

化学工程手册

《化学工程手册》编辑委员会

第 4 篇

流 体 流 动



化学工业出版社

化 学 工 程 手 册

第 4 篇

流 体 流 动

《化学工程手册》编辑委员会

化 学 工 业 出 版 社

本书是《化学工程手册》第4篇。全书共分4章,第1章为流体流动的基本原理;第2章主要讲述阻力计算和管路计算;第3章介绍多相流体的管道流动;第4章是在前3章的基础上,介绍非牛顿型流体的特性与类型以及流动状况。

本书可供化工、石油、石油化工、轻工、食品等工业的科研、设计、工厂技术人员使用,也可作为有关高等院校师生的参考书。

化 学 工 程 手 册

第 4 篇

流 体 流 动

编写人 周肇义 成都科技大学
陈书鑫 成都科技大学
刘静芳 化工部第八设计院
审校人 张洪沅 成都科技大学

责任编辑: 苗延秀

封面设计: 季玉芳

化学工业出版社出版发行

(北京朝内大街七十六号)

化学工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所经销

开本787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张 11 $\frac{3}{4}$ 字数 288千字 印数 1—10,470

1987年12月北京第1版1987年12月北京第1次印刷

统一书号15053·4046 定价 2.45 元

前 言

化学工程是研究化工类型生产过程共性规律的一门技术科学，是化工类型生产重要的技术和理论基础。化学工程学科的内容主要包括：传递过程原理及化工单元操作；化学反应工程；化工热力学及化工基础数据；化工系统工程学等。研究和掌握化学工程，对于提高化工生产效率和经济效益，加速新技术的开发，提高科研、设计和生产技术水平，有着十分重要的作用。因此，对化学工业来说，化学工程是涉及提高技术水平的主要环节之一。

建国以来，我国的化学工程技术工作逐步发展，已经初步具有一定的基础，并取得了一定的成果。但是，目前国内还缺少一套较为完整实用的化学工程参考资料。编辑出版一套适合国内需要的，具有一定水平的《化学工程手册》，是化工技术工作者多年来的宿愿。早在五十和六十年代，国内的化学工程专家就曾酝酿和筹备组织编写《化学工程手册》，一九七五年化学工程设计技术中心站又曾组织讨论过编写计划。今天，在党中央提出加快实现四个现代化宏伟目标的鼓舞下，在化学工业部和中国化工学会的领导下，于一九七八年正式组成《化学工程手册》编委会，经过化工界许多同志的共同努力，《化学工程手册》终于与广大读者见面了。

希望这部手册的出版，将有助于国内的化工技术人员在工作中掌握和运用化学工程的科学技术原理，更好地处理和解决设计、科研和生产中遇到的化工技术问题。

本手册是一本通用性的工作手册。内容以实用为主，兼顾理论；读者对象为具有一定化工专业基础知识的工程技术人员和教学人员；内容取材注意了结合国内的情况和需要，并反映国内工作已取得的成果；对于国外有关的技术及数据，也尽量予以吸收。

根据当前国内的实际情况，计量单位一律采用“米-公斤(力)-秒”工程制(MKfS制)。但是考虑到我国将逐步过渡到采用国际单位制(SI)，除了在第一篇中列出详细的单位换算表外，并在每篇之末加列简明的MKfS制-SI换算表。

参加本手册编写工作的，有全国各有关的设计、科研和高等院校等共二十多个单位，近二百人。此外，还有其它许多单位和人员提供资料或间接参与手册的有关工作。《化学工程手册》编辑委员会负责指导手册工作的开展，研究和确定编审工作中一些原则问题，并负责书稿的最后审定工作。手册编写的日常组织工作，由化工部化学工程设计技术中心站负责。

