

桿件体系振动与 稳定的計算法

B. Г. 邱得諾夫斯基

科学出版社

22

15

桿件體系振動與 穩定的計算法

B. Г. 邱得諾夫斯基 著

呂子華 譯

科學出版社

В. Г. ЧУДНОВСКИЙ
МЕТОДЫ РАСЧЕТА
КОЛЕБАНИЙ И УСТОЙЧИВОСТИ
СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Изд. АН УССР, Киев, 1952

內 容 簡 介

本書是技術科學博士 В. Г. 邱得諾夫斯基教授在 1936—1949 的 13 年間對結構振動和結構穩定所作的研究成果。內容包括基本方程、比擬與推廣；軸的扭轉振動；桿件與平面剛架的振動和穩定；圓拱與圓環的振動和穩定以及空間剛架的振動和穩定等五篇。本書可供設計工程師、科學工作者和研究生的參考之用。

桿件體系振動與穩定的計算法

В. Г. 邱得諾夫斯基著
呂 子 華 譯

科學出版社出版 (北京朝陽門大街 117 號)
北京市書刊出版業營業許可證出字第 061 號

科學出版社上海印刷廠印刷、新華書店總經售

1958 年 12 月第一版 書號：1495 字數：466,000
1958 年 12 月第一次印刷 開本：787×1092 1/18
(滬) 0001—2,554 印張：20 插頁：2

定價：(10) 3.70 元

1958年12月

原書編者序

B. Г. 邱得諾夫斯基的專集，是一部關於建築力學中一個複雜部分的巨著。這個複雜部分就是：桿件體系顧及軸向力影響和材料能量散逸的自由振動與強迫振動的計算理論。

由於一系列比擬的結果，作者成功地把結構動力學和穩定性的問題，轉化為具有附加彈性“推動”聯系的結構的靜力計算問題。在這些比擬的基礎上，桿件體系建築力學的普通方法，已被推廣用來計算體系的振動和穩定。根據提出的方法，很容易把所獲得的解答轉用到體系在彈性介質中的振動和穩定的問題中。

在這本著作中，含有多種多樣的問題，其中包括：動力裝置上軸的扭轉振動的計算，桿件、直梁、圓拱以及平面剛架和空間剛架的振動與穩定等。書中列舉了許多數字例題，並附有特殊函數表，藉以闡明和簡化本書提出的實用的計算法。

本書的絕大部分多是作者獨創的研究成果，這些成果業已具有便於應用的形式，而且幫助工程師們解決了由實踐中提出的許多複雜問題。

烏克蘭科學院和烏克蘭建築科學院院士

Ф. П. 別良金

著 者 序

隨着現代機器尺寸的加大、功率的增長和速度的提高，保證機器以及與之相聯的結構物的強度問題，日益具有重大的意義。計算上述結構的自由振動與強迫振動，通常就是解決這些問題的基礎。曲柄軸的扭轉振動，基礎、樓蓋和剛架在所裝置的機器作用下的振動，以及橋梁在動載荷作用下的振動之計算等等，其實用重要性，已是人所共知的。

正是由於這種原故，建立與靜力計算類似的計算結構振動的工程方法，就成為一個特別重要的問題。有了以簡單而明晰的概念為基礎的計算法，就可以比較容易地確定振動結構所必需的尺寸；從而使振動結構不發生危險的應力和位移的條件有所保障。為此，必須脫離早已熟知的微分方程和原則性的力學定理，轉而建立計算振動頻率與振幅的簡便的實用方法。

在最近的十年內，結構靜力學經歷了從一般理論進到使多種問題能有簡單解的計算法的發展道路。目前，結構動力學也正經歷着同樣的發展道路。

在研究和發展原理新穎實用上重要的解決結構動力學問題的方法中，主要地位應該屬於蘇維埃學者。

在計算結構自由振動和強迫振動的領域內，A. H. 克雷洛夫院士的基本著作[80]~[82]是衆所周知的。

Л. И. 曼捷爾斯坦，H. Д. 巴巴列克斯，H. M. 克雷洛夫和 H. H. 鮑果留鮑夫[83]各位院士的卓越著作，對非綫性振動問題（準諧和振動和膺諧和振動）¹⁾有所貢獻。桿件和剛架在週期性縱向力作用下的振動也屬於這一類問題。H. M. 克雷洛夫院士和 H. H. 鮑果留鮑夫院士[84]、[85]，M. A. 拉夫連捷夫院士和 A. Ю. 依什林斯基院士[86]，H. M. 別遼耶夫教授[15]，A. Ф. 斯米爾諾夫教授[178]，Г. В. 榜達連柯[21]，B. K. 契洛麥[201]、[202]，M. Я. 列昂諾夫[87]，И. И. 果爾儉布拉[42]以及其他諸人，都對這類問題和結構的動力穩定問題作過一番研究。

И. М. 拉賓諾維奇教授的著作[146]、[150]、[152]，對於涉及結構動力學的廣泛問題，作出了一定的貢獻。

在 B. 3. 符拉索夫教授的巨著[28]~[30]中，專門研究了薄壁桿件和薄壁結構的振動。

在 И. В. 安納耶夫[1]，C. A. 別倫斯坦教授[18]~[20]，Я. Л. 魯捷爾曼教授[121]等人的著作中，提出了基於積分方程理論的、計算桿件體系自由振動頻率的方法。

