

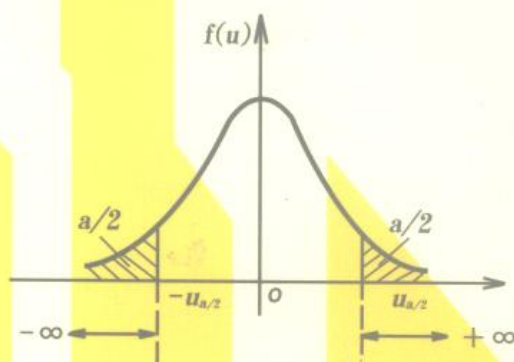
学习经济数学指导 备考硕士研究生指南

经济数学

(概率论与数理统计初步)

解题方法技巧归纳

毛纲源



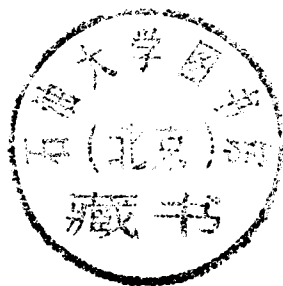
华中理工大学出版社

登录号	138622
分类号	F224.0
种次号	028

学习概率与统计指导 备考硕士研究生指南

经济数学(概率论与数理统计初步) 解题方法技巧归纳

毛纲源



石油大学0141345

华中理工大学出版社

138622

图书在版编目(CIP)数据

经济数学(概率论与数理统计初步)解题方法技巧归纳/毛纲源
武汉:华中理工大学出版社, 1999. 7

ISBN 7-5609-1972-3

I. 经…

II. 毛…

III. 经济数学-高等学校-教学参考资料

IV. O21

经济数学(概率论与数理统计初步)解题方法技巧归纳 毛纲源

责任编辑:李立鹏

封面设计:刘 卉

责任校对:童兆丹

监 印:熊庆瑜

出版发行:华中理工大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87542624

经销:新华书店湖北发行所

录排:武汉皇荣文化发展有限责任公司照排室

印刷:华中理工大学出版社印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:16.25

字数:392 000

版次:1999年7月第1版 印次:1999年11月第2次印刷

印数:6 001—12 000

ISBN 7-5609-1972-3/O · 188

定价:18.80 元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行科调换)



石油大学0141345

内 容 提 要

本书将经济数学(概率论与数理统计初步)的主要内容按问题分类,通过引例,归纳总结各类问题的解题规律、方法和技巧。其中不少是作者多年来积累的教学经验总结。读者阅读此书,必将增强分析问题,解决问题和应试的能力。

本书实例多、类型广、梯度大,例题主要取材于两部分:一部分是人大版《概率论与数理统计》(修订本)中的典型习题,另一部分是历届(包括1999年)全国硕士研究生入学考试数学试题,其中经济类的数学三、数学四和原数学四、五的考题,绝大部分都已收入。

本书可供本(专)科学生学习经济数学(概率论与数理统计)阅读和参考;对于自学者和有志攻读经济学和工商管理(即MBA)硕士学位研究生的青年,本书更是良师益友;对于参加成人教育,自考和文凭考试的读者,也不失为一本有指导价值的很好的参考书;对于从事经济数学(概率论与数理统计)教学的教师,亦有一定的参考价值。

前 言

“经济数学（微积分）解题方法技巧归纳”和“经济数学（线性代数）解题方法技巧归纳”出版后，受到读者好评，几年来畅销全国各地。现出版“经济数学（概率论与数理统计初步）解题方法技巧归纳”，最后全部完成经济数学学习指导、考研指南丛书的编写工作，感谢广大读者的信任和支持。

概率论和数理统计与我们以前学过的数学知识具有极其不同的特点。在此之前，数学是研究在一定条件下，其结果必然发生或不发生的规律性，而概率论所研究的则是随机事件的规律性。随机事件在一次试验中可能发生，也可能不发生，完全是偶然的，但在大量的试验中随机事件的发生又具有一定的规律性，即具有一定的必然性。概率论正是揭示这种偶然性背后隐藏着的必然性的科学。这给初学者必然带来不少困难，尤其是解题时无从下手，解完后又不知正确与否。为帮助初学者克服这些困难，较好地掌握这门课程的基本内容，是编写这本书的目的之一。

