主　编：郑培涵
副主编：马维民　温希恒　刘延喜

高等数学

上册

吉林大学出版社

高 等 数 学

（上 册）

主 编 郑培涵
副主编 马维民
温希恒
刘延喜

吉林大学出版社

DV95/17

高 等 数 学

（上册）

主编 郑培涵

责任编辑、责任校对：崔晓光	封面设计：孙 群
吉林大学出版社出版	吉林大学出版社发行
（长春市东中华路 37 号）	长春大学印刷厂印刷
开本：850×1168 毫米 1/32	1996 年 9 月第 1 版
印张：11.75	1996 年 9 月第 1 次印刷
字数：292 千字	印数：1—5000 册
ISBN 7-5601-1972-7/O·215	定价：17.00 元

前　言

教材建设是高等教育面向 21 世纪教学系列化建设的重要的一环。为了改变现行高等数学教材内容陈旧、模式单一、叙述繁杂等不是，我们发挥校际合作的力量，集中一些高校数学教师多年的教学经验，在长春市工科数学委员会的组织安排下，编写了《高等数学》(上、下册)一书供工科院校教学之用。具体的编写原则是：

1° 力求紧扣国家教委制订的高等工科院校《高等数学教学基本要求》；

2° 力求突出基本知识、基本方法，内容精炼，留有余地；

3° 力求叙述简洁，引发思维，利于培养学生数学素质；

4° 力求例题、习题的配备有层次，与理论有机地结合在一起。

《高等数学》上册由长春地质学院王新民教授主审。第一章由长春光机学院温希恒执笔；第二章由长春地质学院张国良执笔；第三章由吉林职业师范学院马维民执笔；第四章由长春邮电学院张朝凤执笔；第五章由长春邮电学院郑培涵执笔；第六章由长春大学刘延喜执笔。全书由郑培涵统稿定稿。

由于时间仓促、特别水平有限，错误在所难免，诚望不吝指正。

编　者

目　　录

第一章　函数与极限

高等数学是以极限为基本工具，以变量及变量间的依赖关系即函数关系为研究对象的一门数学课程. 作为基础知识，本章介绍变量、函数、极限和函数的连续性等基本概念，并着重介绍极限这个工具和方法.

第一节　函　　数

一、集　　合

在初等数学中，我们研究的对象是数，计算的方法是加、减、乘、除. 后来，我们发现需要对若干不是数的事物（如函数、向量、矩阵等等）用类似普通的计算的方法加以研究，这就引入了集合这一近代数学的一个基本概念.

我们把所研究的对象称为元素，它可以是数，但又不限于数，也可以是别的事物. 若干个（有限个或无限个）元素的全体称为集合. 如：某班学生的全体组成一个集合，该班的每一个学生是这集合的一个元素；全体三角形组成一个集合，任何一个三角形都是这个集合的一个元素. 元素一般用小写字母 a、b、c…表示. 集合一般用大字母 A、B、C…表示. 若 a 是 M 的元素，则说 a 属于 M，或说 M 包含 a，记作 $a\in M$，若 a 不是 M 的元素，则说 a 不属于 M，或说 M 不包括 a，记作 $a\overline{\in} M$.

集合中的元素具有确定性，即任何一个对象或者是或者不是这集合的元素，都能予以准确地判断. 集合中的元素是互异的，即相同的对象归入同一个集合时，只能算做是一个元素. 对

于给定的集合，不考虑各个元素之间的顺序关系，因而集合中的元素有无序性.

含有有限个元素的集合称为有限集，含有无限个元素的集合称为无限集. 一个集合可以用列举出它的全体元素的方法来表示，如由 $a,b,c,\cdots$ 组成的集合 M，可记为

$$M=\{a,b,c,\cdots\}$$

集合还可用描述法来表示，即若 M 是具有某种特征的元素 x 的全体所组成的集合，就记作

$$M=\{x\mid x\ \text{所具有的特征}\}$$

这里 x 所具有的特征，标志着凡适合这个特征的事物都是集合 M 的元素，不满足这个特征的事物都不是集合 M 的元素.

如集合 $M=\{x\mid |x|\leqslant 1\}$ 表示 M 是由所有满足不等式 $|x|\leqslant 1$ 的全体实数 x 所组成.

以后用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合. 如果没有特别声明，以后提到的数都是实数. 全体自然数组成的集合记为 N，全体整数组成的集合记为 Z，全体有理数组成的集合记为 Q，全体实数组成的集合记为 R.