1) 係數隨時間而變化的綫性微分方程所表示的振動，稱為準諧和振動；彈性體系具有隨時間而變的剛度和質量時，就將引起這種振動。非綫性微分方程所表示的振動，稱為膺諧和振動；彈性體系的恢復力不與位移成正比時引起的振動，就屬於這一類。——譯者註

C. A. 別倫斯坦教授為確定桿件體系自由振動頻率而提出的所謂“譜函數”法，享有普遍的聲譽。

H. И. 別卓霍夫教授 [8]~[11]，A. Ф. 斯米爾諾夫教授 [178]，С. Г. 札爾別格教授 [61]，A. A. 別洛烏斯教授 [13]、[14]，本書作者 [203] 以及其他諸人的著作，對於計算直梁和剛架的自由振動與強迫振動的初參數法、形變法、力法和定點法，都曾作過一番研究。在 C. B. 賽連生 [169]，K. C. 札夫里耶夫 [53]~[58]，A. П. 菲利波夫 [199]、[200]，M. Г. 克萊茵與 Я. Л. 魯捷爾曼 [98]，B. И. 諾沃托爾采夫 [113]~[118]，E. C. 索羅金 [173]、[174] 諸位教授的著作中，都曾提出了計算直梁、平面和空間骨架、以及拱振動的方法。

在 A. A. 依留辛 [62]，H. П. 巴甫留克 [122]，H. A. 索柯洛夫 [172] 諸位教授的著作中，研究過壓桿與拉桿的橫向振動。

A. П. 菲利波夫教授 [196]，Д. Д. 巴爾岡 [6]，E. Л. 尼古拉依教授和 A. И. 盧列 [111] 等人的著作，對於剛構基礎與實體基礎的振動，有所貢獻。

在 A. A. 烏曼斯基教授的著作中 [195]，研究了浮橋的振動。С. Н. 尼基浮羅夫教授 [106] 和 П. Г. 列拉索夫 [105] 的著作，則對確定下承金屬結構與牽索桁架的振動形式和頻率的問題，作出一定的貢獻。

橋梁動力學的一些理論和實驗研究成果，藏於 H. C. 斯脫列茨基 [184]，И. М. 拉賓諾維奇 [139]~[143]，Г. A. 尼古拉耶夫 [108]，C. A. 依達塞維奇 [63]、[64]，C. A. 別倫斯坦 [17] 諸位教授的著作中。

Ю. A. 尼連捷 [112]，A. П. 菲利波夫 [197]、[198]，E. C. 索羅金 [175]，И. Л. 柯喀斯基 [75]、[76]，P. O. 麥里克-阿達姆 [97]，Г. C. 彼薩連柯 [137]，Д. Ю. 巴諾夫 [126]，M. И. 巴契 [7] 諸位教授的著作，對結構材料中振動衰減規律的理論和實驗研究，有所貢獻。

另一個極為重要的桿件體系的彈性穩定問題，與結構的自由振動問題在數學形式上極相近似。不過，這兩個問題原是獨立地發展起來的，基於它們本身意義的這種相似之處，只是最近才引起學者們的注意（見 [121]、[130]、[131] 及其他）。我們不準備列舉結構穩定領域內的許多著作，這裏只須指出：在計算方法的研究中，祖國學者起了先驅的作用（參閱 [45]、[49]、[73]、[153] 中的文獻目錄）。

體系自由振動與穩定問題之間的密切關係，以及為解決這些問題而提出的方法之間的一致性，促使本書作者把這些問題聯系在一起；並且在後文中，將只考慮桿件體系（梁、拱和剛架）的自由振動和強迫振動問題，這些體系的構件經受着與時間無關的恆定軸向力的作用。與此同時，書中提出的振動體系的質量慣性力、縱向力、以及（反力沿位移方向的）彈性“推動”聯系之間的比擬，使下列三類桿件體系建築力學問題的解，能夠得到統一：1) 承擔分佈和集中質量的受拉與受壓桿件體系，在有分佈和集中彈性聯系時的自由振動與強迫振動；2) 具有彈性約束的體系在彈性介質中和彈性支承上的穩定性；3) 桿件體系無彈性聯系時的振動與穩定。

上述比擬和以之為基礎的動力學與穩定問題的靜力解釋，具備很多優點。在許

多場合下,它使桿件體系自由振動與強迫振動的複雜現象易於理解,因為,它把這些問題歸結為早已研究過和早已熟悉的靜力學問題。此項靜力解釋還有這樣一個優點。那就是:它可以把結構靜力學中已經研究得很成熟的方法,比較簡單地轉用到結構動力學和穩定理論中來,不過,在轉用時必須要顧及所研究問題的固有特性。

彈性體系的自由振動與穩定問題之間建立起來的關係,也是動力實驗插補法提出的主要根據,這個方法可以用來確定體系的臨界載荷,而不必使實驗模型或結構本身到達喪失穩定的情況。對以上所述應該加以補充的是:本書在研究結構的強迫振動時,考慮了材料中的能量散逸;當體系在共振區域內振動,而欲求其發生的實際形變與內力時,這是極為重要的。