同前两本书一样，本书将经济数学（概率论与数理统计初步）的主要内容按问题分类，通过引例归纳、总结各类问题的解题规律、方法和技巧。它不同于一般的教科书、习题集和题解，自具特色。

本书实例较多，且类型广、梯度大。例题中一部分取材于袁荫棠编、中国人民大学出版社出版的“概率论与数理统计”（修订本）中的典型习题〔原习题的题号在例序后用表示章序、题序和小题序的三个数码加上方括号标志。例如，例3〔2.1（2）〕表示例3是人大“概率论与数理统计”（修订本）第2章第1题的第2小题〕。

需查找上面“概率论与数理统计”（修订本）中习题解答的读

者，请参看书末附录。

例题的另一部分取材于历届全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题，其中原数学试卷四、五及1997、1998、1999三年数学试卷三、四的考题（适用经济类、财政类专业的考生）绝大部分都已收入〔例序后用表示年份的5个文字后写上数学试卷类别加上方括号标志。例如，例1〔1989年4〕表示例1是1989年数学试卷4中的考题〕。

通过统考试题的研讨，使有志攻读硕士学位的同学“平战结合”，了解考研试题的特点及其逐年发展趋势，从知识上，题型上，方法和技巧上作好应试准备，做到心中有数，这些考题并非都是难题，其突出特点是全面、准确地体现教学大纲的要求。不少试题的原型就是“概率论与数理统计”中的习题。多做考题，并由此总结、归纳解题规律、方法和技巧，无疑对于启迪思维，开发智力，提高能力及加深经济数学（概率论与数理统计）的理解都是大有好处的。

考虑到经济类和其他文科学生和自学者学习经济数学（概率论与数理统计）的困难，编写此书时，在选材、理论推导、文字叙述等诸多方面尽量适应其特点。此外，还在不少例后加写注意部分，以总结解题经验，避免常犯错误。

本书可供全日制大专院校、电大、职大、函大、夜大等广大学生学习经济数学（概率论与数理统计）时阅读和参考；对于自学者和有志攻读硕士研究生的青年，本书更是良师益友；对于从事经济数学（概率论与数理统计）教学的教师也有一定的参考价值。

鉴于目前有关读物尚缺，适用于理工科学生阅读的参考读物，文科学生阅读多有不便。作者使用多年来在教学过程中所积累的资料，汇集自1987年至1999年以来数学试卷四、五和数学试卷三、四的绝大部分考题和其他试卷的部分考题，编写成这本书，为推进我国高校数学教学改革尽微薄之力。希望它能激起在校和自