不含任何元素的集合称为空集. 如集合

$$\{x\mid x\in R, x^2=-1\}$$

是空集，因为适合条件 $x^2=-1$ 的实数是不存在的，空集记作 φ

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若 $x\in A$，则必有 $x\in B$，就称 A 是 B 的子集，记为 $A\subseteq B$（读作 A 包含于 B）或 $B\supseteq A$（读作 B 包含 A）；如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，就称 A 是 B 的真子集，记为 $A\subset B$. 例如：$N\subset Z$，$Z\subset Q$，$Q\subset R$. 对任何集合 A 都有 $A\subseteq A$，$\varphi\subset A$.

如果 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，就称集合 A 与集合 B 相等，记为 $A=B$. 显然，两个相等的非空集合，它们有完全相同的元素. 例如，设

$$A=\{x\mid x^2-2x-3=0\}, B=\{-1,3\}$$

则 $A=B$.

设 A、B 是两个非空集合，如果按照某个确定的规则 f，对集合 A 中每一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，则称 f 是由集事 A 到集合 B 的映射，记作

$$f: A \to B$$

如果 A 中的元素 a 对应 B 中的元素 b，则称 b 为 a 的象，a 为 b 的原象. 区间是常用到的一类数集. 设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$. 把数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$$

a 和 b 称为开区间 (a,b) 的端点，这里 $a\overline{\in}(a,b)$，$b\overline{\in}(a,b)$.

数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

a 和 b 也称为闭区间 $[a,b]$ 的端点，这里 $a \in [a,b]$，$b \in [a,b]$.

类似地可定义半闭区间：

$$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\},$$

$$(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}.$$

以上这些区间都称为有限区间，在数轴上可用介于 a、b 两点之间的一条长 $b-a$ 的线段上的所有点表示（依 a、b）或 $[a,b]$ 的不同情况，不包括或包括端点）.

数集

$$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$$

$$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}$$

$$(-\infty,b]=\{x \mid x \leqslant b\}$$

$$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$$

为无限区间，∞ 读作无穷大，它不是一个具体的数，只是一个记号，它前面的“$+$”和“$-$”号表示方向，例如“$+\infty$”表示数在数轴上沿正的方向无限变大. 无限区间可以用数轴上（包含端点或不包含端点）的射线上所有点表示. 全体实数的集合 R 可记为 $(-\infty,+\infty)$，它也是无限区间，即整个数轴.

数集

$$\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的 δ 邻域(其中 a,δ 是实数且 $\delta>0$),记作 $U(a,\delta)$,点 a 叫做这邻域的中心,δ 叫做这邻域的半径.

因为 $|x-a|<\delta$ 等价于

$$-\delta<x-a<\delta \text{ 即 } a-\delta<x<a+\delta$$

所以

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$

即点 a 的 δ 邻域就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$,这个区间以 a 为中心,而长度为 2δ(图 1-1).

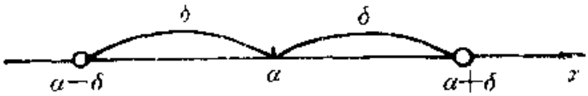

图 1-1

点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后,称为 a 的去心 δ 邻域,记作 $U(\hat{a},\delta)$,即

$$U(\hat{a},\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$.

二、变　量

当我们观察某种种自然现象或技术过程时,会遇到很多的的量,这些量一般可分为两种:一种是在某过程中保持不变的量,即在事物的运动或变化过程中,保持一定数值的量,这种量称为常量;还有一种是在过程进行中不断改变的量,即在事物的运动或变化过程中可以取不同的数值的量,这种量称为变量.例如,把一个密闭的容器内的气体加热时,气体的体积和气体分子的个数是常量,而气体的温度与压力则是变量.

一个量是常量还是变量，依赖于我们研究这个量的具体情况. 同一个量，在某种情况下可以认为是常量；而在别的情况下，就可能是变量. 例如，就小范围地区来说，重力加速度可以看作是常量，但就广大地区而言，重力加速度则是变量.

通常用字母 a、b、c…等表示常量，用字母 x、y、t，…等表示变量.

量 x 的每一个值都是一个数，因而可以用数轴上的一个点来代替它. 如果量 x 是常量，则用数轴上的一个定点来表示；如果量 x 是变量，则用数轴上的动点来表示.

三、函数的定义

在同一个自然现象或技术过程中，往往同时有几个变量在变化，但它们并不是孤立地变化，而是相互联系并遵循一定的变化规律. 下面先看几个例子.

例 1 圆的面积 A 与它的半径 r 之间的关系由公式 $A=\pi r^2$ 给定，当半径 r 取定任一正数时，圆面积 A 相应有一个确定的值.

例 2 某地某天 24 小时中时间 t 与气温 T 之间有确定的对应关系，用自动记录仪可记录得一条曲线. 虽然我们不可能找到象例 1 中那样的表达式，但是，根据这个图形可以知道这个地区在每一个时间 $t_0(0\leqslant t_0\leqslant 24)$ 的气温 T.（见图 1-2）.

