

应用数学丛书

张量分析

黄克智 薛明德 陆明万

清华大学出版社

清华大学
应用数学丛书

第 3 卷

张 量 分 析

黄克智 薛明德 陆明万



清华大学出版社

8610687

DS98/3/27

内 容 简 介

本书是一本系统地阐述张量分析的专著，书中同时采用张量的抽象（实体）记法与分量记法。全书共分九章，内容包括矢量与张量的基本概念和代数运算，张量函数及其导数，曲线坐标张量分析和在力学中最常用的二阶张量的理论及其应用。各章附有习题，书末附有习题答案或提示。

本书可作为力学及有关专业本科生、研究生的教材，以及有关专业教师、科研及工程技术人员的参考书。

张 量 分 析

黄克智 薛明德 陆明万



清华大学出版社出版

北京 清华园

北京朝阳区关西庄印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售



开本：850×1168 1/32 印张：10 $\frac{3}{4}$ 数字：276千字

1986年3月第一版 1986年3月第一次印刷

印数：0001~8000

书号：15235·146 定价：平装2.35元 精装3.50元

关于《应用数学丛书》

为了满足广大科技人员、高等院校教师、研究生进一步学习应用数学的需要，我们编辑出版本丛书。丛书内容将包括应用数学的各个方面、有关的边缘科学以及应用数学的方法等。限于我们的水平和经验，丛书中难免有不少错误和不足之处，诚恳希望广大读者批评指正。

清华大学《应用数学丛书》编辑委员会

1983. 4

主编 赵访熊

编委 常 迥 栾汝书 孙念增 黄克智 肖树铁

目 录

引言	(1)
第一章 向量与张量	(3)
§ 1.1 关于向量运算的公式	(3)
§ 1.2 斜角直线坐标系的基矢量, 矢量的分量与点积	(5)
§ 1.3 曲线坐标的基矢量	(13)
§ 1.4 坐标转换	(17)
§ 1.5 并矢与并矢式	(25)
§ 1.6 张量的基本概念	(28)
§ 1.7 张量代数	(38)
习题	(46)
第二章 矢积	(50)
§ 2.1 预备知识	(50)
§ 2.2 置换张量	(56)
§ 2.3 矢积	(60)
习题	(64)
第三章 二阶张量	(68)
§ 3.1 二阶张量的矩阵	(68)
§ 3.2 二阶张量的不变量	(74)
§ 3.3 张量的标准形, 主分量	(78)
§ 3.4 几种特殊的二阶张量	(93)
§ 3.5 二阶张量的分解	(109)
§ 3.6 正交相似张量	(117)
习题	(120)

第四章 张量函数	(123)
§ 4.1 张量函数、各向同性张量函数的定义 及例.....	(123)
§ 4.2 矢量的标量函数.....	(128)
§ 4.3 张量的标量函数.....	(132)
§ 4.4 张量的张量函数.....	(134)
习题.....	(150)
第五章 力学中的常用张量	(153)
§ 5.1 应变张量.....	(153)
§ 5.2 直线坐标系中的应变-位移关系.....	(159)
§ 5.3 应力张量.....	(161)
§ 5.4 弹性张量.....	(166)
§ 5.5 惯性矩张量.....	(169)
习题.....	(171)
第六章 张量函数的导数	(172)
§ 6.1 有限微分与导数的定义、链规则.....	(172)
§ 6.2 矢量的函数之导数.....	(179)
§ 6.3 梯度、散度及旋度.....	(184)
§ 6.4 张量的函数之导数.....	(186)
§ 6.5 二阶张量的不变量的导数.....	(188)
习题.....	(193)
第七章 曲线坐标张量分析	(195)
§ 7.1 基矢量的导数,Christoffel符号.....	(196)
§ 7.2 张量场函数对矢径的导数、梯度.....	(202)
§ 7.3 张量分量对坐标的协变导数.....	(205)
§ 7.4 张量场函数的散度与旋度.....	(218)
§ 7.5 积分定理.....	(221)
§ 7.6 Riemann-Christoffel 张量.....	(229)
§ 7.7 张量方程的曲线坐标分量表示方法.....	(237)