修的广大青年学习经济数学（概率论与数理统计）的兴趣，这是作者最大的心愿。

在本书的编写过程中，成习同志协助抄写了部分书稿，并与雨耳同志共同绘制了全部插图，特此致谢。

编写本书时，参阅了有关书籍，引用了一些例子，恕不一一指明出处，在此一并向有关作者致谢。

限于作者水平，书中不当之处在所难免，敬请读者不吝赐教！

毛纲源

1999年1月于武汉工业大学

目 录

第一章 随机事件与古典概率的直接计算	(1)
§ 1.1 用简单事件通过运算表示复合事件	(1)
§ 1.2 事件间的关系及其运算性质的简单应用	(10)
§ 1.3 加法原理和乘法原理在排列组合及古典概率计算中的 应用	(17)
§ 1.4 古典概型——摸球模型的计算	(24)
§ 1.5 古典概型——质点入盒模型的计算	(36)
§ 1.6 古典概型——随机取数模型的计算	(42)
第二章 古典概率的间接计算	(48)
§ 2.1 与对立事件有关的事件的概率算法	(48)
§ 2.2 与差事件有关的事件的概率算法	(53)
§ 2.3 与包含关系有关的事件的概率算法	(55)
§ 2.4 事件和的概率算法	(60)
§ 2.5 条件概率的算法	(68)
§ 2.6 应用乘法公式计算概率的几种情况	(74)
§ 2.7 如何正确理解事件的独立性	(79)
§ 2.8 事件独立性在概率计算和证明中的应用	(85)
§ 2.9 独立试验序列概型的计算	(92)
§ 2.10 使用全概公式和贝叶斯公式, 寻找完备事件组的两个 常用方法	(100)
§ 2.11 加法公式和乘法公式的综合应用	(108)
§ 2.12 抽签原理的证明及其应用	(117)
第三章 随机变量及其分布	(123)
§ 3.1 离散型随机变量的分布列的求法	(123)
§ 3.2 离散型随机变量分布列的应用	(129)
§ 3.3 连续型随机变量分布的确定、判别及其求法	(137)
§ 3.4 随机变量函数分布的求法	(148)

§ 3.5	连续型随机变量在区间内取值的概率算法	(157)
§ 3.6	与随机变量的分布有关的几类证明题	(167)
第四章	随机变量的数字特征	(177)
§ 4.1	离散型随机变量的数学期望与方差的求法	(177)
§ 4.2	连续型随机变量的数学期望与方差的求法	(185)
§ 4.3	随机变量函数的数学期望与方差的求法	(195)
§ 4.4	数学期望与方差的应用题的常用解法	(204)
第五章	几类重要分布的应用	(217)
§ 5.1	二项分布的应用	(217)
§ 5.2	泊松分布的应用	(224)
§ 5.3	指数分布的应用	(233)
§ 5.4	正态分布的应用	(240)
第六章	二维随机变量及其分布	(250)
§ 6.1	求离散型随机变量的联合概率分布应注意的几个问题	(250)
§ 6.2	边缘分布的求法	(259)
§ 6.3	利用二维概率分布求二维随机变量落入平面区域的概 率的方法	(269)
§ 6.4	二维连续型随机变量分布函数的求法	(274)
§ 6.5	二维离散型随机变量独立性的判别及其应用	(283)
§ 6.6	二维连续型随机变量独立性的判别方法	(292)
§ 6.7	两随机变量之和的概率分布的求法	(299)
§ 6.8	二维随机变量的最大值与最小值分布的求法	(308)
§ 6.9	二维随机变量的数学期望和方差的求法	(315)
§ 6.10	协方差与相关系数的计算方法	(323)
§ 6.11	如何掌握二维均匀分布与二维正态分布	(333)
第七章	大数定律和中心极限定理	(349)
§ 7.1	一类与期望或方差有关的概率不等式的证法	(349)
§ 7.2	切比雪夫不等式的两点应用	(354)
§ 7.3	德莫佛-拉普拉斯中心极限定理的应用	(362)
§ 7.4	列维-林德伯格中心极限定理的应用	(373)

第八章 抽样分布	(382)
§ 8.1 样本均值的分布及其应用	(383)
§ 8.2 χ^2 分布及其应用	(389)
§ 8.3 t 分布及其应用	(399)
§ 8.4 F 分布及其应用	(404)
第九章 参数估计	(411)
§ 9.1 矩估计法和极大似然估计法	(411)
§ 9.2 验证估计量无偏性的常用方法	(424)
§ 9.3 正态总体参数的区间估计	(431)
第十章 假设检验	(443)
§ 10.1 小概率原理应用举例	(443)
§ 10.2 单个正态总体均值与方差的假设检验	(447)
§ 10.3 两个正态总体均值与方差的假设检验	(465)
习题答案或提示	(478)
附录 (人大版“概率论与数理统计”(修订本)部分习题 解答查找表)	(507)

第一章 随机事件与古典概率的直接计算

§ 1.1 用简单事件通过运算表示复合事件

在实际问题中随机事件多种多样,有的简单,有的复杂.一些比较复杂的事件往往可由简单事件通过运算表示,常称这些事件为复合事件.