在第一篇中,提出了作為本書全部計算方法基礎的基本關係和比擬。在這一篇裏,我們導出了空間剛架直桿作強迫彎曲振動和扭轉振動的微分方程,其中考慮到軸向力的作用和材料內阻的影響。此外,還導出了在外界均勻靜水壓力作用下,圓形曲桿作強迫平面彎曲振動的微分方程,其中也顧及拱的材料內部阻尼。根據獲得的這些微分方程,我們指出了諧和振動的慣性力幅度和彈性“推動”聯系所生反力之間的比擬。這些比擬也被推廣到直桿和圓桿以及由之組成的體系的穩定問題中。

第二篇專門討論動力裝置上軸的自由扭轉振動問題。為了確定軸的振動頻率以及與之相應的振動形式,我們提出了三扭矩法和形變法(扭角法)。

本書主要內容之一的第三篇,着重介紹了下面幾個一般性方法:1)計算受壓或受拉直桿的自由振動和強迫振動的初參數法,這些受壓或受拉的直桿除承擔均佈質量外,還承擔彼此間隔等距離的相同集中質量;2)計算平面剛架自由振動和強迫振動的形變法;此時,剛架的構件由於不變軸向力的作用而受拉或受壓,並且除均佈質量外,還承擔間隔等距離的相同集中質量;3)計算梁和平面剛架自由振動與強迫振動的力法,這些梁和剛架承擔具有移動慣性和轉動慣性的任意集中質量;4)計算桿件和平面剛架穩定性的力法;5)確定桿件與剛架臨界載荷的動力實驗插補法。在所有這些計算強迫振動的方法中,都考慮到結構材料的內阻。

在初參數法中,我們導出了基本公式和由初參數建立的函數的表達式。討論了兩端可以彈性移動和轉動的等截面直桿的自由振動與穩定問題。以圖表的形式表示出自由振動頻率、法向力、和與振動着的受壓或受拉直桿相聯系的文克爾式彈性地基係數之間的關係。在這些圖表上,表明了由共同解統一起來的同類問題之間的關係,和從某一個問題到另一個問題的轉化,同時也確立了桿件在彈性介質中喪失穩定的可能形式。

根據桿件壓力與自由振動頻率關係曲線的性能分析,我們提出了確定體系臨界載荷的動力實驗法。結構模型的試驗結果,證實了這個臨界載荷確定法的合理性。

在第四篇中,也着重介紹了幾個一般性方法:1)初參數法,此法可用以計算圓拱與圓環在均勻靜水壓力作用下的自由振動和強迫振動,計算時考慮到材料的內阻;2)力法和形變法,這裏用來計算圓拱與圓環以及由直桿和圓形曲桿組成的體系的穩定性。討論圓桿在均勻靜水壓力作用下的自由振動問題時,假定桿件兩端在抗移和

抗轉方面都是彈性固定的。從這個解答出發，可為二鉸拱和無鉸拱、有鉸環和有約束截面環、封閉自由環、以及在均勻靜水壓力作用下圓桿的某些特殊支承情形，求得自由振動頻率與不變法向力之間的關係。此項以圖表形式提出的關係，清楚地表明了由共同解統一起來的各個獨立問題之間的聯系，和從某一個問題到另一個問題的轉化。用力法和形變法計算圓拱和由之組成的體系的穩定性，將為複雜體系作出十分簡單的解答。

第五篇，亦即最後一篇，專門研究旋環對稱空間剛架自由振動與強迫振動的計算，並考慮到剛架桿件的軸向力和材料內阻的影響。在這一篇中，還求得了剛架結點的一般平衡方程，這種方程能够解答上述類型空間剛架的振動與穩定問題。

為了便於按本書所述方法計算桿件和剛架的振動與穩定，書末附有函數數值表。這些表的一部分是由作者自己計算的，其餘多是從別的地方轉載得來。

本書內容，是作者在1936年～1949年這段時間內的研究成果。

作者

1950年 基輔

譯 者 的 話

桿件結構在顧及軸向力影響和材料能量散逸時的自由振動和強迫振動問題，是近代建築力學中最複雜的同時也是工程實踐中最重要的專題之一。本書是蘇聯技術科學博士邱得諾夫斯基教授根據十多年來對於這個專題的研究成果，並參以蘇聯國內在這方面的最新成就編著而成的，它是目前有關結構振動問題的一部巨著。

原書有一些印誤和筆誤之處，根據譯者能够覺察到的，都已一一作了修正；個別比較紆迴費解的論證和推理，原書略而不詳者，亦已作了一些註釋。在翻譯過程中，譯者雖曾多方鞭策自己，力求做到譯筆忠實，不違原意，然而終因限於本身俄文水平和業務能力，疏誤之處恐難避免，敬希讀者惠予指出！

原書若干註腳中的烏克蘭文參考文獻，係由於同春同志委托蘇聯友人轉譯成俄文的；為了覓得該書原版，復承他在蘇聯多方設法尋購。本書譯稿的抄寫工作全由葛文源同志獨力擔任，一併在此致謝！