习题	(238)
第八章 非完整系与物理分量	(242)
§ 8.1 非完整系	(242)
§ 8.2 物理分量	(246)
§ 8.3 正交曲线坐标系	(250)
§ 8.4 非完整系中的张量运算	(255)
§ 8.5 正交标准化系中的张量运算	(259)
习题	(263)
第九章 张量对参数t的导数	(264)
§ 9.1 质点运动	(264)
§ 9.2 Euler坐标与 Lagrange 坐标	(269)
§ 9.3 基矢量的物质导数	(275)
§ 9.4 矢量场的导数	(282)
§ 9.5 张量场的导数	(299)
习题解答	(311)

引 言

自从爱因斯坦1915年发表广义相对论的著名论文以来，张量分析在理论物理中占有突出重要的地位。以后，张量分析在物理学发展中起了重要作用。同时，反过来，来自物理学（相对论，场论）的概念也促进了张量分析的发展。

近二十多年来连续介质力学的发展又重复着同一个历史。今天，不熟悉张量分析的人阅读连续介质力学的文献是很困难的，有时甚至是不可能的。张量分析与微分几何学一些分支已经渗透到连续介质力学中来。正如W. Flügge^[8]所说，有了张量分析，连续介质力学就如鱼得水。

本书主要是为学习连续介质力学等作必要的准备，因此主要限于三维欧氏空间的讨论。在写作本书过程中主要参考书有：

(1) 郭仲衡，非线性弹性理论，科学出版社，第一部份，1980，1—71页。

(2) A.Cemal Eringen, Treatise on Continuum Physics (in 3 volumes) Vol.1, Part I, Tensor Analysis, Academic Press, New York, 1972, 1—155.

(有中译本)

(3) Л. И. Седов, Введение в Механику Сплошной Среды, гл. 1, Гос. Изд. Физ. -Мат. Лит., Москва, 1962, 13—91.

(4) D.C. Leigh, Nonlinear Continuum Mechanics, Chap. 2 — 5, McGraw-Hill, 1968.

(5) C. Truesdell, Handbuch der Physik, Bd. III/3, The Non-Linear Field Theories of Mechanics, B.

Tensor Functions, 1965, 20—35.

(6) C. Truesdell, A First Course in Rational Mechanics, Vol. 1. Appendix II, 1977, 219—248.

(7) Lawrence E. Malvern, Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, Appendix I, II, Prentice-Hall, Inc., 1969, 569—672.

(8) W. Flügge, Tensor Analysis and Continuum Mechanics, 1972, Springer-Verlag. (有中译本)

本书曾用作1981—83年清华大学研究生教材，虽曾数易其稿，但可能仍有错误，欢迎读者指正。姚振汉与顾璆琳同志曾参与第一稿的部分章节整理，在此对姚振汉同志表示感谢，对顾璆琳同志表示悼念。

第一章 矢量与张量

§ 1.1 关于矢量运算的公式

作为预备知识, 本节给出若干矢量运算公式, 其证明可在一般有关矢量运算的书中找到。

在笛卡儿坐标系 x, y, z 中, 若设 i, j, k 分别为沿 x, y, z 轴的单位矢量, 则任意矢量 P 可以分解成这三个矢量的线性组合

$$P = P_x i + P_y j + P_z k \quad (1.1.1)$$

两个矢量 u 与 v 的点积是

$$\begin{aligned} u \cdot v &= v \cdot u = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = |u| |v| \cos(u, v) \\ &= |u| (v \text{ 在 } u \text{ 上的投影}) = |v| (u \text{ 在 } v \text{ 上的投影}) \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

矢量的点积服从分配律

$$P \cdot (u + v) = P \cdot u + P \cdot v \quad (1.1.3)$$

两个矢量 u 与 v 的叉积是

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (1.1.4)$$

如果对换两个矢量的顺序, 则叉积反号

$$u \times v = -v \times u \quad (1.1.5a)$$

叉积也服从分配律

$$P \times (u + v) = P \times u + P \times v \quad (1.1.5b)$$

三个矢量 u, v, w 的混合积是

$$[u, v, w] = (u \times v) \cdot w = u \cdot (v \times w)$$

$$= \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix} \quad (1.1.6a)$$

如果将三个矢量在混合积中的次序互换，应满足

$$\begin{aligned} [u, v, w] &= [v, w, u] = [w, u, v] = -[u, w, v] \\ &= -[v, u, w] = -[w, v, u] \end{aligned} \quad (1.1.6b)$$