现将用简单事件通过运算表示复合事件的常用方法叙述于下.

法一 将复合事件通过运算用其等价事件表示

这些事件常用“恰有”,“只有”,“至多”,“至少”,“都发生”,“都不发生”,“不都发生”等词语描述,要弄清这些概念的含义.

例 1 某工程队承包建造 3 幢楼房,设事件

$$A_i = \{\text{第 } i \text{ 幢楼房经验收合格}\} (i=1, 2, 3).$$

试用 A_1, A_2, A_3 表示下列事件:

$$(1) B_1 = \{\text{只有第 1 幢楼房合格}\};$$

$$(2) B_2 = \{\text{恰有一幢楼房合格}\};$$

$$(3) B_3 = \{\text{至多有 1 幢楼房合格}\}.$$

解 易知事件 $\bar{A}_i = \{\text{第 } i \text{ 幢楼房经验收不合格}\} (i=1, 2, 3).$

(1) 只有第 1 幢楼房合格,其含义是第 1 幢楼房合格,但第 2, 3 幢楼房不合格,因此事件 B_1 与 $A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$ 等价,故

$$B_1 = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3.$$

(2) 恰有一幢楼合格,并没有指明究竟是哪一幢楼房合格,因此可能是第 1 幢,第 2 幢,第 3 幢楼房合格,而其余两幢都不合格,

所以

$$B_2 = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3.$$

(3) $B_3 = \{\text{至多有 1 幢楼房合格}\}$ 与下列两个互不相容的事件的和等价: $\{\text{恰有 1 幢楼房合格}\}$ 与 $\{\text{3 幢楼房全不合格}\}$, 因此所求事件 B_3 可表示成

$$B_3 = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3.$$

例 2 设 A, B, C 为三个随机事件, 试用 A, B, C 的运算关系表示事件 $M = \{A, B, C \text{ 中至少有一个发生}\}$.

解法一 $M = \{\text{三个事件至少有一发生}\} = A + B + C.$

解法二 $M = \{\text{三个事件都发生}\} + \{\text{两个事件发生, 另一个事件不发生}\} + \{\text{一事件发生, 另外两个事件不发生}\}$

$$= ABC + (AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC) + (A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C).$$

解法三 M 的对立事件为 $\{A, B, C \text{ 三个事件都不发生}\}$ (参阅例 10 后面的注意), 故 $M = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$. 显然有

$$\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} = \overline{\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}} = A + B + C.$$

解法四 M 与事件 $\{A, B, C \text{ 中至多有两个事件不发生}\}$ 等价 (参阅例 10 后面的注意), 而这等价事件又可分解为解法二中三事件之和, 于是从另一角度又得到解法二的表示式.

注意 (1) 求一个事件的表示式时, 由于思路不同, 得到的表示式可能不同, 但只要思路正确, 得到的不同表示式必然相等 (见 § 1.2 例 5).

(2) 表示式 $M = A + B + C$ 虽然简单, 但它是相容事件 A, B, C 之和, 后面将看到相容事件之和的求概公式是复杂的. 而表示式

$$M = ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C.$$

虽然复杂, 但它是互不相容事件之和, 其求概公式是简单的, 有时为了求相容事件之和的概率常先把它化成互不相容事件之和.

例 3[补 1]* 某工厂每天分三班生产,事件 A_i 表示第 i 班超额完成生产任务($i=1,2,3$),则至少有两个班超额完成任务可以表示为().

$$(a) A_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 \quad (b) A_1 A_2 + A_1 A_3 + A_2 A_3$$

$$(c) A_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + A_1 A_2 A_3$$

$$(d) \overline{A_1 A_2 + \bar{A}_1 A_3 + \bar{A}_2 A_3}$$

解 (a)表示恰有两个班超额完成任务,不能入选.