呂子華

1958年8月南京

目 錄

原書編者序	(iv)
著者序	(v)
譯者的話	(viii)
第一篇 基本方程、比擬和推廣	(1)
第一章 顧及材料能量散逸時桿件的自由振動與強迫振動	(1)
§ 1. 空間剛架桿件的振動微分方程	(1)
§ 2. 圓桿的振動微分方程	(10)
§ 3. 比擬與推廣，推動聯系與控制聯系	(13)
第二章 穩定與自由振動	(19)
§ 4. 穩定問題中的比擬	(19)
§ 5. 壓桿的若干穩定問題與自由振動的關係	(21)
第二篇 軸的扭轉振動	(23)
第三章 軸的自由扭轉振動的計算，三扭矩方程	(23)
§ 6. 概論	(23)
§ 7. 基本方程	(24)
§ 8. 三扭矩方程	(30)
§ 9. 頻率方程與自由扭振形式	(31)
第四章 軸的自由扭轉振動之計算，形變法	(33)
§ 10. 軸每一部分兩端扭矩幅度與扭角幅度之關係	(33)
§ 11. 自由扭轉振動的頻率方程，振動形式	(38)
§ 12. 計算例題	(39)
第三篇 桿件與平面剛架的振動與穩定	(45)
第五章 用初參數法計算桿件的自由彎曲振動和穩定	(45)
§ 13. 概論	(45)
§ 14. 特徵方程的研究	(46)
§ 15. 桿件承擔均佈質量的初參數法公式，特殊問題	(49)
§ 16. 桿端一般支承情形的頻率方程和臨界狀態方程自由振動形式和喪失穩定形式	(55)
§ 17. 各種端支承桿件的自由振動和穩定性的研究	(59)
§ 18. 承擔均佈質量和相同集中質量之桿件的差分方程	(72)
§ 19. 承擔均佈和相同集中質量之桿件的初參數法公式	(78)
§ 20. 承擔集中質量之桿件的自由振動頻率方程和臨界狀態方程	(90)
第六章 用初參數法計算桿件的強迫振動	(91)
§ 21. 概論	(91)
§ 22. 計算承擔均佈質量之桿件作強迫振動的初參數法公式	(91)
§ 23. 計算承擔均佈質量和等距離相同集中質量的桿件作強迫振動的初參數法公式	(96)

§ 24. 桿件作強迫振動時內力與位移的確定	(98)
§ 25. 計算例題	(99)
第七章 平面剛架的自由彎曲振動與穩定的計算。形變法	(104)
§ 26. 形變法的基本關係	(104)
§ 27. 特殊問題	(108)
§ 28. 剛架的自由振動頻率方程和臨界狀態方程。自由振動形式和喪失穩定形式	(119)
§ 29. 計算例題	(122)
第八章 用形變法計算剛架的強迫振動	(132)
§ 30. 強迫振動時桿端內力與位移的關係	(133)
§ 31. 強迫振動時的動力平衡方程。內力的確定	(138)
第九章 承擔集中質量的桿件和平面剛架的自由彎曲振動之計算。力法	(140)
§ 32. 概論	(140)
§ 33. 基本體系、多餘未知量和典型方程	(141)
§ 34. 基本體系的合理選擇。頻率方程	(142)
第十章 承擔集中質量的桿件和平面剛架的強迫彎曲振動之計算。力法	(146)
§ 35. 強迫振動時力法的典型方程	(146)
§ 36. 強迫振動時內力的確定	(148)
第十一章 用力法計算桿件和剛架的穩定性	(150)
§ 37. 基本關係	(150)
§ 38. 喪失穩定時廣義位移的公式	(151)
§ 39. 靜定桿件和剛架	(153)
§ 40. 超靜定桿件和剛架	(157)
第十二章 確定臨界載荷的動力實驗插補法	(161)
§ 41. 方法的論證	(161)
§ 42. 若干例子	(163)
§ 43. 試驗	(164)
第四篇 圓拱與圓環的振動與穩定	(172)
第十三章 用初參數法計算拱的自由振動和穩定	(172)
§ 44. 概論	(172)
§ 45. 特徵方程的研究	(173)
§ 46. 初參數法的公式	(178)
§ 47. 拱端一般支承情形的頻率方程和臨界狀態方程。自由振動形式和喪失穩定形式	(183)
§ 48. 圓拱與圓環的自由振動和穩定性的研究	(185)
§ 49. 在僅沿徑向或僅沿切向發生抗力的彈性介質中拱的穩定	(206)
第十四章 用初參數法計算圓拱與圓環的強迫振動	(211)
§ 50. 圓拱與圓環作強迫振動的初參數法公式	(211)
§ 51. 強迫振動時內力與位移的確定	(214)
第十五章 用力法計算圓拱的穩定性	(216)
§ 52. 基本關係	(216)

§ 53. 圓拱喪失穩定時的廣義位移公式	(217)
§ 54. 求喪失穩定的拱中彎矩的一個方法	(219)
§ 55. 靜定圓拱	(222)
第十六章 用形變法計算圓拱的穩定性	(226)
§ 56. 喪失穩定時圓拱兩端內力與位移之關係	(226)
§ 57. 臨界狀態方程	(230)
§ 58. 計算例題	(232)
第五篇 空間剛架的振動與穩定	(236)
第十七章 旋環對稱空間剛架的自由振動與穩定的計算。形變法	(236)
§ 59. 主要前提與基本方程	(236)
§ 60. 空間剛架桿件兩端內力與位移之關係	(239)
§ 61. 旋環對稱空間剛架的形變特徵。典型結點平衡方程	(249)
§ 62. 頻率方程與臨界狀態方程。振動形式與喪失穩定形式	(267)
第十八章 旋環對稱空間剛架的強迫振動之計算。形變法	(268)
§ 63. 強迫振動時桿端內力與位移之關係	(268)
§ 64. 強迫振動時剛架的典型結點平衡方程	(273)
§ 65. 強迫振動時位移與內力的確定	(277)
附錄	(295)
表 I ~ III 計算軸的自由扭轉振動的函數	(295)
A. 規則軸段的函數	(295)
B. 承擔兩個集中質量的不規則軸段的函數	(303)
B. 承擔三個不同集中質量的不規則軸段的函數	(304)
表 IV 用形變法計算剛架振動的函數	(320)
表 V ~ VI 用形變法計算剛架振動與穩定的函數	(325)
A. 壓桿的函數	(325)
B. 拉桿的函數	(336)
表 VII ~ VIII 用力法計算剛架振動與穩定的函數	(338)
A. 壓桿的函數	(338)
B. 拉桿的函數	(341)
參考文獻	(342)

