图形的基本概念和主要性质，向量，解析几何；分析中的函数，极限，连续，微分，积分；概率统计以及逻辑、推理论证等知识. 对于那些理论和应用上虽有一定作用，但发展余地不大，或没有普遍意义和实用价值，或不必要的重复和过于繁琐的内容，如立体几何中的空间作图，几何体的体积、

表面积计算，几何难题，因式分解，对数计算等作了较大的精简或删减。

全套教材共分六册．第一册是代数．在总结小学所学自然数、小数、分数基础上，明确提出运算律，把数扩充到有理数和实数系．灵活运用运算律解一元一次、二次方程，二元、三元一次方程组，然后进一步系统化，引进多项式运算，综合除法，辗转相除，余式定理及其推论，学到根式、分式、部分分式．第二册是几何．由直观几何形象分析归纳出几何基本概念和基本性质，通过集合术语、简易逻辑转入欧氏推理几何，处理直线形、圆、基本轨迹与作图，三角比与解三角形等基本内容．第三册是函数．数形结合引入坐标，研究多项式函数、指数、对数、三角函数、不等式等．第四册是代数．把数扩充到复数系，进一步加强多项式论，方程式论，讲线性方程组理论，概率（离散的）统计的初步知识．第五册是几何．引进向量，用向量和初等几何方法综合处理几何问题，坐标化处理直线、圆、锥线，坐标变换与二次曲线讨论，然后讲立体几何，并引进空间向量研究空间解析几何初步知识．第六册是微积分初步．突出逼近法，讲实数完备性，函数，极限，连续，变率与微分，求和与积分．

本教材基本上采取代数、几何、分析分科，初中、高中循环排列的安排体系，教学可按初一、初二代数、几何双科并进，初三学分析，高一、高二代数（包括概率统计）、几何双科并进，高三学微积分的程序来安排．

本教材的处理力求符合历史发展和认识发展的规律，深入浅出，顺理成章．突出由算术到代数，由实验几何到论证

几何，由综合几何到解析几何，由常量数学到变量数学等四个重大转折，着力采取措施引导学生合乎规律地实现这些转折，为此，强调数系运算律，集合逻辑，向量和通法分别在实现这四个转折中的作用．这样既遵循历史发展的规律，又突出了几个转折关头，缩短了认识过程，有利于学生掌握数学思想发展的脉络，提高数学教学的思想性．

这一套中学数学实验教材是教育部委托北京师范大学、中国科学院数学研究所、人民教育出版社、北京师范学院、北京景山学校等单位组成的领导小组组织“中学数学实验教材编写组”，根据美国加州大学伯克利分校数学系项武义教授的《关于中学实验数学教材的设想》编写的．第一版印出后，由教育部实验研究组和有关省市实验研究组指导，在北京景山学校、北京师院附中、上海大同中学、天津南开中学、天津十六中学、广东省实验中学、华南师院附中、长春市实验中学等学校试教过两遍，在这个基础上编写组吸收了实验学校老师们的经验和意见，修改成这一《中学数学实验教材》，正式出版，供中学选作实验教材，教师参考书或学生课外读物，在编写和修订的过程中，项武义教授曾数次详细地修改过原稿，提出过许多宝贵意见．

本教材虽然试用过两遍，但是实验基础仍然很不够，这次修改出版，目的是通过更大范围的实验研究，逐步形成另一套现代化而又适合我国国情的中学数学教科书．在实验过程中，我们热忱希望大家多提意见，以便进一步把它修改好．

中学数学实验教材编写组

一九八一年三月

目　录

第一章　指数概念普遍化与对数

§1　指数概念普遍化

1.1　引言

这一节我们要把指数的概念加以推广，除了第一册学过的整数指数、零指数外，还要引入负整数指数，正、负分数指数，为能够应用对数来简化乘法、除法、乘方、开方的计算建立初步理论基础.

在推广过程中要注意以下几个方面：

1. 各种定义的条件.
2. 探索各种定义产生的逻辑过程.
3. 要熟练运用各种定义去计算.

我们来回忆一下正整数指数幂的定义：

定义 1　$a^n = \overbrace{a\cdot a\ \cdots\ a}^{n个}$（$n$是大于 1 的正整数），其中$a$称为**底数**，$n$称为**指数**，$a^n$称为以$a$为底数、$n$为指数的**幂**. 当$n=1$时，规定$a^1=a$. 在定义 1 中，对于底数$a$，没有任何限制，$a$可以是正数，也可以是负数，也可以是零；而指数$n$，必须是正整数，否则定义 1 就无意义！这样，我们称按定义 1 定义的a^n为正整数指数幂.