可以证明，混合积的物理意义是以 u, v, w 为三个棱边所组成的平行六面体的体积。

三个矢量 u, v, w 的二重叉积满足如下恒等式

$$u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w \quad (1.1.7)$$

由三个矢量 u, v, w 的两两积所构成的行列式等于三个矢量所构成的体积的平方。即

$$\begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v & u \cdot w \\ v \cdot u & v \cdot v & v \cdot w \\ w \cdot u & w \cdot v & w \cdot w \end{vmatrix} = [u, v, w]^2 \quad (1.1.8)$$

上式可以这样证明：

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v & u \cdot w \\ v \cdot u & v \cdot v & v \cdot w \\ w \cdot u & w \cdot v & w \cdot w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x u_x + u_y u_y + u_z u_z & u_x u_x + u_y u_y + u_z u_z & u_x u_x + u_y u_y + u_z u_z \\ v_x u_x + v_y u_y + v_z u_z & v_x v_x + v_y v_y + v_z v_z & v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z \\ w_x u_x + w_y u_y + w_z u_z & w_x v_x + w_y v_y + w_z v_z & w_x w_x + w_y w_y + w_z w_z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix} = [u, v, w]^2 \end{aligned}$$

用同样方法可以证明

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' & \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' & \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}' \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}' & \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' & \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}' \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}' & \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}' & \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}' \end{vmatrix} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}][\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}'] \quad (1.1.9)$$

式中除 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 外, $\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}'$ 亦为三个任意矢量。

§ 1.2 斜角直线坐标系的基矢量, 矢量的分量与点积

一、二维问题

考虑图 1.1 所示斜角直线坐标系 x^1, x^2 , 两轴夹角为 φ , 若选沿 x^1 及 x^2 轴的参考矢量为 \mathbf{g}_1 及 \mathbf{g}_2 (它们可以不是单位矢量), 则任意矢量 \mathbf{P} 可以用它沿 x^1 及 x^2 轴的分矢量 $P^1\mathbf{g}_1$ 及 $P^2\mathbf{g}_2$ 之和来表示, 即

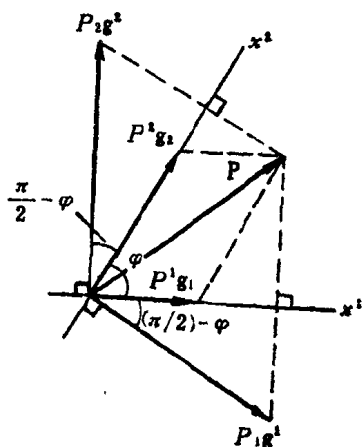


图 1.1

$$\mathbf{P} = P^1 \mathbf{g}_1 + P^2 \mathbf{g}_2 = \sum_{\alpha=1}^2 P^\alpha \mathbf{g}_\alpha = P^\alpha \mathbf{g}_\alpha \quad (1.2.1)$$

其中 P^1 及 P^2 称为矢量 \mathbf{P} 的分量。上式中最后的表达式省略了求和符号, 即采用了爱因斯坦求和约定。其中 α 称为哑指标, 它在同一项中, 以一个上指标和一个下指标的形式共出现两次。在二维问题中, 哑指标表示应对其取值范围 $\alpha = 1, 2$ 求和。本书规定希腊字母指标(如 α, β 等)取值1与2, 用于二维问题。而在三维问题中, 则用拉丁字母指标(如 i, j 等), 取值1, 2与3。显然每一对哑指标的字母可以用另一对字母任意代换, 即

$$\mathbf{P} = P^\alpha \mathbf{g}_\alpha = P^\beta \mathbf{g}_\beta \quad (1.2.1a)$$