本手册系按篇分册陆续出版，今后还将定期修订再版并出版合订本。希望广大读者对本手册提出宝贵意见，以便再版时改进。

《化学工程手册》编辑委员会

《化学工程手册》编辑委员会成员

主任

冯伯华 化学工业部

副主任

陈自新 化学工业部橡胶司

苏元复 华东化工学院

汪家鼎 清华大学

李步年 陕西省化工设计院

蔡剑秋 化学工业出版社

委员

卢焕章 中国寰球化学工程公司

区灿棋 中国石油化工总公司

邓颂九 华南工学院

朱亚杰 华东石油学院

朱自强 浙江大学

余国琮 天津大学

时 钧 南京化工学院

沈 复 华东石油学院

吴锡军 南京化学工业公司化工研究院

林纪方 大连工学院

杨友麒 化学工业部计算中心

张洪沅 成都科技大学

张剑秋 北京燕山石油化工公司研究院

郑 炽 上海医药设计院

郭慕孙 中国科学院化工冶金研究所

傅举孚 北京化工学院

萧成基 化学工业部北京化工研究院

第4篇《流体流动》编写人员

编写人

周肇义 成都科技大学

陈书鑫 成都科技大学

刘静芳 化工部第八设计院

审校人

张洪沅 成都科技大学

《化学工程手册》总篇目

1. 化工基础数据
2. 化工应用数学
3. 化工热力学
4. 流体流动
5. 搅拌及混合
6. 流体输送机械及驱动装置
7. 传热
8. 传热设备及工业炉
9. 蒸发及结晶
10. 传质
11. 蒸馏
12. 气体吸收
13. 气液传质设备
14. 萃取及浸取
15. 增湿与减湿
16. 干燥
17. 吸附及离子交换
18. 薄膜过程
19. 颗粒及颗粒系统
20. 流态化
21. 气态非均一系分离
22. 液固分离
23. 粉碎、分级及团聚
24. 化学反应工程
25. 化工自动控制
26. 化工系统工程

目 录

4.1 流体流动的基本原理1	(1) 过渡流动.....49
4.1.1 流体流动的基本微分方程 2	(2) 分子流动.....50
(1) 连续性方程..... 2	(3) 各种气体的流导关系.....52
(2) 以速度梯度表示的粘性流体的运动方程 (奈维-斯托克斯方程) 2	(4) 管件及阀门的流导.....52
(3) 以应力 τ 表示的奈维-斯托克斯方程..... 4	(5) 压力降计算 (适用于空气或蒸汽)52
(4) 粘性流体运动方程式的解..... 6	4.2.6 明渠流动56
4.1.2 层流流动 9	(1) 流速.....56
(1) 稳定流动时圆直管的层流理论解..... 9	(2) 压力降.....57
(2) 充分发展了的稳定层流流过其他形状断面管道的流速分布、流量与压降的关系..... 9	(3) 堰.....58
4.1.3 湍流流动10	符号表.....58
(1) 圆管内湍流流动的速度分布.....10	参考文献.....59
(2) 环隙中湍流流动的速度分布.....12	4.3 多相流体的管道流动60
(3) 层流底层厚度 δ_L13	4.3.1 气-液两相流动的一些基本概念.....60
4.1.4 边界层流动13	(1) 气-液两相流动的持料量..... 60
(1) 流体沿平壁的层流和湍流边界层解.....13	(2) 气-液两相流动的机械能量衡算式.....62
(2) 流体流过各种形状物体的曳力系数14	4.3.2 气液两相在水平管内的流动..... 63
4.1.5 总能量衡算式和机械能量衡算式18	(1) 气液两相在水平管内的流动型态及其判定.....63
(1) 总能量衡算式.....18	(2) 气液两相在水平管内的持料量.....68
(2) 机械能量衡算式.....18	(3) 气液两相在水平管内流动的压力降.....74
4.1.6 动量衡算及其应用19	(4) 推荐用于水平管气液两相流动的设计关联式.....85
参考文献.....20	4.3.3 气液两相在垂直管内的流动86
符号表.....20	(1) 气液两相在垂直管内的流动型态及其判定.....86
4.2 阻力计算和管路计算 22	(2) 气液两相在垂直管内并流流动时的持料量.....89
4.2.1 管子及管件22	(3) 气液两相在垂直管内向上流动时的摩擦损失和压力降.....90
(1) 金属管子及管件.....22	(4) 推荐用于垂直管内两相向上流动的设计关联式..... 102
(2) 非金属管子及管件.....25	4.3.4 气固和液固两相管道流动的一些基本概念 103
4.2.2 管路阻力计算26	(1) 气力输送和水力输送的应用..... 103
(1) 圆直管阻力26	(2) 管道中固体流体两相混合物的状态..... 104
(2) 局部阻力.....32	(3) 气力输送的流动状态..... 105
(3) 蛇管阻力.....35	(4) 压力降梯度..... 106
(4) 非圆形截面管道阻力.....35	4.3.5 气固和液固两相在垂直管内的流动..... 107
(5) 非定温流动阻力.....37	(1) 流动型态..... 107
4.2.3 管路计算38	(2) 垂直管内的最小输送流速..... 108
(1) 简单管路.....38	(3) 垂直管压降的关联..... 110
(2) 并联管路.....40	4.3.6 气固和液固两相在水平管内的流动 116
(3) 沿途均匀流出的管路.....42	(1) 流动型态..... 116
4.2.4 气体的流动43	(2) 水平管内的最小输送流速, u_{m2}116
(1) 水平管内的等温流动.....43	
(2) 水平管内的绝热流动.....44	
(3) 高压下的流动.....44	
(4) 可压缩流体在变截面管中的流动.....46	
4.2.5 低压下的流动48	