我们可以证明正整数指数幂有下列性质：

（1）$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$（m，n为正整数）；

（2）$a^m \div a^n = a^{m-n}$（m，n 为正整数，且 $m>n$，$a \neq 0$）；

（3）$(a^m)^n = a^{mn}$（m，n为正整数）；

（4）$(ab)^n = a^n b^n$（n为正整数）；

（5）$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$（$n$为正整数，$b \neq 0$）.

以后将会看到，将指数概念扩充到新的范围以后，这几条性质依然保留，并且可以适当地合并.

1.2 零指数与负整数指数

<Ⅰ> 从正整数指数幂的性质可以看到：

幂的乘法可以转化为指数加法，（性质（1））

幂的除法可以转化为指数减法，（性质（2））

幂的乘方可以转化为指数相乘.（性质（3））

要使正整数的加、减、乘、除，尤其是减、除通行无阻，那么指数只限制在正整数范围是不行的，例如：$a^3 \div a^2 = a^{3-2} = a^1 = a$，这个转化是沒有问题的，但是

$$a^3 \div a^3 \stackrel{?}{=} a^{3-3} \stackrel{?}{=} a^0 = ?$$

$$a^2 \div a^4 \stackrel{?}{=} a^{2-4} \stackrel{?}{=} a^{-2} = ?$$

要使指数的减法通行无阻，就会出现零指数和负整数指数，而零指数和负整数指数是什么，过去从未见过，这就有必要将指数的概念加以推广，给零指数和负整数下定义.

<Ⅱ> 探索零指数和负整数指数如何定义.

我们知道

$$a^m \div a^n = a^{m-n},$$

这里限制$a \neq 0$，并且$m>n$，m、n均为正整数，现在把$m>n$的条件取消，这样m可以等于n. 在$m=n$的时候，上面的公式就是：

$$a^m \div a^n = a^n \div a^n = a^{n-n} = a^0 \quad (a \neq 0);$$

而$a^n \div a^n$的实际内容是

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^n}{a^n} = 1.$$

为了使公式 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 也适用于 $m=n$ 的情况，就应该使形式上的运算结果“a^0”与实际内容“1”一致起来，我们规定a的零次幂等于1，即$a^0 = 1\ (a \neq 0)$就合理了。

用同样的方法，来探索$m<n$时的情况。

当$m<n$时，

$$a^m \div a^n = a^{m-n} = a^{-(n-m)},$$

这里$-(n-m)$是个负整数，我们还没有规定$a^{-(n-m)}$的意义；

但另一方面，在$m<n$的条件下，$a^m \div a^n$的实际意义是：

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m \div a^m}{a^n \div a^m} = \frac{1}{a^{n-m}} (a \neq 0).$$

这样看来，为了使公式 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 在 $m<n$ 时也适用，规定：

$$a^{-(n-m)} = \frac{1}{a^{n-m}} (a \neq 0)$$

就可以了，也就是说，n是正整数的时候，应规定：

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n, \quad a \neq 0$$

<Ⅲ> 对零指数和负整数指数下定义

定义2 $a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$.

定义3 $a^{-n} = \frac{1}{a^n} (a \neq 0，n是正整数)$.

这两个定义中特别要注意“$a \neq 0$”这个条件，也就是说零

的零次幂是没有意义的，零的负整数次幂也是没有意义的。

有了定义 2 和定义 3，对于同底数的整数指数幂相除的运算法则，就可通行无阻，而不必再局限于 $m>n$ 了，例如

$$(-2)^2\div(-2)^2=(-2)^0=1,$$

$$4^5\div4^7=4^{5-7}=4^{-2}=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}.$$

定义 1、2、3 说明现在我们的指数已经扩充到整数范围了。

<Ⅳ> 性质的证明

一般来说，当一个概念被推广以后，原来具有的性质可能有些仍然保持成立，有些就不再成立了。所以必须对原来的性质逐条加以研究，对那些仍然成立的性质，加以证明肯定，对那些不再成立的性质也应通过举反例加以否定。另外，新的概念是否又带来了新的性质，这是研究推广了的概念应该注意的一个问题，只有通过这样的研究，才能掌握推广了的概念。

把指数概念推广到整数范围以后，上述五条性质，因条件起了变化，就成为：

(1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ $(m,\ n\in Z,\ a\neq0)$；

(2) $a^m\div a^n=a^{m-n}$ $(m,\ n\in Z,\ a\neq0)$；

(3) $(a^m)^n=a^{mn}$ $(m,\ n\in Z,\ a\neq0)$；

(4) $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$ $(ab\neq0,\ n\in Z)$；

(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ $(ab\neq0,\ n\in Z)$。

现在我们来证明性质(1)。

已知：m，n是任意两个整数，$a\neq0$。

求证：$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$.