设 $M_1 = \{\text{至少有两个班超额完成任务}\}$, 则

$$M_1 = \{\text{至少有两个班超额完成任务}\} + \{\text{三班都超额完成任务}\}$$

$$= A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_1 + A_1 A_2 A_3$$

$$= A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_1 \quad (\text{因 } A_1 A_2 A_3 \subseteq A_1 A_2),$$

$$M_1 = \{\text{恰(只)有两个班超额完成任务}\} + \{\text{三班都超额完成任务}\}$$

$$= A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3.$$

设 $M_2 = \{\text{至少有两班未超额完成任务}\}$

$$= \bar{A}_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_3 \bar{A}_1, \text{ 则}$$

$$M_1 = \overline{M_2} = \overline{\bar{A}_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_3 \bar{A}_1}, \bar{M}_1 = \bar{A}_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_3 \bar{A}_1,$$

即 $\{\text{至少有两班超额完成任务}\}$ 的对立(逆)事件是 $\{\text{至少有两班未超额完成任务}\}$ (参阅例 10 中注意), (d)入选. 综上所述(b), (c), (d)入选.

法二 利用差化积、对偶律及和对积的分配律等运算求之

这些复合事件常与差事件、对立事件有关. 为求其表示式, 除注意利用和事件, 积事件, 差事件, 互不相容事件, 对立事件的一些基本运算规律外, 特别要注意和对积的分配律、差化积及对偶律(摩根律)的应用(它们常用于与逆事件有关的命题).

例 4[补 4] 关系()成立, 则事件 A 与 B 为对立事件.

* [补 1]表示该例(或该习题)是中国人民大学出版社出版的“概率论与数理统计”(修订本)补充习题第 1 题. 下同.

$$(a) AB = \emptyset$$

$$(b) A + B = \Omega$$

$$(c) AB = \emptyset, A + B = \Omega$$

$$(d) \bar{A} \text{ 与 } \bar{B} \text{ 为对立事件}$$

解 由对立事件的定义知, (c) 入选. 对 (c) 中两事件, 求其逆事件, 有

$$\begin{cases} A+B=\Omega; \\ AB=\emptyset \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+\bar{B}=\Omega; \\ \overline{AB}=\overline{\emptyset}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{A} \cdot \bar{B}=\emptyset; \\ \bar{A}+\bar{B}=\Omega, \end{cases} \Leftrightarrow \bar{A}, \bar{B} \text{ 为对立事件,}$$

故 (c), (d) 入选.

注意 上例证明了如果 A, B 为对立事件, 则其逆事件 $\bar{A}, \bar{B}$ 也是对立事件. 反之, 也成立.

例 5[补 2] 射击 3 次, 事件 A_i 表示第 i 次命中目标 ($i=1, 2, 3$), 则事件 () 表示至少命中一次.

$$(a) A_1 + A_2 + A_3$$

$$(b) A_1 + (A_2 - A_1) + [(A_3 - A_2) - A_1]$$

$$(c) \Omega - \bar{A} \bar{B} \bar{C}$$

$$(d) A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3.$$

解 因 (d) 中事件的表示式仅表示恰有一次命中目标的事件, 故 (d) 不能入选. 又 (a) 显然入选. 因

$$\begin{aligned} \Omega - \bar{A} \bar{B} \bar{C} &= \Omega - \overline{A+B+C} = \Omega(\overline{A+B+C}) \\ &= \Omega(A+B+C) = A+B+C, \end{aligned}$$

故 (c) 也入选. 利用差化积及和对积的分配律 [(1.2.1) 式] 得到

$$\begin{aligned} A_1 + (A_2 - A_1) + [(A_3 - A_2) - A_1] &= A_1 + A_2 \bar{A}_1 + (A_3 \bar{A}_2) \bar{A}_1 \\ &= (A_1 + A_2)(A_1 + \bar{A}_1) + (A_3 \bar{A}_2) \bar{A}_1 = A_1 + A_2 + (A_3 \bar{A}_2) \bar{A}_1 \\ &= A_2 + [A_1 + (A_3 \bar{A}_2) \bar{A}_1] = A_2 + (A_1 + A_3 \bar{A}_2)(\bar{A}_1 + A_1) \\ &= A_1 + A_2 + A_3 \bar{A}_2 = A_1 + (A_2 + A_3)(A_2 + \bar{A}_2) \\ &= A_1 + A_2 + A_3. \end{aligned}$$

上式也可用文氏图证之, 故 (b) 也入选, 因而 (a), (b), (c) 均入选.

