现代数学丛书

陆善镇 著

H^p空间实变理论及其应用

REAL VARIABLE THEORY OF H^p SPACES AND ITS APPLICATIONS

LU SHAN-ZHEN

Modern Mathematics Series

REAL VARIABLE THEORY OF H^p SPACES AND ITS APPLIC ATIONS

Lu Shanzhen

Shanghai Scientific & Technical Publishers

(沪)新登字 108 号

责任编辑　唐仲华

现代数学丛书

H^p 空间实变理论及其应用

陆善镇　著

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行　　常熟市印刷二厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 7　字数 174,000

1992 年 12 月第 1 版　　1992 年 12 月第 1 次印刷

印数 1—2000

ISBN 7-5323-2744-2/O·158

定价：5.80 元

内 容 提 要

本书是一本专著，它反映了 $H^p(R^n)$ 空间的实变理论及其在分析领域某些方面的应用。全书分四章，前两章是 H^p 空间实变理论的理论部分，其中第 1 章是 H^p 空间 Fefferman-Stein 的理论，第 2 章是 H^p 空间的分解结构理论，后两章是 H^p 空间实变理论对某些分析问题的应用，其中第 3 章是研究调和分析中若干基本算子在 H^p 上的有界性质，而第 4 章是研究某些基本算子在 H^p 中的逼近性能。

第 2 章和第 3 章中的某些内容是我国学者新近的研究成果，而第 4 章的全部内容是由我国学者所贡献的。

本书可用作数学专业研究生教材，也可供逼近论、偏微分方程、泛函分析、概率论等方面的数学工作者参考。

REAL VARIABLE THEORY OF H^p SPACES AND ITS APPLICATIONS

Lu Shanzhen

Abstract

This is a monograph on the real variable theory of $H^p(\mathbb{R}^n)$ spaces and its applications to some respects in analysis fields.

The whole book consists of four chapters: Chapter 1, Real variable theory of $H^p(\mathbb{R}^n)$ spaces; Chapter 2, Decomposition structure theory of $H^p(\mathbb{R}^n)$ spaces; Chapter 3, Applications to some respects in Fourier analysis; Chapter 4, Applications to approximation theory.

The basic theory of Fefferman-Stein, the atom decomposition theory of Coifman-Latter, and the molecular decomposition theory of Taibleson-Weiss are systematically introduced in the first two chapters. Many recent research fruits by Chinese mathematicians are contained in Chapter 2 and 3, such as weak H^p spaces, elliptic Riesz means on H^p spaces, transference theorem of H^p multiplier, and so on. The materials in Chapter 4 are fully contributed by chinese mathematicians.

This book can be used as a text for graduate students in mathematics department as well as a reference book for those mathematicians studying in the fields of approximation theory, differential equation, functional analysis and probability theory etc..

出版说明

从六十年代起，由华罗庚教授任主编的《现代数学丛书》编辑委员会曾组织编著，并由我社出版了多部具有很高水平的数学学术专著，有几部专著并已在国外出了外文版，受到国内外数学界和广大读者的高度重视，获得了很高的评价。原编委会中华罗庚、关肇直、吴新谋三位教授虽已先后逝世，但他们为本丛书所作出的贡献迄今仍为人们所敬仰、怀念。由于某些客观原因，《现代数学丛书》的出版工作曾一度停顿。

为了适应现代数学的迅速发展，更好地反映我国数学家近几年的优秀研究成果，必须大力加强《现代数学丛书》的规划、编辑、出版工作，充实编委会的力量。考虑到不少编委年事已高，经向原编委会中大部分同志及数学界有关专家广泛征求意见后，于1990年对编委会作了调整，补充了一些著名的中年数学家和学科带头人，建立了新的编委会，并进一步明确了本丛书的宗旨。