第一篇 基本方程、比擬和推廣

第一章

顧及材料能量散逸時桿件的自由振動與強迫振動

§ 1. 空間剛架桿件的振動微分方程

我們來研究實體稜柱桿的強迫振動，其上作用着按譜和規律隨時間而變的干擾力。為了使問題更接近於實際情況，桿件振動過程中所發生而與內摩擦有關的材料能量散逸，將要予以考慮。在一般情況下解題時，假定所考慮的桿件是空間體系的一個組成部分，並且振動時處於復合形變狀態：主慣性平面內的橫向彎曲、扭轉、和不隨時間而變的等縱向力的作用。

設有作強迫振動的空間剛架，試考慮其中所含某一桿件的彎曲振動與扭轉振動。假定桿件上負有集度為 m 的均佈質量和集中質量 M_n ，同時作用着引起振動的集中力 P^{*y}, P^{*z} ，均佈力 q^{*y}, q^{*z} ，和扭矩 M_j^{*x} 。去掉的聯系對於桿件兩端，作用着下列各力(圖 1)：

- 1) 對慣軸 y 與 z 的彎矩 $\bar{M}_{ab}^{*y}, \bar{M}_{ab}^{*z}, \bar{M}_{ba}^{*y}, \bar{M}_{ba}^{*z}$;
- 2) 對縱軸 x 的扭矩 $\bar{M}_{ab}^{*x}, \bar{M}_{ba}^{*x}$;
- 3) 位於主慣性平面內的剪力 $\bar{Q}_{ab}^{*y}, \bar{Q}_{ab}^{*z}, \bar{Q}_{ba}^{*y}, \bar{Q}_{ba}^{*z}$;
- 4) 靜力縱向力 N 。

在振動過程中，空間桿件兩端的位移，可由下列諸量來表示：

- a) 截面對慣軸的轉角 $\varphi_a^{*z}, \varphi_a^{*y}, \varphi_b^{*z}, \varphi_b^{*y}$;
- б) 扭角 $\varphi_a^{*x}, \varphi_b^{*x}$;
- в) 在垂直於 y 軸和 z 軸平面內的綫位移 $\delta_a^{*z}, \delta_a^{*y}, \delta_b^{*z}, \delta_b^{*y}$ 。

由坐標 x 所確定的中間截面的內力與位移，用下列記號表示：

$\bar{M}^{*y}, \bar{M}^{*z}$ ——對慣軸 y 與 z 的彎矩；

M^{*x} ——扭矩；

y^*, z^* ——在 y 軸與 z 軸方向上的位移；

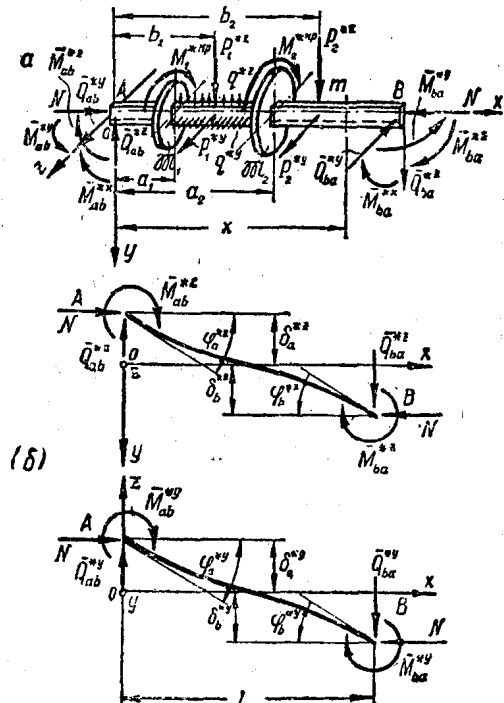


圖 1

φ^{**} ——扭角。

關於內力與位移的符號，我們規定以下列情況作為正(圖1)：

- 1) 桿件截面的彎矩、轉角和扭角，在其矢量與對應的坐標軸方向重合時；
- 2) 桿件兩端的剪力和稜位移，當從垂直於該力與位移所在平面的坐標軸正向一側觀看時，能使桿件循順時針方向旋轉者；
- 3) 法向力，在其使桿件受壓時。