因为哑指标无论采用什么字母，都同样表示对其取值范围求和。

在一定坐标系中，当参考矢量 $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ 选定后，用初等代数的方法可以求出任意矢量 \mathbf{P} 的分量 P^1 及 P^2 。若引入沿 x^1 及 x^2 轴的单位矢量 \mathbf{i}_1 及 \mathbf{i}_2 ，则有

$$\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_2 = 1, \quad \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1 = \cos\varphi \quad (1.2.2a)$$

$$\mathbf{g}_1 = |\mathbf{g}_1| \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{g}_2 = |\mathbf{g}_2| \mathbf{i}_2 \quad (1.2.2b)$$

代入 (1.2.1) 式得

$$\mathbf{P} = P^1 |\mathbf{g}_1| \mathbf{i}_1 + P^2 |\mathbf{g}_2| \mathbf{i}_2$$

上式分别点乘 \mathbf{i}_1 及 \mathbf{i}_2 ，并应用 (1.2.2a) 式，得

$$P^1 |\mathbf{g}_1| + P^2 |\mathbf{g}_2| \cos\varphi = \mathbf{P} \cdot \mathbf{i}_1 \quad (1.2.3)$$

$$P^1 |\mathbf{g}_1| \cos\varphi + P^2 |\mathbf{g}_2| = \mathbf{P} \cdot \mathbf{i}_2$$

由此可联立解得 P^1 及 P^2 。这种解联立方程的方法运算起来并不方便，为此引入另一对与 $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ 对偶的参考矢量 \mathbf{g}^1 及 \mathbf{g}^2 （一般也不是单位矢量，见图1.1），它们分别与 \mathbf{g}_2 及 \mathbf{g}_1 相垂直，即

$$\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{g}_2 = \mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{g}_1 = 0 \quad (1.2.4a)$$

并使

$$\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{g}_2 = 1 \quad (1.2.4b)$$

此式表示 \mathbf{g}^1 与 \mathbf{g}_1 及 \mathbf{g}^2 与 \mathbf{g}_2 的夹角均为锐角，且由图1.1知此夹角为 $\frac{\pi}{2} - \varphi$ （当 φ 为锐角）或 $\varphi - \frac{\pi}{2}$ （当 φ 为钝角），故

$$|\mathbf{g}^1| = \frac{1}{|\mathbf{g}_1| \sin\varphi} \quad |\mathbf{g}^2| = \frac{1}{|\mathbf{g}_2| \sin\varphi} \quad (1.2.4c)$$

(1.2.4) 诸式可统一写成对偶条件

$$\mathbf{g}^\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta = \delta_\beta^\alpha \quad (1.2.5)$$

其中 δ_β^α 称为 Kronecker δ ，其值为

$$\delta_\beta^\alpha = \begin{cases} 1 & \text{当 } \alpha = \beta \\ 0 & \text{当 } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (1.2.6)$$

参考矢量 \mathbf{g}_β 称为协变基矢量，用下指标表示，参考矢量 \mathbf{g}^α 称为

逆变基矢量，用上指标表示。由(1.2.5)式可以从协变基矢量唯一地确定逆变基矢量的大小与方向，或者反之。以后对于每个坐标系都将同时引入这两组互为对偶的基矢量。利用逆变基矢量极易求得矢量 \mathbf{P} 对协变基矢量分解的分量 P^1, P^2 ，只需将(1.2.1)式分别点乘 \mathbf{g}^1 及 \mathbf{g}^2 ，并应用(1.2.4)式使得

$$P^1 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}^1 \quad P^2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}^2$$

或统一写成

$$P^\beta = \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}^\beta \quad (\beta = 1, 2) \quad (1.2.7)$$

P^β 称为矢量 \mathbf{P} 的**逆变分量**，用上指标表示。(1.2.7)式中的 β 称为**自由指标**，自由指标在每项中只出现一次。在不同项中同一个自由指标应在同一个水平上，或者全是上指标，或者全是下指标。上述方程对自由指标的整个取值范围都将成立。例如上式对于二维问题 β 取1、2，就分别得到两个相应的式子。显然，方程中的自由指标可以换用其他字母(例如(1.2.7)式中 β 可换成 α)。