(3) 对称悬浮流速 u_{mj} 的关联	119	阻力压降	152
(4) 水平管压降的关联	120	(2) 假塑性流体的摩擦阻力压降	156
符号表	131	(3) 屈服-假塑性流体的摩擦阻力压降	158
参考文献	132	(4) 粘弹性流体的摩擦阻力压降	159
4.4 非牛顿流体的流动	135	(5) Metzmer和Reed通用摩擦阻力压降 算法	159
4.4.1 非牛顿流体的定义和分类	135	4.4.8 非牛顿流体从层流到湍流的过渡	161
4.4.2 非牛顿流体的若干实例和对其流动 特性的物理解释	136	(1) 指数方模型假塑性流体的过渡	161
(1) 假塑性流体	136	(2) 宾哈姆流体的过渡	161
(2) 宾哈姆塑性流体	137	(3) 粘弹性流体的过渡	162
(3) 胀塑性流体	137	4.4.9 非牛顿流体湍流时的摩擦阻力压降	162
(4) 与时间有关的非牛顿流体	137	(1) 指数方假塑性流体	162
4.4.3 与时间无关的非牛顿流体的流变方程	138	(2) 宾哈姆流体摩擦损失压降	163
(1) 宾哈姆塑性流体的流变方程	138	(3) 屈服-假塑性流体	164
(2) 假塑性流体和胀塑性流体的流变方程	139	4.4.10 局部阻力损失	167
(3) 屈服-假塑性流体的流变方程	141	4.4.11 粘弹性流体的摩擦损失压降和减阻现 象	168
(4) 圆管流动的普遍流变方程	141	4.4.12 纤维性物料悬浮液的流动	170
4.4.4 与时间有关的非牛顿流体的流变方程	142	4.4.13 流动进口段	171
4.4.5 流变参数	143	(1) 层流流动时的进口段长度和摩擦阻力 压降	171
(1) 宾哈姆塑性流体	143	(2) 湍流流动时进口段的长度	173
(2) 假塑性流体	146	4.4.14 建议的设计步骤	173
(3) 管流稠度系数 K' 和管流流动行为 指数 n'	148	(1) 总压强降的计算	173
4.4.6 流变参数的实验测定	149	(2) 圆管摩擦阻力压降的计算	174
(1) 粘度测量计	149	(3) Lord放大法	175
(2) 流变参数的确定	149	符号表	176
(3) 流体的性质是否与时间有关的判定	151	参考文献	177
4.4.7 与时间无关的非牛顿流体在圆管内稳定 层流时,摩擦阻力压降的计算	152	附录 MKS制和SI制的换算表	178
(1) 宾哈姆流体的速度分布和摩擦阻			