《现代数学丛书》新的编辑委员会由苏步青教授任名誉主编、谷超豪教授任主编，十八位著名数学家任委员。编委会负责推荐（或审定）选题和作者，主持书稿的审核等工作。

《现代数学丛书》的宗旨是：向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的、国内第一流水平的数学研究成果，反映我国数学研究的特色和优势，扩大我国数学研究成果的影响，促进学科的发展和国内外的学术交流。

为了实现上述宗旨，本丛书将陆续组织出版在基础数学、应用数学和计算数学方面处于学科发展前沿、有创见且具有系统完整

前言

我们知道，H^p 空间的研究已经历了很长的时期。古典的 H^p 空间是在单位圆周上或上半平面上由复变方法定义的。这些空间的理论在研究古典 Fourier 分析的问题时起了重要作用。随着 n 维 Fourier 分析的发展，自然产生要将上述空间的定义向 n 维推广的问题。首先进行这项工作的是 E. M. Stein 和 G. Weiss，他们在六十年代初所建立的 n 维 H^p 空间的定义及其理论不是基于复变方法上的，而是采用调和函数的方法。无论古典的 H^p 空间或上述 n 维 H^p 空间的理论，直到七十年代才有了一个突破性的发展，使得近十几年来关于 H^p 空间的研究成为现代调和分析中最蓬勃发展的领域之一。其原因之一在于实变方法从此进入了 H^p 空间理论的研究之中。首先进行这种尝试的是 D. L. Burkholder, R. F. Gundy 和 M. L. Silverstein，他们用概率论方法给出了一维 H^p 空间的一个实变特征。接着，C. Fefferman 和 E. M. Stein 把此结果用实分析方法推广到 n 维，并且指出完全可以用同复变或调和函数方法无关的多种形式的极大函数来刻画 H^p 空间的特征。这标志着 H^p 空间实变理论的确立。这个理论的深入发展阶段便是 H^p 空间的分解结构理论的建立。后者的思想是从微观的观点来看待函数空间，也就是把 H^p 空间的元素看成为一列"基本元素"依某种形式的叠加。概言之，H^p 空间是由这些"基本元素"生成的，如同在物理学中，物质世界是由"基本粒子"生成的那样，人们把生成 H^p 空间的"基本元素"叫做原子。这些称之为原子的"基本元素"有着某些特定的实变性质。根据分解结构理论，人们可以将调和分析中的许多问题归结于很简单的情

形。具体地说，当研究 H^p 空间的元素是否具有某种性质时，通过原子分解结构理论，往往只需考虑任一原子是否具有某种相应的性质，而对后者的研究，由于原子本身所具有的实变性质，使得问题变得相当简单。正是由于这个缘故，分解结构理论在研究许多分析问题时得到了广泛的应用。虽然 H^p 空间的分解结构理论产生于七十年代中期，但它的思想和方法至今仍在影响着对其它函数空间的研究，而它的理论也已渗透到其它数学领域之中。

本书分四章。前两章是 H^p 空间实变理论的理论部分。第 1 章以简短的篇幅介绍了 Fefferman-Stein 的理论，而对于 Stein-Weiss 的理论，则假定读者是已知的，这样处理的目的是使读者尽快地进入现代理论的前沿。第 2 章比较详细地介绍了 H^p 空间的分解结构理论。除了这个理论本身外，还涉及到 H^p 的对偶空间，算子在 H^p 中的插值，以及 H^p 空间的插值等。这些内容既使得分解结构理论更加丰富，也是后两章研究应用时所需要的。后两章内容着重说明 H^p 空间的实变理论，特别是分解结构理论在解决分析问题时所起的作用。第 3 章是研究调和分析中若干最基本的算子在 H^p 上的有界性质，可以说其中绝大部分的结果都是很基本的。需要指出：第 2 章和第 3 章中的某些重要结果是作者及其研究生的研究成果。第 4 章的内容是以作者及其研究生的研究成果为主要线索，这一章内容足以说明 H^p 空间的实变理论，特别是分解结构理论在研究 H^p 中的逼近问题时，仍是一个强有力的工具。