必須指出，無論是在此處或在後文中，上述這些量都是指由於桿件振動而引起的因之也隨時間而變的內力¹⁾與位移的增量。

首先，我們要談一談關於振動時能量散逸的估計問題。解決這個問題有兩種可行的途徑。其中之一是：在建立顧及材料內阻的振動方程時，採用對計算極為方便的假設，按照這個假設，桿件彎曲時纖維中的法向應力，與其相對伸長 $\epsilon = \epsilon(x, t)$ 和形變速度 $\frac{\partial \epsilon}{\partial t}$ 之間，具有下列關係：

$$\sigma = \epsilon E + \mu \frac{\partial \epsilon}{\partial t}, \quad (1.1)$$

其中 E ——縱向彈性模量，

μ ——實驗係數；

$\mu \frac{\partial \epsilon}{\partial t}$ ——顧及滯後迴綫的附加應力；

t ——時間。

然而，上述假設曾經多次遭到過批評；在建立振動方程時，代替它的則是直接根據顧及滯後現象的材料拉伸試驗 $\sigma \sim \epsilon$ 圖而提出的另一個假設，這個假設是：

$$\sigma = \epsilon E + \mu' f(\epsilon), \quad (1.2)$$

其中 $f(\epsilon)$ ——代表實驗滯後迴綫的非綫性函數；

μ' ——實驗係數。

在計算結構的強迫振動時，採用第二個假設會造成很大的困難，因為在這種情況下，問題的微分方程變為非綫性的，它的解相當複雜。

此外，當一般內摩擦微小時，很難準確地確定裂縫式滯後迴綫的真正形式，因而選擇與這種迴綫對應的函數 $f(\epsilon)$ ，也就極為複雜了。

最近已經有人證明²⁾，由公式(1.1)與(1.2)所代表的兩個假設間的矛盾，在一定條件下將會消失掉。說得更具體些，如果假設：當具有某一頻率 Ω 的諧和干擾力作用於結構上時，相對形變也按具有同一頻率的諧和規律而變化，則等式(1.1)與(1.2)就是以兩種不同形式來表達同一的關係。

事實上，若命：

$$\epsilon = \epsilon_0 \cos(\Omega t + \beta_\epsilon), \quad (1.3)$$

1) 我們把它當作常量而且僅係靜力載荷所引起的法向力 N 除外。

2) E. G. 索羅金：“關於具有滯後現象的桿件強迫振動問題的閉合解”。結構理論研究，第四卷，建築出版社，莫斯科~列寧格勒，1949年。

其中 ϵ_0 ——相對形變的幅度；

β_ϵ ——相位差；

ϑ ——振動頻率；

則形變速度將是：

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = -\epsilon_0 \vartheta \sin(\vartheta t + \beta_\epsilon). \quad (1.4)$$

從(1.3)與(1.4)中消去時間 t ，我們就得到：

$$\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial t}\right)^2 = \vartheta^2(\epsilon_0^2 - \epsilon^2). \quad (1.5)$$

將(1.5)代入(1.1)以後，則得：

$$\sigma = E\epsilon \pm \mu' \epsilon_0 \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{\epsilon_0^2}}, \quad (1.6)$$

其中

$$\mu' = \mu \vartheta_0. \quad (1.7)$$

如果採用下列符號：

$$f(\epsilon) = \epsilon_0 \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{\epsilon_0^2}}, \quad (1.8)$$

(1.6)式就具有下列形式：

$$\sigma = E\epsilon + \mu' f(\epsilon).$$

由此可見，當條件(1.3)成立時，以第一個假設為依據的關係式(1.1)，與以第二個假設為基礎的關係式(1.2)恰相照合。

應該承認，在振動過程中，形變依諸和規律(1.3)變化的假定，是與實際情況極相接近的；事實上，由(1.6)可以看出，它已預先決定了滯後迴線的橢圓形式(圖2)。

在估計振動時材料內阻的兩個等效形式(1.1)與(1.2)中，計算時我們寧願採用關係式(1.1)，因為它把實質上是非線性問題的求解，轉化為線性微分方程的求解。

根據這個理由，後文的敘述將以關係式(1.1)為基礎。不過，在該項假設

$$\sigma = E\epsilon + \mu \frac{\partial \epsilon}{\partial t}$$

中，按照通常的觀點，認為對於給定的材料來說，係數 μ 是與形變速度因而也與振動頻率 ϑ 無關的常數；而我們則與這種觀點不同，認為確定這個係數，應該使之與下文引證的研究材料內阻的著名試驗結果¹⁾相符合。

以下列形式表示的比內阻，等於一次振動循環內散逸的能量 ΔW (滯後迴線的面積)，與同一循環內最大形變下

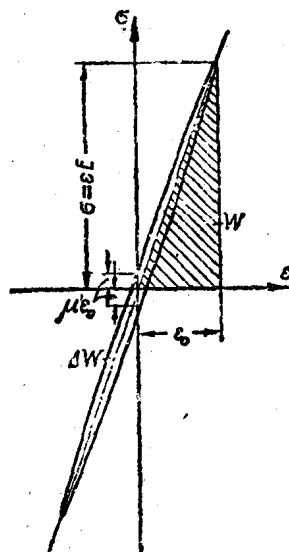


圖 2

1) 建築材料的動力性質，中央工業建築科學研究院，論文集，建築出版社，1940年。

彈性力所作功 W 之比(圖 2):