4.1 流体流动的基本原理

真实流体根据其剪应力 τ 与流场中的速度梯度 $\frac{dv}{dy}$ (也称为变形速率或剪切速率) 之间的关系, 可以分为牛顿型流体与非牛顿型流体。

牛顿型流体其剪应力与速度梯度之间存在着如下关系

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad (1-1)$$

剪应力与速度梯度之间不服从牛顿粘滞定律 [式(1-1)] 的流体称为非牛顿型流体。

关于非牛顿型流体将在本篇4.4章中介绍, 本章内容是以牛顿流体为对象介绍流体力学的基本原理。

稳定流动与不稳定流动也称为定常流动与不定常流动。

流体的稳定流动是指流体流动时其速度与压力只是流体质点所处位置的函数而与时间无关, 又称为定常流动。

在数学上表示这种流动的特性是:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (1-2)$$

流体的不稳定流动是指流体流动时其速度和压力有一个或全部不仅是坐标值的函数而且也是时间的函数。在数学上表示这种流动特性是:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} \neq 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} \neq 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} \neq 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} \neq 0 \quad (1-3)$$

断面平均流速 u :

断面平均流速 u 是假定在流体经过的有效断面上所有各点的流速都相同, 按照这个速度 u 计算出的流量与按沿断面的实际速度分布计算出来的流量相等。根据这个定义:

$$\text{流量} \quad Q = \int_A v dA = u \int_A dA = uA \quad (1-4)$$

$$\text{因此} \quad u = \frac{Q}{A} \quad (1-5)$$

式中 A ——有效断面积, m^2

u ——断面平均流速, m/s

v ——局部流速, m/s

Q ——体积流量, m^3/s

时间平均流速 $\bar{v}$:

在湍流运动中, 由于流体质点的紊动互混, 如果在湍流场中某一固定点上测量其瞬时局部流速 v 随时间而变化的图形见图1-1

在流场中某一固定点上瞬时局部流速随时间

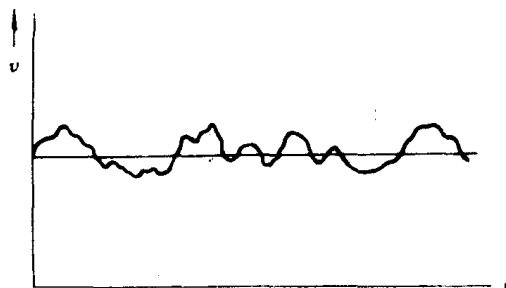


图 1-1

而无规则的变动称为脉动。由图1-1可见,这种脉动在某一时间间隔内总是围绕某一平均值而上下波动的,这个平均值称为时平均流速 $\bar{v}$ 。设瞬时流速为 v_i 则时平均流速 $\bar{v}$ 为:

$$\bar{v} = \frac{1}{t} \int_0^t v_i dt \quad (1-6)$$

又

$$v_i = \bar{v} \pm v' \quad (1-7)$$

式中 v' ——脉动速度

但在通常的书写中一般均用 v 表示湍流流动的时平均流速而不必用 $\bar{v}$ 。

4.1.1 流体流动的基本微分方程

(1) 连续性方程

(1.1) 在直角坐标系 (x, y, z) 中, 连续性方程为:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (1-8)$$

式中 v ——局部流速

ρ ——流体的密度

下标 x, y, z ——流速在 x, y, z 轴上的分量

(1.2) 在柱坐标系 (r, θ, z) 中, 连续性方程为:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (1-9)$$

式中 r ——径向坐标

z ——轴向坐标

θ ——方位角

v 的下标 r, z ——流速在柱坐标系 (r, θ, z) 方向上的分量。

(1.3) 在球坐标系 (r, θ, φ) 中, 连续性方程为:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho v_\varphi) = 0 \quad (1-10)$$