我们要对m，n分各种情况来讨论．由于m，n均可取正整数、负整数和零，即

$$m=\begin{cases}0\\\text{正整数}\\\text{负整数,}\end{cases}\qquad n=\begin{cases}0\\\text{正整数}\\\text{负整数.}\end{cases}$$

因而从m中取出一种情况，从n中取出一种情况，组成一种情况，那么一共有$3\times3=9$种，在这九种情况中，因为m=正整数，n=正整数的情况以前已证过，可以略去．又由于实数乘法适合交换律，因而m，n是对称的，这样，我们只就下面五种情况来证明：

$$\begin{cases}m=0\\n=0\end{cases};\quad\begin{cases}m=\text{正整数}\\n=0\end{cases};\quad\begin{cases}m=\text{负整数}\\n=0\end{cases};$$

$$\begin{cases}m=\text{正整数}\\n=\text{负整数}\end{cases};\quad\begin{cases}m=\text{负整数}\\n=\text{负整数}\end{cases}.$$

情况1° 当$m=0$，$n=0$时，由零指数的定义，

$$a^m\cdot a^n=a^0\cdot a^0=1\cdot1=1=a^0=a^{m+n},$$

$\therefore\ a^m\cdot a^n=a^{m+n}$成立．

情况2° 当m是正整数，$n=0$时，

$$a^m\cdot a^n=a^m\cdot a^0=a^m\cdot1=a^m=a^{m+0}=a^{m+n},$$

$\therefore\ a^m\cdot a^n=a^{m+n}$成立，

情况3° 当m是负整数，$n=0$时，

$$\begin{aligned}a^m\cdot a^n&=a^m\cdot a^0=a^m\cdot1\\&=a^m=a^{m+0}\\&=a^{m+n}.\end{aligned}$$

$\therefore\quad a^m\cdot a^n=a^{m+n}$成立。

情况4° 当m是正整数，n是负整数，那么$n=-|n|$，$|n|$为正整数。

$$\because\quad a^m\cdot a^n=a^m\cdot a^{-|n|}=a^m\cdot\frac{1}{a^{|n|}}=\frac{a^m}{a^{|n|}}$$

$$=a^{m-|n|}=a^{m+(-|n|)}=a^{m+n},$$

$\therefore\quad a^m\cdot a^n=a^{m+n}$成立。

情况5°，当m，n都是负整数时，那么
$m=-|m|$，$n=-|n|$。

$$\because\quad a^m\cdot a^n=a^{-|m|}\cdot a^{-|n|}=\frac{1}{a^{|m|}}\cdot\frac{1}{a^{|n|}}$$

$$=\frac{1}{a^{|m|}\cdot a^{|n|}}=\frac{1}{a^{|m|+|n|}}$$

$$=a^{-(|m|+|n|)}$$

$$=a^{(-|m|)+(-|n|)}$$

$$=a^{m+n}$$

$\therefore\quad a^m\cdot a^n=a^{m+n}$成立。

综合五种情况及前面的分析，就证明了当m，n为任意整数时，$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$成立。

其它几条性质可以类似地证明。

应当指出，有了定义2、3以后，对于任何整数n，都有：

$$\frac{1}{a^n}=a^{-n}\ (a\neq 0)。$$

这是因为：当n是正整数时，这就是定义3，当n为零时，

$$\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a^0}=\frac{1}{1}=1=a^0=a^{-n};$$

当n为负整数时，$n=-|n|$

$$\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a^{-|n|}}=a^{|n|}=a^{-n}.$$

这样，定义 3 虽然是对n为正整数来说的，有$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$，但实际上暗示了n为任意整数时，$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$都有了确定的意义。

有了这个公式，上面的性质（2）就可归结到性质（1）上。

事实上，只要（1）成立，那么对于任何整数m，n我们有：

$$a^m\div a^n=a^m\cdot\frac{1}{a^n}=a^m\cdot a^{-n}=a^{m+(-n)}=a^{m-n}.$$

有了这个公式，上面的性质（5）也可归结为性质（3）和（4）。

事实上，只要（3）和（4）成立，那么对于任何整数m,n，我们有：

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(a\cdot\frac{1}{b}\right)^n=(a\cdot b^{-1})^n=a^n\cdot(b^{-1})^n$$

$$=a^n\cdot b^{-n}=a^n\cdot\frac{1}{b^n}=\frac{a^n}{b^n}.$$

这样，五条性质可归结为三条性质：

（1）$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$（$a\neq 0$；m，$n\in Z$）；