$$\psi = \frac{\Delta W}{W} \approx \text{常量}. \quad (1.9)$$

已經證明, 作為第一次近似, 此項比內阻可以當作實質上既與橫截面形狀和尺寸無關, 也與形變幅度速度(在一定界限內)無關的常量。

對此必須加以補充的是, 衰減對數遞減量 δ 是一個最為固定的指標, 當形變幅度在微小界限而振動頻率在較大界限內變化時, 它很少改變。

當比內阻 ψ 與衰減對數遞減量 δ 之值微小時, 它們之間存在着下列近似關係:

$$\psi \approx 2\delta. \quad (1.10)$$

在轉而推導空間剛架桿件(圖 1) 作強迫振動的微分方程時, 我們要建立截面 x 的內力對慣軸 z 的力矩式。根據平面截面假定, 並利用彎曲時纖維的法向應力與相對形變間的關係(1.1), 我們就得到(圖 3):

$$\begin{aligned} \bar{M}^{**} &= \int_F \sigma dF y = \int_F \left(E\epsilon + \mu \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \right) y dF = \int_F E\epsilon y dF + \int_F \mu \frac{\partial \epsilon}{\partial t} y dF = \\ &= \int_F E \frac{y^2 dF}{\rho^*} + \frac{\partial}{\partial t} \int_F \frac{\mu}{E} E \frac{y^2 dF}{\rho^*} = \frac{EI^z}{\rho^*} + \kappa \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{EI^z}{\rho^*} \right) = \\ &= M^{**} + \kappa \frac{\partial M^{**}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

其中 EI^z ——桿件在 xoy 平面內的抗彎剛度;

$\frac{1}{\rho^*}$ ——振動過程中桿件彎曲軸變化的曲率;

$\bar{M}^{**}$ ——顧及材料能量散逸而確定的截面 x 的彎矩, 它在振動過程中是變化的;

M^{**} ——假定法向應力依綫性分佈而確定的截面 x 的彎矩, 它也隨時間而變化, 其值為:

$$M^{**} = \frac{EI^z}{\rho^*} = -EI^z \frac{\partial^2 y^*}{\partial x^2}; \quad (1.12)$$

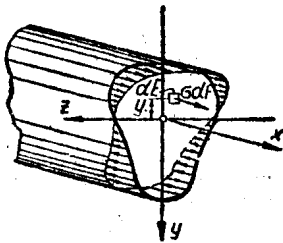


圖 3

κ ——桿件彎曲時截面 x 的係數 $\frac{\mu}{E}$ 的平均值, 它僅與桿件的材料有關, 而與橫截面的形狀無關。

如前所述, 確定係數 μ 之值, 因而也是確定平均值 κ , 應該使之與振動時能量散逸的試驗結果相符合。為此,

我們必須借重關係式(1.6)、(1.7)和圖 2, 以求出整個桿件的比內阻 ψ ; 按照公式(1.9), 並注意(1.10), 我們就得到:

$$\psi = 2\delta = \frac{\Delta W}{W} = \frac{2\vartheta \int_0^l \int_F \left[\int_{-\epsilon_0}^{+\epsilon_0} \mu \sqrt{\epsilon_0^2 - \epsilon^2} d\epsilon \right] dF dx}{\int_0^l \int_F \left[\int_0^{+\epsilon_0} E \epsilon d\epsilon \right] dF dx} = \frac{2\vartheta \pi E \int_0^l \int_F \kappa \frac{\epsilon_0^2}{2} dF dx}{E \int_0^l \int_F \frac{\epsilon_0^2}{2} dF dx}.$$

假定 ω 與 κ 無關, 也就是說, 在桿件所有截面的全部纖維中, 彎曲時滯後迴綫的形狀都是一樣的, 則根據上面找出的結果, 就可得到下列極為簡單的關係:

$$\delta = \vartheta \pi \kappa,$$

從而有:

$$\kappa = \frac{\delta}{\pi \vartheta} \quad (1.13)$$

由茹拉夫斯基定理和方程(1.11)可知, 若顧及材料中的能量散逸, 則強迫振動時桿件截面的剪力將等於:

$$Q^{**} = \frac{\partial \bar{M}^{**}}{\partial x} = \frac{\partial M^{**}}{\partial x} + \kappa \frac{\partial^2 M^{**}}{\partial x \partial t} = Q^{*z} + \kappa \frac{\partial Q^{*z}}{\partial t}, \quad (1.14a)$$

其中

$$Q^{**} = -EI^z \frac{\partial^2 y^*}{\partial x^2}. \quad (1.14b)$$

其次, 我們再寫出位於截面 x 左邊一切外力對慣軸 z 的力矩之和(圖 1), 並令其等於內力之力矩, 按照(1.11)與(1.12), 就可得到:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{ab}^{*z} + Q_{ab}^{*z} x + N(y^* - \delta_a^{**}) + \iint m \frac{\partial^2 y^*}{\partial t^2} dx dx + \sum_{n=1,2,\dots} \mathfrak{M}_n \left(\frac{\partial^2 y^*}{\partial t^2} \right)_{x=a_n} (x-a_n) - \\ - \sum_{n=1,2,\dots} J_n^z \left(\frac{\partial^2 \varphi^{**}}{\partial t^2} \right)_{x=c_n} - \sum_{j=1,2,\dots} P_j^{*z} (x-b_j) - \iint q^{*z} dx dx = -EI^z \frac{\partial^2 y^*}{\partial x^2} - \\ - \kappa EI^z \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 y^*}{\partial x^2} \right), \end{aligned}$$