矢量 \mathbf{P} 也可以用沿逆变基 $\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2$ 分解的分矢量 $P_1\mathbf{g}^1$ 及 $P_2\mathbf{g}^2$ 之和来表示，即

$$\mathbf{P} = P_\alpha \mathbf{g}^\alpha \quad (1.2.8)$$

式中 P_α 称为矢量 \mathbf{P} 的**协变分量**，用下指标表示。为了确定 P_α ，将上式分别点乘 \mathbf{g}^β 并应用(1.2.5)式，得

$$P_\beta = \mathbf{P} \cdot \mathbf{g}_\beta \quad (\beta = 1, 2) \quad (1.2.9)$$

根据(1.1.2)式，(1.2.7)及(1.2.9)式分别表示

$$P^\beta = |\mathbf{g}^\beta| \text{ 与 } (\mathbf{P} \text{ 在 } \mathbf{g}^\beta \text{ 方向上的投影) 的乘积}$$

$$P_\beta = |\mathbf{g}_\beta| \text{ 与 } (\mathbf{P} \text{ 在 } \mathbf{g}_\beta \text{ 方向上的投影) 的乘积}$$

$$(\beta = 1, 2)$$

由此可得(右端不对 β 取和)

$$\mathbf{P} \text{ 在 } \mathbf{g}^\beta \text{ 方向上的投影} = P^\beta / |\mathbf{g}^\beta|$$

$$\mathbf{P} \text{ 在 } \mathbf{g}_\beta \text{ 方向上的投影} = P_\beta / |\mathbf{g}_\beta| \quad (\beta = 1, 2)$$

综上所述， \mathbf{g}_α 及 \mathbf{g}^α 分别称为协变及逆变基矢量，矢量 \mathbf{P} 沿

g_a 或 g^a 分解的系数 P^a 及 P_a 分别称为矢量 P 的逆变及协变分量，它们分别等于 P 与 g^a 及 g_a 的点积。在表达式中出现的指标有自由指标与哑指标两类。自由指标在表达式的每一项中只出现一次。在不同项中，同一个自由指标应出现在同一个水平上。对自由指标取值范围内的每个可能取值，都对应着一个方程或表达式。哑指标在表达式的每项中总是出现两次，一次作为上指标，一次作为下指标，表示这一项应在该哑指标的整个取值范围内求和。在求和后的结果表达式中，哑指标将不再出现。

二、三维问题

1. 斜角直线坐标系，协变与逆变基矢量

设有一组斜角直线坐标系 x^1, x^2, x^3 ，如图 1.2。在不同点处由 x^1 坐标线（它是坐标值 x^1 变化而另两个坐标值 x^2, x^3 不变的点的集合）与 x^2 坐标线构成的 $x^3 = \text{const}$ 坐标面是一组互相平行的平面。同样还有两组 $x^1 = \text{const}, x^2 = \text{const}$ 的坐标平面，三组坐标面是相互斜交的。

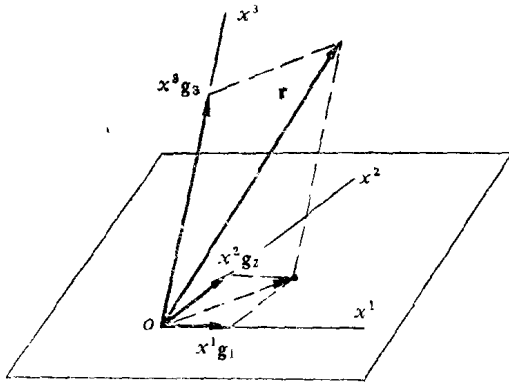


图1.2

自原点至任意点 (x^1, x^2, x^3) 的矢径 r 是坐标 x^1, x^2, x^3 的函数

$$\mathbf{r} = r(x^1, x^2, x^3) \quad (1.2.10)$$

对于直线坐标系，它与坐标成线性关系，故可以表示为

$$\mathbf{r} = x^1 \mathbf{g}_1 + x^2 \mathbf{g}_2 + x^3 \mathbf{g}_3 = x^i \mathbf{g}_i \quad (1.2.11)$$

