

主 编:郑培涵

副主编:马维民 温希恒 刘延喜

高等数学

上册

吉林大学出版社

013

S91

449482

高等数学

(上册)

主 编 郑培涵

副主编 马维民

温希恒

刘延喜



00449482

吉林大学出版社

DV95/17

高等数学

(上册)

主编 郑培涵

责任编辑、责任校对:崔晓光

封面设计:孙 群

吉林大学出版社出版

吉林大学出版社发行

(长春市东中华路 37 号)

长春大学印刷厂印刷

开本:850×1168 毫米

1/32 1996 年 9 月第 1 版

印张:11.75

1996 年 9 月第 1 次印刷

字数:292 千字

印数:1—5000 册

ISBN 7-5601-1972-7/O · 215

定价:17.00 元

前 言

教材建设是高等教育面向 21 世纪教学系列化建设的重要的一环。为了改变现行高等数学教材内容陈旧、模式单一、叙述繁杂等不是,我们发挥校际合作的力量,集中一些高校数学教师多年的教学经验,在长春市工科数学委员会的组织安排下,编写了《高等数学》(上、下册)一书供工科院校教学之用。具体的编写原则是:

1° 力求紧扣国家教委制订的高等工科院校《高等数学教学基本要求》;

2° 力求突出基本知识、基本方法,内容精炼,留有余地;

3° 力求叙述简洁,引发思维,利于培养学生数学素质;

4° 力求例题、习题的配备有层次,与理论有机地结合在一起。

《高等数学》上册由长春地质学院王新民教授主审。第一章由长春光机学院温希恒执笔;第二章由长春地质学院张国良执笔;第三章由吉林职业师范学院马维民执笔;第四章由长春邮电学院张朝凤执笔;第五章由长春邮电学院郑培涵执笔;第六章由长春大学刘延喜执笔。全书由郑培涵统稿定稿。

由于时间仓促,特别水平有限,错误在所难免,诚望不吝指正。

编 者

目 录

前言	(1)
第一章 函数与极限	(1)
第一节 函数	(1)
一、集合	(1)
二、变量	(4)
三、函数的定义	(5)
四、函数的几种特性	(10)
五、反函数	(12)
六、基本初等函数	(13)
七、复合函数	(17)
八、初等函数	(18)
九、双曲函数	(18)
习题 1-1	(20)
第二节 数列的极限	(23)
习题 1-2	(27)
第三节 函数的极限	(28)
一、 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限	(29)
二、 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限	(31)
三、函数的左、右极限	(34)
四、函数极限的性质	(36)
习题 1-3	(36)
第四节 无穷小与无穷大	(38)
一、无穷小量	(38)
二、无穷大量	(40)

三、无穷小的比较	(43)
习题 1-4	(44)
第五节 极限的运算法则	(45)
习题 1-5	(51)
第六节 极限存在准则 两个重要极限	(53)
一、极限存在准则	(53)
二、两个重要极限	(54)
习题 1-6	(62)
第七节 函数的连续性与间断点	(63)
一、函数的连续性	(63)
二、间断点的分类	(66)
习题 1-7	(69)
第八节 连续函数的运算和初等函数的连续性	(71)
一、连续函数的和、差、积、商的连续性	(71)
二、反函数和复合函数的连续性	(71)
三、初等函数的连续性	(72)
习题 1-8	(75)
第九节 闭区间上连续函数的性质	(76)
习题 1-9	(78)
第二章 导数与微分	(80)
第一节 导数	(80)
一、变化率问题	(80)
二、导数的概念	(81)
三、求导数举例	(82)
四、导数的几何意义	(86)
五、函数的连续性与可导性的关系	(87)
习题 2-1	(88)
第二节 求导法则	(90)
一、导数的四则运算法则	(90)