式中 v 下标 r, θ, φ ——流速在球坐标系 (r, θ, φ) 方向上的分量

(2) 以速度梯度表示的粘性流体的运动方程 (奈维 斯托克斯方程)

(2.1) 直角坐标系 (x, y, z)

x 分量

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (1-11)$$

y 分量

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (1-12)$$

z 分量

$$\rho \frac{Dv_z}{Dt} = \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (1-13)$$

式中 μ ——流体粘度

X, Y, Z ——分别为单位流体的质量力在 x, y, z 方向上的分量

p ——压力

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

为物质导数或物质微商，其余符号意义与连续性方程相同。

(2.2) 柱坐标系 (r, θ, z)

当流体密度和粘度为常数时，有 r 分量：

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = X_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \\ \frac{\mu}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right\} \end{aligned} \quad (1-14)$$

θ 分量：

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = X_\theta - \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ \frac{\mu}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right\} \end{aligned} \quad (1-15)$$

z 分量：

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = X_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \right. \\ \left. \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (1-16)$$

式中 X_r, X_θ, X_z ——分别为在径向、方位角、轴向方向上单位流体质量力。

(2.3) 球坐标系 (r, θ, φ)

当流体密度和粘度为常数时，有

r 分量：

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} = X_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \\ \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} - \right. \\ \left. \frac{2}{r^2} v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} v_\theta \cos \theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (1-17)$$

θ 分量：

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v^2 \cos \theta}{r} = X_\theta - \\ \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \right. \\ \left. \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (1-18)$$

φ 分量:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi}{r} \cos \theta = X_\varphi - \\ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} \right) + \right. \\ \left. \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (1-19)$$

式中 X_θ 、 X_φ ——分别为在余纬度、方位角方向上单位流体质量力。

(3) 以应力 τ 表示的奈维-斯托克斯方程

流体质点上所受应力 τ_{ij} 的符号意义如图1-2所示

τ_{ij} 等于作用在垂直于 i 轴的表面上 j 方向的应力。例如 τ_{xy} 表示作用在垂直于 x 轴的表面上的 y 方向的应力。

对圆柱或球坐标系统此符号的定义仍然适用。例如 $\tau_{r\theta}$ 表示作用在垂直于 r 轴的表面上, θ 方向的应力。

根据牛顿定律 $\Sigma F = ma$, 可导出流体的运动微分方程即奈维-斯托克斯方程 (Navier-stokes 方程)

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla \cdot \tau - \Delta p + \rho g \quad (1-20)$$

单位体积	作用在单位	作用在单位	作用在单位
质量乘加	体积质点上	体积质点上	体积质点上
速度	的压力	的粘性力	的重力

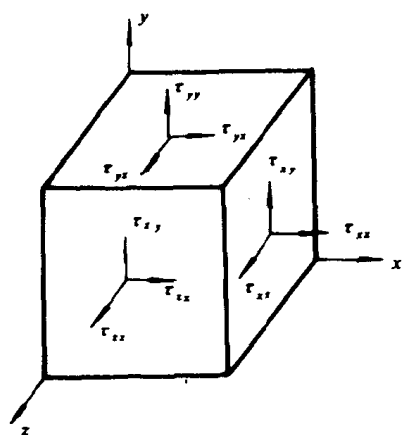


图 1-2

式中 $\frac{D}{Dt}$ ——物质导数 (微商) 或随体导数 (微商)

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (v \cdot \nabla) \quad (1-21)$$

式(1-20)和式(1-21)对直角坐标, 圆柱坐标和球坐标系统均适用。各种坐标系中 $(v \cdot \nabla)$ 和应力 τ 的表达式如下

$(v \cdot \nabla)$:

直角坐标:

$$v \cdot \nabla = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-22)$$

柱坐标:

$$v \cdot \nabla = v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-23)$$

球坐标:

$$v \cdot \nabla = v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (1-24)$$