此处采用了爱因斯坦求和约定，哑指标 $i = 1, 2, 3$ 。上式中 $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ 分别是沿 x^1, x^2, x^3 轴方向的参考矢量，对于直线坐标系，它们的大小和方向都是不变的。由 (1.2.11) 式得

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} dx^i = \mathbf{g}_i dx^i \quad (1.2.12)$$

故
$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \quad (1.2.13)$$

通常把这种用矢径对坐标的偏导数定义的参考矢量称为**协变基矢量**或**自然基矢量**。它的方向沿坐标线切线、并指向坐标增加方向。在斜角直线坐标系中三个坐标轴并不共面，因而三个协变基矢量也不共面，利用 (1.1.6a) 式可知

$$[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3] = \mathbf{g}_1 \cdot (\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3) \neq 0 \quad (1.2.14)$$

即 $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ 是线性无关的。

与二维问题相类似，可以定义一组与协变基矢量 \mathbf{g}_j 互为对偶的**逆变基矢量** \mathbf{g}^i ，使 \mathbf{g}^i 满足对偶条件

$$\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta_j^i \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.2.15)$$

式中 δ_j^i 为 Kronecker δ ，其定义参考 (1.2.6) 式，但改为三维。逆变基矢量 \mathbf{g}^i 的方向垂直于另两个协变基矢量 \mathbf{g}_j ($j \neq i$)，如图 1.3 所示，而其大小满足 $\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = 1$ ($j = i$)。若 \mathbf{g}^i 与 \mathbf{g}_i 夹角为 φ (φ 必为锐角)，则

$$|\mathbf{g}^i| = \frac{1}{|\mathbf{g}_i| \cos \varphi}$$

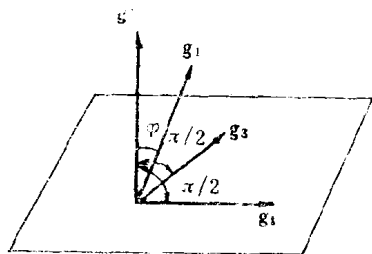


图 1.3

可以证明，逆变基矢量 \mathbf{g}^i 事实上是垂直于坐标 x^i 的等值面（即

坐标面) 的梯度

$$\mathbf{g}^i = \text{grad } x^i = \nabla x^i \quad (1.2.16)$$

根据对偶条件 (1.2.15) 可以由协变基矢量 \mathbf{g}_j 唯一地确定逆变基矢量 \mathbf{g}^i 。有两种计算方法:

法1 因 \mathbf{g}^1 垂直于 \mathbf{g}_2 与 \mathbf{g}_3 , 故 \mathbf{g}^1 平行于 $\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3$ 。令 $\mathbf{g}^1 = a \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3$, 代入 $\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}^1 = 1$, 并应用 (1.2.15) 式得

$$a = \frac{1}{[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]}$$

由此求得 \mathbf{g}^1 。类似地还可求得 \mathbf{g}^2 和 \mathbf{g}^3

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^1 &= \frac{\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3}{[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]} \\ \mathbf{g}^2 &= \frac{\mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1}{[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]} \\ \mathbf{g}^3 &= \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]} \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

法2 每一个 \mathbf{g}^i 作为一个矢量, 均可以沿协变基 \mathbf{g}_j 分解为

$$\mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.2.18a)$$

其中 g^{ij} 是 \mathbf{g}^i 的逆变分量, 共有 9 个。下面给出其计算方法。

将 (1.2.18a) 式点乘 \mathbf{g}^k , 利用对偶关系可知

$$\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^k = g^{ij} \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}^k = g^{ij} \delta_j^k = g^{ik}$$

或写作

$$g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.2.18b)$$

同样地, 协变基矢量 \mathbf{g}_i 也可以沿逆变基矢量 \mathbf{g}^j 分解

$$\mathbf{g}_i = g_{ij} \mathbf{g}^j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.2.19a)$$

而 $g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.2.19b)$

g_{ij} 与 g^{ij} 每组各有 9 个量。但根据 (1.2.18b) 与 (1.2.19b) 式可知它们均满足对称条件

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad g^{ij} = g^{ji} \quad (1.2.20)$$