二、复合函数的求导法则	(92)
三、反函数的导数	(95)
四、初等函数的求导问题	(98)
习题 2-2	(99)
第三节 高阶导数.....	(102)
习题 2-3	(106)
第四节 隐函数及参数方程所确定的函数的导数	
相关变化率.....	(107)
一、隐函数的导数	(107)
二、由参数方程所确定的函数的导数	(112)
三、相关变化率	(115)
习题 2-4	(116)
第五节 微分及其简单应用.....	(118)
一、微分的定义	(119)
二、微分的几何意义	(120)
三、一阶微分形式不变性 微分公式	(121)
四、微分在近似计算中的应用	(124)
习题 2-5	(126)
第三章 微分中值定理及导数的应用.....	(128)
第一节 微分中值定理.....	(128)
一、罗尔定理	(128)
二、拉格朗日中值定理	(130)
三、柯西中值定理	(133)
习题 3-1	(135)
第二节 罗必塔法则.....	(137)
习题 3-2	(143)
第三节 函数的单调性与极值.....	(143)
一、函数的单调性	(144)
二、函数的极值	(145)

三、最大值、最小值问题	(148)
习题 3-3	(150)
第四节 曲线的凹凸、拐点及函数作图	(152)
一、曲线的凹凸性与拐点	(152)
二、渐近线	(157)
三、函数作图	(158)
习题 3-4	(161)
第五节 弧微分及平面曲线的曲率	(162)
一、弧微分	(162)
二、平面曲线的曲率	(163)
三、曲率圆	(166)
习题 3-5	(167)
第六节 泰勒公式	(168)
习题 3-6	(174)
第四章 不定积分	(175)
第一节 不定积分的概念与性质	(175)
一、原函数与不定积分的概念	(175)
二、不定积分的性质	(177)
三、基本积分表	(178)
习题 4-1	(181)
第二节 换元积分法	(182)
一、第一类换元法	(182)
二、第二类换元法	(189)
习题 4-2	(195)
第三节 分部积分法	(197)
习题 4-3	(201)
第四节 两种特殊类型函数的积分	(202)
一、有理函数的积分	(203)
二、三角函数有理式的积分	(209)

习题 4.4	(212)
第五节 积分表的使用	(213)
习题 4.5	(216)
第五章 定积分及其应用	(218)
第一节 定积分的概念	(218)
一、两个积累问题实例	(218)
二、定积分的定义及存在定理	(220)
三、定积分的几何意义	(222)
习题 5-1	(224)
第二节 定积分的基本性质	(224)
习题 5-2	(229)
第三节 微积分学基本定理	(230)
一、变上限的定积分、原函数存在定理	(230)
二、微积分学基本定理	(232)
习题 5-3	(234)
第四节 定积分的换元法、分部积分法	(235)
一、定积分的换元法	(236)
二、定积分的分部积分法	(238)
习题 5-4	(241)
第五节 广义积分	(243)
一、无穷区间上的广义积分	(243)
二、无界函数的广义积分	(246)
三、广义积分敛散性的判别法	(248)
四、绝对收敛	(251)
五、 p -函数	(252)
习题 5-5	(253)
第六节 定积分的应用	(254)
一、微元法	(254)
二、定积分的几何应用	(255)

三、定积分的物理应用	(264)
习题 5-6	(269)
第六章 常微分方程	(271)
第一节 基本概念及微分方程的建立	(271)
习题 6-1	(274)
第二节 一阶微分方程	(275)
一、可分离变量的微分方程	(275)
二、齐次微分方程	(282)
三、一阶线性微分方程	(286)
习题 6-2	(291)
第三节 可降阶的高阶微分方程	(292)
一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程	(293)
二、 $y'=f(x, y')$ 型的微分方程	(295)
三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程	(297)
习题 6-3	(300)
第四节 高阶线性微分方程解的结构	(301)
一、线性微分算子	(301)
二、二阶线性微分方程解的结构	(303)
三、二阶线性微分方程的常数变易法	(304)
四、 n 阶线性微分方程解的结构	(308)
习题 6-4	(309)
第五节 二阶常系数齐次线性微分方程	(309)
习题 6-5	(313)
第六节 二阶常系数非齐次线性微分方程的 算子解法	(311)
习题 6-6	(322)
习题答案	(324)
附录 积分表	(353)

第一章 函数与极限

高等数学是以极限为基本工具,以变量及变量间的依赖关系即函数关系为研究对象的一门数学课程.作为基础知识,本章介绍变量、函数、极限和函数的连续性等基本概念,并着重介绍极限这个工具和方法.