或:

$$\begin{aligned} EI^z \frac{\partial^2 y^*}{\partial x^2} + \kappa EI^z \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 y^*}{\partial x^2} \right) + \bar{M}_{ab}^{*z} + \kappa \frac{\partial \bar{M}_{ab}^{*z}}{\partial t} + Q_{ab}^{*z} x + \kappa \frac{\partial Q_{ab}^{*z}}{\partial t} x + \\ + N(y^* - \delta_a^{**}) + \iint m \frac{\partial^2 y^*}{\partial t^2} dx dx + \sum_{n=1,2,\dots} \mathfrak{M}_n \left(\frac{\partial^2 y^*}{\partial t^2} \right)_{x=a_n} (x-a_n) - \\ - \sum_{n=1,2,\dots} J_n^z \left(\frac{\partial^2 \varphi^{**}}{\partial t^2} \right)_{x=c_n} = \sum_{j=1,2,\dots} P_j^{*z} (x-b_j) + \iint q^{*z} dx dx, \quad (1.15) \end{aligned}$$

其中 J_n^z ——第 n 個集中質量對 z 軸的慣矩。

在解決桿件的強迫振動問題時, 通常假定干擾力係按正弦或餘弦規律隨時間而變。但是這種假定, 不可能以緊湊而又充分普遍的形式, 解決顧及能量散逸的強迫振動問題。

在一般情形, 如果以複數式表示集中與均佈諧和干擾力, 例如:

$$\left. \begin{aligned} P_j^{*z} &= P_j^z (\cos \vartheta t + i \sin \vartheta t) = P_j^z e^{i\vartheta t}; \\ q^{*z} &= q^z (\cos \vartheta t + i \sin \vartheta t) = q^z e^{i\vartheta t}, \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

就可得到形式簡潔的一般性解答。

考察空間體系桿件具有與干擾力(1.16)相同的頻率 ϑ 的強迫振動過程, 就可將截面 x 的內力和位移寫成下列形式:

$$\left.
 \begin{aligned}
 y^* &= y e^{i\vartheta t}; \\
 \delta_a^{*z} &= \delta_a^z e^{i\vartheta t}; \\
 \varphi^{*z} &= \frac{\partial y^*}{\partial x} = \frac{dy}{dx} e^{i\vartheta t} = \varphi^z e^{i\vartheta t}; \\
 M_{ab}^{*z} &= M_{ab}^z e^{i\vartheta t}; \\
 Q_{ab}^{*z} &= Q_{ab}^z e^{i\vartheta t};
 \end{aligned}
 \right\} \quad (1.17)$$

其中 P^z, q^z ——干擾力的幅度;

$y, \delta_a^z, \varphi^z, M_{ab}^z, Q_{ab}^z$ ——桿件對應截面的內力與位移, 它們與時間 t 無關。

把關係式(1.16)與(1.17)代入方程(1.15), 並轉換到相對綫性坐標中:

$$\xi = \frac{x}{l}. \quad (1.18)$$

約去 $e^{i\vartheta t}$ 以後, 微分方程(1.15)將具有下列形式:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \bar{v}_z^2 (y - \delta_a^z) - \bar{u}_z^4 \iint y d\xi d\xi - \sum_{n=1,2,\dots} \bar{U}_{n,z}^s y_n \left(\xi - \frac{a_n}{l} \right) + \\
 + \sum_{n=1,2,\dots} \bar{U}_{n,z}^q \varphi_n^z + \frac{M_{ab}^z l^3}{EI^z} + \frac{Q_{ab}^z l^3}{EI^z} \xi = \frac{l^3}{EI^z} \Delta \sum_{j=1,2,\dots} P_j^z \left(\xi - \frac{b_j}{l} \right) + \\
 + \frac{l^4}{EI^z} \Delta \iint q^z d\xi d\xi,
 \end{aligned} \quad (1.19)$$

其中 $y_n = y_{x=a_n}$ ——第 n 個集中質量作用點的撓度;

$\varphi_n^z = \varphi_{x=a_n}^z$ ——同點的轉角;

$$\bar{v}_z^2 = \frac{N l^3}{EI^z} \Delta;$$

$$\bar{u}_z^4 = \frac{m S^2 l^4}{EI^z} \Delta;$$

$$\bar{U}_{n,z}^s = \frac{m_n S^2 l^5}{EI^z} \Delta;$$

$$\bar{U}_{n,z}^q = \frac{J_n^z S^2 l^3}{EI^z} \Delta;$$

$$\Delta = \frac{1 - i \frac{\delta}{\pi}}{1 + \frac{\delta^2}{\pi^2}}.$$

這裏引入的無量綱參數 $\bar{v}_z^2, \bar{u}_z^4, \bar{U}_{n,z}^s, \bar{U}_{n,z}^q$, 就是我們所研究的問題的基本原始特徵。

將方程(1.19)對 ξ 微分:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \bar{v}_z^2 \frac{dy}{d\xi} - \bar{u}_z^4 \int y d\xi - \sum_{n=1,2,\dots} \bar{U}_{n,z}^s y_n + \frac{Q_{ab}^z l^3}{EI^z} = \\
 = \frac{l^3}{EI^z} \Delta \sum_{j=1,2,\dots} P_j^z + \frac{l^4}{EI^z} \Delta \int q^z d\xi,
 \end{aligned} \quad (1.21)$$