例 6[1989 年 4]*[选择题] 以 A 表示事件“甲种产品畅销,

* 表示该例(或该习题)是 1989 年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试卷 4 的考题. 下同.

乙种产品滞销”，则其对立事件 $\bar{A}$ 为_____.

(A)“甲种产品滞销，乙种产品畅销”

(B)“甲乙两种产品均畅销”

(C)“甲种产品滞销”

(D)“甲种产品滞销，或乙种产品畅销”

解 设甲，乙两种产品畅销的事件分别为 B, C ，则 $A = B\bar{C}$ ，由摩根律易得到：

$$\bar{A} = \overline{B\bar{C}} = \bar{B} + \bar{\bar{C}} = \bar{B} + C,$$

故 A 的对立事件为甲种产品滞销，或乙种产品畅销，(D)入选.

例 7 设 $\Omega = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, $A = \{x | 1/2 < x \leq 1\}$, $B = \{x | 1/4 \leq x < 3/2\}$ ，具体写出下列各事件：

(1) $\bar{A}B$; (2) $\bar{A} + B$; (3) $\overline{\bar{A}\bar{B}}$; (4) $\overline{AB}$; (5) $\overline{A+B}$.

解(1)因 $\bar{A} = \Omega - A = \{x | 0 \leq x \leq 1/2\} + \{x | 1 < x \leq 2\}$ ，故

$$\bar{A}B = \{x | 1/4 \leq x \leq 1/2\} + \{x | 1 < x < 3/2\}.$$

(2)因 $\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B} = A\bar{B}$ ，而 $A \subset B$, $B \cdot \bar{B} = \emptyset$ ，故 $A\bar{B} = \emptyset$ ，从而 $\overline{A+B} = \emptyset$ ，故 $\bar{A} + B = \overline{\emptyset} = \Omega = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$.

(3) $\overline{\bar{A}\bar{B}} = A + B = B$ (因 $A \subset B$) = $\{x | 1/4 \leq x < 3/2\}$

(4)因 $A \subset B$, $AB = A$ ，故 $\overline{AB} = \bar{A}$.

(5)解法一因 $A \subset B$ ，故 $A + B = B$ ，所以 $\overline{A+B} = \bar{B}$ ；

解法二 $\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B}$ 且因 $A \subset B$, $\bar{B} \subset \bar{A}$ ，故

$$\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B} = \bar{B} = \{x | 0 \leq x < 1/4\} + \{x | 3/2 \leq x \leq 2\}.$$

法三 用图示法求之

将有关事件用文氏图或其他的几何图形表示，借助这些图形求出所叙事件的表示式.

为了直观，一般用平面上某个方形(或矩形)区域表示必然事件 Ω ，该区域内的一个子区域就表示一个事件，这种表示事件及其运算关系的示意图称为文氏图.

例 8 设试验是让点随机地落在矩形区域内，事件 A 表示是

落在左边的圆内[图 1.1.1(a)],事件 B 表示落在右边的圆内[图 1.1.1(b)],试作图说明事件 $A+B$, AB , $\bar{A}$, $\bar{B}$, $A\bar{B}$, $\bar{A}B$ 及 $\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B}$ 分别表示什么?