第一节 函 数

一、集 合

在初等数学中,我们研究的对象是数,计算的方法是加、减、乘、除.后来,我们发现需要对若干不是数的事物(如函数、向量、矩阵等等)用类似普通的计算的方法加以研究,这就引入了集合这一近代数学的一个基本概念.

我们把所研究的对象称为元素,它可以是数,但又不限于数,也可以是别的事物.若干个(有限个或无限个)元素的全体称为集合.如:某班学生的全体组成一个集合,该班的每一个学生是这集合的一个元素;全体三角形组成一个集合,任何一个三角形都是这个集合的一个元素.元素一般用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示,集合一般用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示.若 a 是 M 的元素,则说 a 属于 M ,或说 M 包含 a ,记作 $a \in M$,若 a 不是 M 的元素,则说 a 不属于 M ,或说 M 不包括 a ,记作 $a \notin M$.

集合中的元素具有确定性,即任何一个对象或者是或者不是这集合的元素,都能予以准确地判断.集合中的元素是互异的,即相同的对象归入同一个集合时,只能算做是一个元素.对

于给定的集合,不考虑各个元素之间的顺序关系,因而集合中的元素有无序性.

含有有限个元素的集合称为有限集,含有无限个元素的集合称为无限集.一个集合可以用列举出它的全体元素的方法来表示,如由 $a, b, c, \dots$ 组成的集合 M , 可记为

$$M = \{a, b, c, \dots\}$$

集合还可用描述法来表示,即若 M 是具有某种特征的元素 x 的全体所组成的集合,就记作

$$M = \{x | x \text{ 所具有的特征}\}$$

这里 x 所具有的特征,标志着凡适合这个特征的事物都是集合 M 的元素,不满足这个特征的事物都不是集合 M 的元素.

如集合 $M = \{x | |x| \leq 1\}$ 表示 M 是由所有满足不等式 $|x| \leq 1$ 的全体实数 x 所组成.

以后用到的集合主要是数集,即元素都是数的集合.如果没有特别声明,以后提到的数都是实数.全体自然数组成的集合记为 N ,全体整数组成的集合记为 Z ,全体有理数组成的集合记为 Q ,全体实数组成的集合记为 R .

不含任何元素的集合称为空集.如集合

$$\{x | x \in R, x^2 = -1\}$$

是空集,因为适合条件 $x^2 = -1$ 的实数是不存在的,空集记作 $\varnothing$.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,即若 $x \in A$, 则必有 $x \in B$, 就称 A 是 B 的子集,记为 $A \subseteq B$ (读作 A 包含于 B) 或 $B \supseteq A$ (读作 B 包含 A); 如果 A 是 B 的子集,并且 B 中至少有一个元素不属于 A , 就称 A 是 B 的真子集,记为 $A \subset B$. 例如: $N \subset Z, Z \subset Q, Q \subset R$. 对任何集合 A 都有 $A \subseteq A, \varnothing \subset A$.

如果 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq A$, 就称集合 A 与集合 B 相等,记为 $A = B$. 显然,两个相等的非空集合,它们有完全相同的元素. 例如,设

$$A = \{x | x^2 - 2x - 3 = 0\}, B = \{-1, 3\}$$

则 $A=B$.

设 A, B 是两个非空集合, 如果按照某个确定的规则 f , 对集合 A 中每一个元素, 在集合 B 中都有唯一的元素和它对应, 则称 f 是由集 A 到集合 B 的映射, 记作

$$f: A \rightarrow B$$

如果 A 中的元素 a 对应 B 中的元素 b , 则称 b 为 a 的象, a 为 b 的原象. 区间是常用到的一类数集. 设 a 和 b 都是实数, 且 $a < b$. 把数集 $\{x | a < x < b\}$ 称为开区间, 记作 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}$$

a 和 b 称为开区间 (a, b) 的端点, 这里 $a \in (a, b), b \in (a, b)$.

数集 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 记作 $[a, b]$, 即

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$$

a 和 b 也称为闭区间 $[a, b]$ 的端点, 这里 $a \in [a, b], b \in [a, b]$.

类似地可定义半闭区间:

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x | a < x \leq b\}.$$

以上这些区间都称为有限区间, 在数轴上可用介于 a, b 两点之间的一条长 $b-a$ 的线段上的所有点表示(依 (a, b) 或 $[a, b]$ 的不同情况, 不包括或包括端点).