应力 τ 与速度梯度的关系式

直角坐标:

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot v) \quad (1-25)$$

$$\tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot v) \quad (1-26)$$

$$\tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot v) \quad (1-27)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (1-28)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \quad (1-29)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \quad (1-30)$$

式中 $\nabla \cdot v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$ (1-31)

圆柱坐标 (r, θ, z) :

$$\tau_{rr} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot v) \right] \quad (1-32)$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3}(\nabla \cdot v) \right] \quad (1-33)$$

$$\tau_{zz} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot v) \right] \quad (1-34)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (1-35)$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = -\mu \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right] \quad (1-36)$$

$$\tau_{rz} = \tau_{rz} = -\mu \left[\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] \quad (1-37)$$

式中 $(\nabla \cdot v) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$ (1-38)

球坐标 (r, θ, ϕ)

$$\tau_{rr} = -\mu \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot v) \right] \quad (1-39)$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3}(\nabla \cdot v) \right] \quad (1-40)$$

$$\tau_{\phi\phi} = -\mu \left[2 \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) - \frac{2}{3}(\nabla \cdot v) \right] \quad (1-41)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (1-42)$$

$$\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} = -\mu \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \quad (1-43)$$

$$\tau_{r\phi} = \tau_{\phi r} = -\mu \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) \right] \quad (1-44)$$

$$(\nabla \cdot v) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \quad (1-45)$$

若将式(1-25)到(1-45)代入式(1-20)即可求得以速度梯度表示的奈维-斯托克斯方程。以直角坐标为例:

将式(1-20)表示为 x, y, z 三个分量式并将式(1-25)至式(1-30)代入得到

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_x}{Dt} = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot v) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] + \rho X \end{aligned} \quad (1-46)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_y}{Dt} = & -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot v) \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right] + \rho Y \end{aligned} \quad (1-47)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_z}{Dt} = & -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left[2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot v) \right] + \rho Z \end{aligned} \quad (1-48)$$

式(1-46)至式(1-48)经整理后得到以速度梯度表示的奈维-斯托克斯方程(1-11)到(1-13)

当流体的密度 ρ 和粘度 μ 为常数时,根据连续性方程有 $(\nabla \cdot v) = 0$ 于是式(1-20)变为

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 v + \rho g \quad (1-49)$$

将此式代入各种坐标系的拉普拉斯算子(Laplacian Operator) ∇^2 即可得到密度 ρ 和粘度 μ 为常数时的奈维-斯托克斯方程。例如对圆柱坐标

$$(\nabla^2 \cdot v)_r = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \quad (1-50)$$

$$(\nabla^2 \cdot v)_\theta = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \quad (1-51)$$

$$(\nabla^2 \cdot v)_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \quad (1-52)$$

将式(1-50)至式(1-52)代入式(1-49)即可得到以速度梯度表示的柱坐标奈维-斯托克斯方程式(1-13)到式(1-16)。

(4) 粘性流体运动方程式的解

奈维-斯托克斯方程是流体力学的一个最重要和最基本的方程,与连续性方程和状态方程一起,完全描述了流体的层流流动,将它加以适当修正,也可以用来描述湍流流动。由于普遍形式的奈维-斯托克斯方程是一组非线性偏微分方程,目前不能求得分析解。但是,对于某些工程应用问题,可根据不同的具体情况,分别处理。例如:

① 如果方程中的某些项相对于其它项可以略去不计,可以使方程式简化而求出其近

似解。例如，对于雷诺数小于1的极慢流动，惯性力相对于粘性力来讲，可以略去不计。这时运动方程式中所有惯性力项如 $\rho \frac{Dv}{Dt}$ 可以略去，方程的求解就简单多了。又例如，雷诺数很大的流动，惯性力远远超过粘滞力的影响，而使得粘滞力可以忽略不计，方程中有关粘滞力的项可以略去，方程可以简化为理想流体的欧拉方程；