本书是在作者对北京师范大学历届函数论专业研究生的选修课讲义的基础上整理而成的。前两章的大部分章节还是作者在 1988 年南开数学研究所举办的调和分析年会上向全国高校部分研究生授课的内容。本书虽然已使用多遍，但限于作者的水平，其中缺点和错误必定还不少，恳请专家和读者给予指出。

应当指出，本书写作能够完成，首先要感谢美国 St. Louis 华盛顿大学的 Guido Weiss 教授，作者在该校访问的两年期间，同他有过十分愉快的合作，受益匪浅。他所赠予的丰富材料是完成

本书第 2 章的重要素材。同时，要感谢中国科学院学部委员、北京大学程民德教授，以及北京师范大学孙永生教授对作者的一贯支持和鼓励。特别是程先生主持的 1988 年调和分析年会邀请作者作“H^p 空间”的讲座，使作者对本书前两章主要内容有再一次教学实践的机会。最后，还要感谢王昆扬博士、刘智新博士、刘和平博士、张严博士、江寅生同志、戴龙祥同志、陈国良同志、马柏林同志等，他们在作者授课中所提出的宝贵意见改正了本书初稿中的不少错误，他们所完成的科研成果也是对本书的重要贡献。

陆　善　镇

1990 年夏于北京师范大学

目　录

CONTENTS

第 1 章

$\mathbb{H}^p(\mathbb{R}^n)$空间的实变理论

§1　$H^p(\mathbb{R}^n)$空间的定义

古典的 H^p 空间是对一类解析函数来定义的（参见 Duren [Du 1]或 Zygmund [Zy 1]）。所谓空间 $H^p(\mathbb{R}_+^2)$，是指由一切满足下面条件的、在上半平面 $\mathbb{R}_+^2$ 上解析的函数F所构成的空间：

$$\sup_{0<y<\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy)|^p dx<\infty,\ 0<p<\infty.$$

可以证明：当 $F\in H^p(\mathbb{R}_+^2)$时，其实部的边值

$$\lim_{y\to 0}\mathrm{Re}\{F(x+iy)\}$$

几乎处处存在（一般来说，这样的边值是 $\mathbb{R}$ 上的广义函数）。为此，可以将一切 $H^p(\mathbb{R}_+^2)$中元素的实部边值组成一空间，并称它为实 $H^p(\mathbb{R})$空间，即

$$\mathrm{Re}\,H^p(\mathbb{R})=\{f:f(x)=\lim_{y\to 0}\mathrm{Re}\{F(x+iy)\},\ F\in H^p(\mathbb{R}_+^2)\}.$$

后面将看到，这个 $\mathrm{Re}\,H^p(\mathbb{R})$当 $p>1$ 时是同 $L^p(\mathbb{R})$ 一致的，而当 $0<p\leqslant 1$ 时，它同 $L^p(\mathbb{R})$有本质的差别。

随着 n 维 Fourier 分析发展的需要，自然存在着将 $\mathrm{Re}\,H^p(\mathbb{R})$向 n 维拓广的问题。E. M. Stein 和 G. Weiss 基于 F $(\in H^p(\mathbb{R}_+^2))$的实部和虚部满足 Cauchy-Riemann 条件这一事实，提出了广义 Cauchy-Riemann 方程的概念，进而定义了空间 $H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$（见 E. M. Stein, G. Weiss [SW 1]）。准确地说，考虑一组 $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$上的调和函数

$$F(x_1,\cdots,x_n,y)=(u_0(x_1,\cdots,x_n,y),\cdots,\\ u_n(x_1,\cdots,x_n,y)),$$

它们满足广义 Cauchy-Riemann 方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \dfrac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \end{cases} \quad (0 \leqslant i,\ j \leqslant n), \tag{1.1}$$

其中 $x_0 = y$。现在，定义

$$H^p(\mathbb{R}_+^{n+1}) = \left\{F: F \text{ 满足(1.1)},\ \sup_{0<y<\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)|^p dx < \infty\right\}.$$