数集

$$[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}$$

$$(a, +\infty) = \{x | x > a\}$$

$$(-\infty, b] = \{x | x \leq b\}$$

$$(-\infty, b) = \{x | x < b\}$$

为无限区间, ∞ 读作无穷大, 它不是一个具体的数, 只是一个记号, 它前面的“+”和“-”号表示方向, 例如“ $+\infty$ ”表示数在数轴上沿正的方向无限变大. 无限区间可以用数轴上(包含端点或不包含端点)的射线上所有点表示. 全体实数的集合 R 可记为 $(-\infty, +\infty)$, 它也是无限区间, 即整个数轴.

数集

$$\{x \mid |x - a| < \delta\}$$

称为点 a 的 δ 邻域(其中 a, δ 是实数且 $\delta > 0$), 记作 $U(a, \delta)$, 点 a 叫做这邻域的中心, δ 叫做这邻域的半径.

因为 $|x - a| < \delta$ 等价于

$$-\delta < x - a < \delta \text{ 即 } a - \delta < x < a + \delta$$

所以

$$U(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$$

即点 a 的 δ 邻域就是开区间 $(a - \delta, a + \delta)$, 这个区间以 a 为中心, 而长度为 2δ (图 1-1).

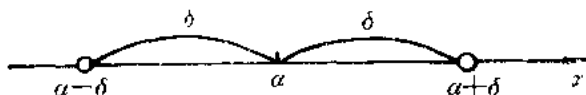


图 1-1

点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后, 称为 a 的去心 δ 邻域, 记作 $U(\hat{a}, \delta)$, 即

$$U(\hat{a}, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$$

这里 $0 < |x - a|$ 就表示 $x \neq a$.

二、变 量

当我们观察某种自然现象或技术过程时, 会遇到很多的量, 这些量一般可分为两种: 一种是在某过程中保持不变的量, 即在事物的运动或变化过程中, 保持一定数值的量, 这种量称为常量; 还有一种是在过程进行中不断改变的量, 即在事物的运动或变化过程中可以取不同的数值的量, 这种量称为变量. 例如, 把一个密闭的容器内的气体加热时, 气体的体积和气体分子的个数是常量, 而气体的温度与压力则是变量.

一个量是常量还是变量,依赖于我们研究这个量的具体情况.同一个量,在某种情况下可以认为是常量;而在别的情况下,就可能是变量.例如,就小范围地区来说,重力加速度可以看作是常量,但就广大地区而言,重力加速度则是变量.

通常用字母 $a, b, c, \dots$ 等表示常量,用字母 $x, y, t, \dots$ 等表示变量.

量 x 的每一个值都是一个数,因而可以用数轴上的一个点来代替它.如果量 x 是常量,则用数轴上的一个定点来表示;如果量 x 是变量,则用数轴上的动点来表示.

三、函数的定义

在同一个自然现象或技术过程中,往往同时有几个变量在变化,但它们并不是孤立地变化,而是相互联系并遵循一定的变化规律.下面先看几个例子.

例1 圆的面积 A 与它的半径 r 之间的关系由公式 $A = \pi r^2$ 给定,当半径 r 取定任一正数时,圆面积 A 相应有一个确定的值.

例2 某地某天 24 小时中时间 t 与气温 T 之间有确定的对应关系,用自动记录仪可记录得一条曲线.虽然我们不可能找到象例 1 中那样的表达式,但是,根据这个图形可以知道这个地区在每一个时间 t_0 ($0 \leq t_0 \leq 24$) 的气温 T . (见图 1-2).

例3 按邮局规定,信件的邮资 S 由信件的重量 W 来确定, S 与 W 的关系可列成下表:

W (g)	$0 < W \leq 20$	$20 < W \leq 40$	$40 < W \leq 60$	$\dots$	$1960 < W \leq 1980$	$1980 < W \leq 2000$
S (分)	20	40	60	$\dots$	1980	2000

一般信件的重量都不超过 20g, 所以贴上 20 分的邮票即可,但是对于较重的信件,就须秤出信件的重量 W , 再按上表确定邮资 S .