解 如图 1.1.1 所示:

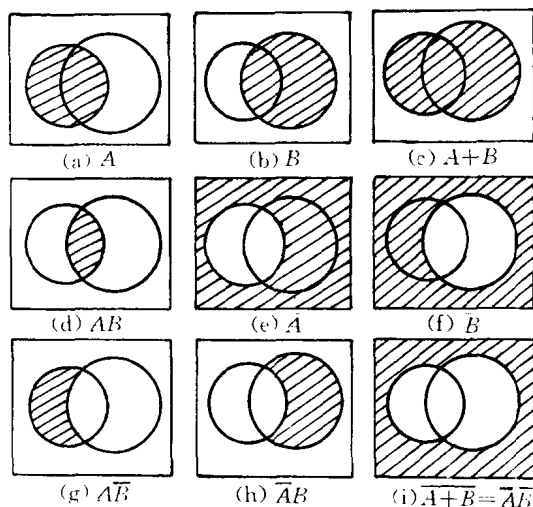


图 1.1.1

事件 $A+B$ 表示随机点落在任一圆内[图 1.1.1(c)];

事件 AB 表示随机点落在两圆的公共部分内[图 1.1.1(d)];

事件 $\bar{A}$ 表示随机点落在左圆之外[图 1.1.1(e)];

事件 $\bar{B}$ 表示随机点落在右圆之外[图 1.1.1(f)];

事件 $A\bar{B}$ 表示随机点落在左圆之内,但在右圆之外[图 1.1.1(g)];

事件 $\bar{A}B$ 表示随机点落在右圆之内,但在左圆之外[图 1.1.1(h)];

事件 $\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B}$ 表示随机点落在两圆之外的区域[图 1.1.1(i)].

例 9 对飞机进行两次射击,每次射一弹,设事件

$A = \{\text{第一次射击击中飞机}\}$, $B = \{\text{第二次射击击中飞机}\}$.

试表示下列各事件：

$C = \{\text{两弹都击中飞机}\}; \quad D = \{\text{两弹都没击中飞机}\};$
 $E = \{\text{恰有一弹击中飞机}\}; \quad F = \{\text{至少有一弹击中飞机}\}.$

并指出(1) C, D, E, F 中哪些是互不相容的事件;(2)哪些是对立的事件?

解 由题意得到

$$C = AB, \quad D = \bar{A}\bar{B},$$

$$E = A\bar{B} + \bar{A}B, \quad F = A + B.$$

(1) 由图 1.1.2 (参阅图

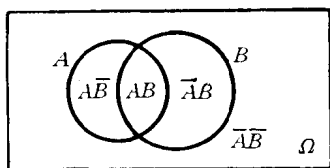


图 1.1.2

1.1.1) 易看出, 集合 $AB, A\bar{B} + \bar{A}B, \bar{A}\bar{B}$ 两两不相交, 因而事件 $C,$

D, E 两两互不相容. 事实上易证 $CD = CE = DE = \emptyset$ (自行补证).

(2) D 与 F 为对立事件, 事实上

$$\begin{aligned} DF &= \bar{A}\bar{B}(A+B) = \bar{A}\bar{B}A + \bar{A}\bar{B}B = (\bar{A}A)\bar{B} + \bar{A}(\bar{B}B) \\ &= \emptyset \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \emptyset = \emptyset + \emptyset = \emptyset, \\ D+F &= \bar{A}\bar{B} + A+B = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}B + A+B \\ &= (\bar{A}B \subseteq B, \text{故 } \bar{A}B + B = B) \\ &= \bar{A}(\bar{B}+B) + A+B = \bar{A}\Omega + A+B = \bar{A} + A+B \\ &= \Omega + B = \Omega (B \subseteq \Omega), \end{aligned}$$

故 D 与 F 为一完备事件组, 即 D 与 F 为对立事件. 解毕

值得注意的是 C, D, E 三事件仅是两两互不相容. 它们中没有对立事件, 这是因为两个互不相容事件在一次试验中仅仅是不能同时发生, 并不能排除它们同时都不发生的可能性, 而当 C, D, E 三事件中任一事件 (例如 E) 发生时, 其余两事件 (例如 C 和 D) 都可以不发生.

而两个对立事件, 它们在一次试验中不仅不能同时发生, 而且也不可能同时不发生, 即两个对立事件在一次试验中不但仅能发生其中之一, 而且也必然发生其中之一. 因而 C, D, E 中任意两事件仅是两两互不相容事件, 其中没有对立事件. D 与 F 却不同,