例 3 按邮局规定，信件的邮资 S 由信件的重量 W 来确定，S 与 W 的关系可列成下表：

$W(g)$	$0<W\leqslant 20$	$20<W\leqslant 40$	$40<W\leqslant 60$	…	$1960<W\leqslant 1980$	$1980<W\leqslant 2000$
S(分)	20	40	60	…	1980	2000

一般信件的重量都不超过 $20g$，所以贴上 20 分的邮票即可，但是对于较重的信件，就须称出信件的重量 W，再按上表确定邮资 S.

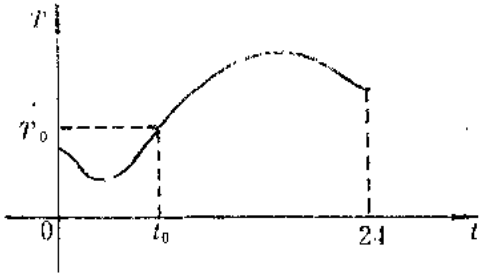

图 1-2

以上三个例子的共同点是:在所讨论的变化过程中有两个变量,这两个变量间存在一种依赖关系,即存在一种对应法则,根据这一法则,当其中一个变量在某一范围内每取一个数值时,另一变量则有确定的值与之对应.两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 设有两个非空实数集 A、B,如果对于数集 A 中的每一个数 x,按照确定的规则 f 有数集 B 中唯一的一个数与之对应,则称对应规则 f 为定义在集合 A 上的函数.

事实上,函数 f 就是从集合 A 到集合 B 的一个映射.

数集 A 称为函数的定义域,x 称为自变量,y 称为因变量.与 x 对应的 y 的数值称为函数 f 在 x 处的函数值,记作 $y=f(x)$,数集 $B_f=\{y\mid y=f(x),x\in A\}$称为函数的值域,显然 $B_f\subseteq B$.要注意 f 是函数,它表示这个函数的确定的对应法则,而$f(x)$是函数值,因为在数学分析中常通过函数值来研究函数,为了方便,以后也把 $y=f(x)$称为 x 的函数,或称 y 是 x 的函数.

函数 $y=f(x)$中表示对应法则的记号 f 也可改用其它字母,例如"φ","F",等等.这时函数就记作 $y=\varphi(x)$,$y=F(x)$,等等.在研究同一问题时出现的不同的函数,应该用不同的记号.

如果对于自变量 x 的某一个值 x_0 有确定的 y 值 $f(x_0)$与

之对应，就说函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处有定义.

函数的定义域是自变量的取值范围. 在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 如例 1 中，定义域 $A=(0,+\infty)$，在例 2 中，定义域 $A=[0,24]$. 如果不考虑函数的实际意义，而抽象地研究由公式(或分析表达式)表示的函数时，函数的定义域就是自变量所能取的使表达式有意义的一切实数值. 例如，函数 $y=\lg(1-x^2)$ 的定义域是开区间 $(-1,1)$.

如果自变量在定义域内取某些数值时，对应多个 y 值，就称这个对应规则为多值函数，而前面定义中所说的一个 x 有唯一的 y 值与之对应的情形，又称为单值函数. 例 1，例 2 和例 3 中的函数都是单值函数，它们分别是用公式法、图形法、表格法给出的. 我们主要研究由公式给出的函数，即有分析表达式的函数. 而由方程 $x^2+y^2=r^2$ 所给定的 x、y 间的依赖关系，当 $x=\pm r$ 时 $y=0$，当 x 取开区间 $(-r,r)$ 内的任一数值时，y 有两个确定的值与之对应，因而由 $x^2+y^2=r^2$ 所确定的 y 是 x 的函数即为多值函数. 对于多值函数通常采取限制 y 的取值范围的办法使其成为单值函数. 如 $x^2+y^2=r^2$ 就可以分为 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ 两个单值函数. 以后凡是没有特别说明时，函数都是指单值函数.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 A，对于任意取定的 $x\in A$，对应的函数值为 $y=f(x)$. 这样，以 x 为横坐标、y 为纵坐标就在 xoy 平面上确定一点 (x,y). 当 x 取遍 A 上的每一个数值时，得到点 (x,y) 的一个集合 C：

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in A\}$$

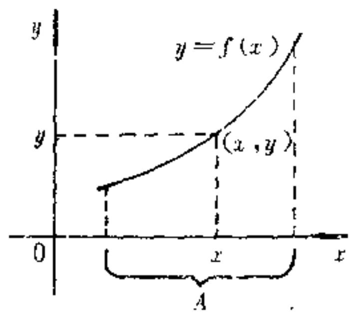

图 1-3