同样，可以使用 $H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$ 中元素之第一个分量的边值来定义实 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 空间：

$$\mathrm{Re}H^p(\mathbb{R}^n) = \{f: f(x) = \lim_{y\to 0} u_0(x,y),\ F \in H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})\}.$$

顺便指出：Stein 和 Weiss 定义 $\mathrm{Re}H^p(\mathbb{R}^n)$时，对指标 p 有如下的限制：$p > (n-1)/n$。后来，A. P. Calderón, A. Zygmund [CZ 1]把这个限制去掉，从而得到了对一切的 $p(0<p<\infty)$ 有定义的空间 $\mathrm{Re}H^p(\mathbb{R}^n)$，并通称它们为实 Hardy 空间。

到此，已注意到 $\mathrm{Re}H^p(\mathbb{R})$ 是对一类解析函数来定义的，而 $\mathrm{Re}H^p(\mathbb{R}^n)$ 的定义方式也是由解析函数的性质演变而来的。从某种意义上来说，$\mathrm{Re}H^p(\mathbb{R}^n)$的定义方式也同解析函数有着密切的关系。到了七十年代初期，一个涉及空间 $\mathrm{Re}H^p$ 的实变特征的重要事实被发现。事实上，Hardy 和 Littlewood 很早就指出：如 $f \in \mathrm{Re}H^p(\mathbb{R})$，则 f 的 Poisson 非切向极大函数

$$P_\nabla^*(f)(x) \triangleq \sup_{|y-x|<t} |f * P_t(y)| \in L^p(\mathbb{R}).$$

1971 年 D. L. Burkholder, R. F. Gundy, M. L. Silverstein [BGS 1] 证明了上述的逆命题也成立。这样，人们可以用 f 的 Poisson 非切向极大函数 $P_\nabla^*(f)$是否属于 $L^p(\mathbb{R})$来判断 f是否属于 $\mathrm{Re}H^p(\mathbb{R})$了。显然，$\mathrm{Re}H^p(\mathbb{R})$ 的这个特征已完全不需要借助解析函数的方式来描述，有趣的是[BGS 1] 的证明方法是概率论方法。1972 年，C. Fefferman, E. M. Stein [FS 1] 用实变方法把上述重要特征推广到了 n 维情形，从而产生了空间 $\mathrm{Re}H^p(\mathbb{R}^n)$的一个等价定义。

定义 1.1 设 f 为 $\mathbb{R}^n$ 上的缓增广义函数，P 为 Poisson 核。如果 f 的 Poisson 非切向极大函数

$$P_\nabla^*(f)(x) \triangleq \sup_{|y-x|<t} |(f*P_t)(y)| \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

则称 $f\in \mathrm{Re}H^p(\mathbb{R}^n)$，其中集 $\{(y, t): |y-x|<t\}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}_+=\{(y, t): y\in \mathbb{R}^n, t>0\}$ 中的角形区域，且 $P_t(x)=t^{-n}P(x/t)$。为简便起见，下面一概将 $\mathrm{Re}H^p(\mathbb{R}^n)$ 记作 $H^p(\mathbb{R}^n)$。

注 1.1 由于 $P\notin \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，其中 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 为 Schwartz 类，故对一般的缓增广义函数 $f\in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$，Poisson 积分可能完全没有意义。实际上，定义 1.1 中的 f 应属于满足适当增长条件的广义函数类。为说明这一点，需要引入一个较 $\mathscr{S}$ 为更大的检验函数空间，使得 Poisson 核属于此检验函数空间，以及其对偶空间就是上面所指的广义函数类。今记

$$D_{L^1}=\{\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n): D^\alpha\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n), \forall\alpha\},$$