（2）$(a^m)^n=a^{mn}$（$a\neq 0$；m，$n\in Z$）；

（3）$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$（$ab\neq 0$，$n\in Z$）。

例1 $2^0=1$；$(0.75)^0=1$；$(-\sqrt{3})^0=1$；0^0无意义；

$10^{-3}=\frac{1}{10^3}=0.001$；$3(-2)^{-4}=\frac{3}{(-2)^4}=\frac{3}{16}$；

$(\frac{1}{2})^{-5}=2^5=32$；$(-0.25)^{-1}=(-\frac{1}{4})^{-1}=-4$。

例2 把下列单项分式化成整式形式：

$$\frac{a}{3bc^2}=\frac{1}{3}ab^{-1}c^{-2}，$$

$$\frac{3}{2a^{-3}b^{-1}c^2}=\frac{3}{2}a^3bc^{-2}.$$

例3 把下面的数写成$a\cdot10^n$的形式，这里a是含有一位整数的数，n是任意整数（把一个数写成这种形式叫科学记数法）.

1吨(t)＝1000公斤(kg)＝10^3公斤(kg)；

1毫米(mm)＝0.001米(m)＝10^{-3}米(m)；

1年＝31,556,925，975秒(s)＝3.1556925975×10^7(s)

$\approx3.156\times10^7$(s)；

地球到太阳的距离＝149,640,000公里(km)

$=1.4964\times10^8$(km)；

地球的质量＝5,970,000,000,000,000,000,000(t)

$=5.97\times10^{21}$(t)；

原子核U_{235}的半径＝0.000,000,000,000,93(cm)

$=9.3\times10^{-13}$(cm)。

例4 1) $(b^{-3})^{-2}=b^{(-3)(-2)}=b^6$；

2) $(3a^{-2}b^2c^{-3})(\frac{4}{5}ab^{-3}c^3)$

$$=\frac{12}{5}a^{-2+1}b^{2+(-3)}c^{-3+3}$$

$$=\frac{12}{5}a^{-1}b^{-1}$$

$$=\frac{12}{5ab};$$

$$3)\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{-3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{-2}=\left[\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{-1}\right]^{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{-2}$$

$$=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{-2}=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{3-2}=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{1}$$

$$=\frac{a-b}{a+b}.$$

例 5　1) $$\frac{(a^{-2}b^{-3})(-4a^{-1}b)}{12a^{-4}b^{-2}}=\frac{-4a^{-2-1}b^{-3+1}}{12a^{-4}b^{-2}}$$

$$=\frac{-4a^{-3}b^{-2}}{12a^{-4}b^{-2}}=-\frac{1}{3}a;$$

$$2)(x^2-y^{-2})\div(x-y^{-1})$$

$$=[x^2-(y^{-1})^2]\div(x-y^{-1})$$

$$=(x+y^{-1})(x-y^{-1})\div(x-y^{-1})$$

$$=x+y^{-1}=x+\frac{1}{y}.$$

习题 1.2

1. 换去下列各算式中的负指数：

1) $4x^{-3}y^3$，2) $\frac{1}{5c^{-3}}$ 3) $\frac{4a^{-2}}{5b^{-3}}$，4) $\frac{3a^{-3}x^2}{5b^3y^{-4}}$.

2. 证明下面的运算法则，如果m，n为任意整数，而$a\neq 0$，则$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$.

3. 把下列的数写成$a \cdot 10^n$的形式，这里a是含有一位整数的数，n是任意整数：

1) 8900，2) 3,200,000，3) 0.000,015，4) 0.000,000,025.

4. 下面是物理学常用的长度单位，将它化成mm并以10的幂表示出来：

$$1\text{微米}(1\,\mu m)=\frac{1}{1000}mm;$$

$$1\text{毫微米}(1\,nm)=\frac{1}{1,000,000}mm;$$

$$1\text{微微米}(1\,pm)=\frac{1}{1,000,000,000}mm.$$

5. 以10的幂来表示：

1 mm^2是多少cm^2；

1 cm^3是多少m^3 (Litre即升)；

1 g是多少kg，是多少吨(t)，

6. 将下面的数据用小数形式表示出来：

a) 红血球的直径$=0.7\times10^{-3}$(cm)；

b) 最小的细菌的长度$\approx10^{-4}$(cm)；

c) 钠光(黄色)的波长$=589\times10^{-7}$(cm)；

d) 氢原子的直径$\approx10^{-8}$(cm)；

e) 氢原子的质量$=1.64\times10^{-24}$(g)；

f) 电子的质量$=9\times10^{-28}$(g)；

g) 铀矿石的含镭量$=3.328\times10^{-5}\%$.

7. 完成下列运算并将所得结果中的负指数变换成正指数：

1) $(2x^2)\div(3x^{-3})$；2) $ax^2\div x^{-1}$；3) $(a^{-2}x^2)\div a^4$；

4) $(ax)^{-3}\div(bx)^{-3}$；5) $(2^n)^{n-1}\div(2^{n-1})^{n+1}(n>1)$.