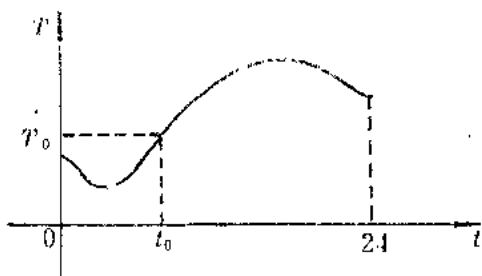


图 1-2

以上三个例子的共同点是：在所讨论的变化过程中有两个变量，这两个变量间存在一种依赖关系，即存在一种对应法则，根据这一法则，当其中一个变量在某一范围内每取一个数值时，另一变量则有确定的值与之对应。两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质。

定义 设有两个非空实数集 A 、 B ，如果对于数集 A 中的每一个数 x ，按照确定的规则 f 有数集 B 中唯一的一个数与之对应，则称对应规则 f 为定义在集合 A 上的函数。

事实上，函数 f 就是从集合 A 到集合 B 的一个映射。

数集 A 称为函数的定义域， x 称为自变量， y 称为因变量。与 x 对应的 y 的数值称为函数 f 在 x 处的函数值，记作 $y=f(x)$ ，数集 $B_f=\{y \mid y=f(x), x \in A\}$ 称为函数的值域，显然 $B_f \subseteq B$ 。要注意 f 是函数，它表示这个函数的确定的对应法则，而 $f(x)$ 是函数值，因为在数学分析中常通过函数值来研究函数，为了方便，以后也把 $y=f(x)$ 称为 x 的函数，或称 y 是 x 的函数。

函数 $y=f(x)$ 中表示对应法则的记号 f 也可改用其它字母，例如“ φ ”，“ F ”，等等，这时函数就记作 $y=\varphi(x)$ ， $y=F(x)$ ，等等。在研究同一问题时出现的不同的函数，应该用不同的记号。

如果对于自变量 x 的某一个值 x_0 有确定的 y 值 $f(x_0)$ 与

之对应,就说函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处有定义.

函数的定义域是自变量的取值范围.在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的.如例1中,定义域 $A=(0,+\infty)$,在例2中,定义域 $A=[0,24]$.如果不考虑函数的实际意义,而抽象地研究由公式(或分析表达式)表示的函数时,函数的定义域就是自变量所能取的使表达式有意义的一切实数值.例如,函数 $y=\lg(1-x^2)$ 的定义域是开区间 $(-1,1)$.

如果自变量在定义域内取某些数值时,对应多个 y 值,就称这个对应规则为多值函数,而前面定义中所说的一个 x 有唯一的 y 值与之对应的情形,又称为单值函数.例1,例2和例3中的函数都是单值函数,它们分别是用公式法、图形法、表格法给出的.我们主要研究由公式给出的函数,即有分析表达式的函数.而由方程 $x^2+y^2=r^2$ 所给定的 x, y 间的依赖关系,当 $x=\pm r$ 时 $y=0$,当 x 取开区间 $(-r, r)$ 内的任一数值时, y 有两个确定的值与之对应,因而由 $x^2+y^2=r^2$ 所确定的 y 是 x 的函数即为多值函数.对于多值函数通常采取限制 y 的取值范围的办法使其成为单值函数.如 $x^2+y^2=r^2$ 就可以分为 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ 两个单值函数.以后凡是没有特别说明时,函数都是指单值函数.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 A ,对于任意取定的 $x \in A$,对应的函数值为 $y=f(x)$.这样,以 x 为横坐标、 y 为纵坐标就在 xoy 平面上确定一点 (x, y) .当 x 取遍 A 上的每一个数值时,得到点 (x, y) 的一个集合 C :

$$\begin{aligned} C &= \{(x, y) | y \\ &= f(x), x \in A\} \end{aligned}$$

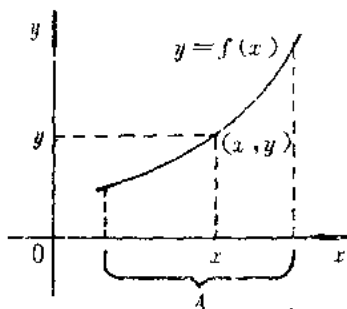


图 1-3