其中 α 为 n 重指标，D^α 为微分算子，D_{L^1} 的对偶空间 $(D_{L^1})'$ 同 $\mathscr{S}'$ 有如下的关系（见 J. Barros-Neto [B 1]）：$f\in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当存在非负整数 $K=K(f)$，使得 $(1+|x|^2)^{-K/2}f\in (D_{L^1})'$。因此，$(D_{L^1})'$ 中的元素比起 $\mathscr{S}'$ 中的元素一般是具有一定增长条件的。如果把 $\mathscr{S}'$ 称为缓增广义函数类，那末 $(D_{L^1})'$ 就是一个具有适当增长条件的广义函数类。同时，不难看出：$P\in D_{L^1}$。因此，对任一 $f\in (D_{L^1})'$，$f*P_t$ 是有意义的。换言之，定义 1.1 中的 f，确切地说，应是具有适当增长条件的广义函数。

有了定义 1.1，$H^p(\mathbb{R}^n)$ 的一个自然拓广是 C. Fefferman, N. M. Rivière, Y. Sagher [FRS 1]中定义的 $H(p, q, \mathbb{R}^n)$：

$$H(p, q, \mathbb{R}^n)=\{f\in \mathscr{S}': P_\nabla^*(f)\in L(p, q, \mathbb{R}^n)\},$$

其中 $L(p, q, \mathbb{R}^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lorentz 空间，其定义可参见 E. M. Stein, G. Weiss[SW 2]。显然，$H(p, p, \mathbb{R}^n)=H^p(\mathbb{R}^n)$，且当 $q>p$ 时，$H^p(\mathbb{R}^n)\subset H(p, q, \mathbb{R}^n)$。$H(p, q, \mathbb{R}^n)$ 通称为 Lorentz-Hardy 空间。

§2 非切向极大函数

从定义 1.1 可以看出，虽然实 $H^p(\mathbb{R}^n)'$空间并不是借助解析函数的性质而定义的，但定义中的 Poisson 核表明，其定义方式仍未完全摆脱对调和函数的依赖性。于是，自然产生如下的问题：定义 1.1 中的 Poisson 核可否用其它的逼近恒等元来代替呢？C. Fefferman, E. M. Stein[FS 1] 对此作了肯定的回答。他们引进了如下的关于光滑函数 φ 的非切向极大函数。

定义 2.1 设 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，且 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x=1$。如置

$$\varphi_\nabla^*(f)(x)=\sup_{|y-x|<t}|(f*\varphi_t)(y)|,$$

则称 $\varphi_\nabla^*(f)$ 为 f 的 φ 非切向极大函数。

为说明 $\varphi_\nabla^*(f)$同 $P_\nabla^*(f)$之间的关系，需先建立几个引理。

引理 2.1 设 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，且 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x=1$，则对任一$\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$，以及任一 $N\in\mathbb{N}$，必有 $\theta^{(t)}\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\,(0<t<1)$ 以及$m\in\mathbb{N}$，使得

(i) $\psi(x)=\int_0^1(\varphi_t*\theta^{(t)})(x)\mathrm{d}t$;

(ii) $$\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N|\theta^{(t)}(x)|\mathrm{d}x\leqslant Ct^N\sup_{u\in\mathbb{R}^n,|\alpha|\leqslant m}(1+|u|)^{m+n}\cdot|D^\alpha\psi(u)|,$$

其中 α 为 n 重指标 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$，以及

$$D^\alpha\psi(u)=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial u_1^{\alpha_1}\cdots\partial u_n^{\alpha_n}}\psi(u_1,\cdots,u_n).$$

证明 任取一$\zeta\in C^\infty(0,1)$，并满足

$$\zeta(t)=t^N/N!,\ \text{当}\ 0\leqslant t\leqslant1/2,$$
$$0\leqslant\zeta(t)\leqslant t^N/N!,\ \text{当}\ 1/2<t\leqslant1,$$

以及 $\zeta^{(j)}(1)=0$, $0\leqslant j\leqslant N+1$。注意到

$$\frac{\partial^{N+1}}{\partial t^{N+1}}\underbrace{(\varphi_t*\cdots*\varphi_t)}_{N+2\text{重}}$$