② 在某些特定情况下，方程组中的若干项将等于零，这时方程式可以大大简化。例如，流体在水平管内的稳定层流流动，可以求得精确解；

③ 对雷诺数很大的流体绕物体的流动，可以把流体分为两个区域，一个是靠近壁面的、粘性力起显著作用的边界层区域，另一个是惯性力起主要作用而粘性力可以忽略的外流区域。对外流区，可以用欧拉方程、即按理想流体考虑来计算，而对边界层区的流体，则可根据边界层理论、对运动方程式进行若干简化求得其近似解。

下面列出对于上述（a）类情况的解的示例，至于（b）（c）两类情况的解，将分别列在4.1.2和4.1.4两节中。

（1.1）雷诺数非常小的低速流动

雷诺数非常小的低速流动，称为爬流（Creeping Flow）例如细粒在流体中的沉降、或流体绕过一个球体的流动，在 $Re < 1$ 时，可以认为流体流动中粘滞力的作用远远超过惯性力的作用。用奈维-斯托克斯方程来描述爬流流动时，式（1-11）至式（1-13）等式的左端的物质微商 $\frac{Dv}{Dt}$ 都为零，同时由于质量力也是一种惯性力，所以式中表示单位流体质量的质量力的 X ， Y ， Z 等项也从式中消失。当流体为不可压缩流体，连续性方程为

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

于是描述不可压缩流体的爬流流动的微分方程即为：

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (1-53)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \quad (1-54)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (1-55)$$

当具有恒定的粘度 μ 和恒定密度 ρ 的不可压缩流体，以均匀的流速 u_0 流向一半径为 r_0 的球体， u_0 可以视为远离球体的平行流的流速，或为球体通过静止流体的下降流速。可以解得流体对球体所施加的曳力 F_d ^[4]，它由两部分组成：

由压强分布在球体表面所引起的形体曳力为

$$F_{d,f} = 2\pi\mu r_0 u_0 \quad (1-56)$$

由速度分布在球体表面所引起的摩擦曳力为

$$F_{d,s} = 4\pi\mu r_0 u_0 \quad (1-57)$$

于是流体作用于球体的总曳力 $F_d = F_{d,f} + F_{d,s}$

$$F_d = 6\pi\mu r_0 u_0 \quad (1-58)$$

式（1-58）即是为人们所熟知的斯托克斯方程。

（1.2）雷诺数很大的流动

在雷诺数很大时, 惯性力的作用远远超过粘滞力的作用, 这时, 奈维-斯托克斯方程中所有表示粘滞力项均可从方程组中略去, 式 (1-11) 至式 (1-13) 即简化为

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1-59)$$

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (1-60)$$

$$\rho \frac{Dv_z}{Dt} = \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1-61)$$

在这种情况下, 奈维-斯托克斯方程即变换为理想流体的欧拉方程。加上某些特定限制条件, 可解欧拉方程, 现示例如下^[5]:

对于不可压缩的无粘性流体的稳定二维流动, 在忽略体积力时, 可写出欧拉方程如下:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1-62)$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (1-63)$$

对上述方程, 沿流线取坐标, 由于流线方程式为 $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$

将式 (1-62) 和 (1-63) 两端分别乘以 dx , dy 。

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} dy = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad (1-64)$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} dy + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} dy = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy \quad (1-65)$$

从流线方程式

$$dx = \frac{v_x}{v_y} dy, \quad dy = \frac{v_y}{v_x} dx$$

将此 dx , dy 代入式 (1-64) 和式 (1-65) 并经适当整理。可得

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v_x^2}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial v_x^2}{\partial y} dy = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad (1-66)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v_y^2}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial v_y^2}{\partial y} dy = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy \quad (1-67)$$

将 (1-66) (1-67) 两式相加, 得

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (v_x^2 + v_y^2) dx + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (v_x^2 + v_y^2) dy = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) \quad (1-68)$$

流线上的速度矢量 v , 由于 $v^2 = v_x^2 + v_y^2$, 式 (1-68) 的左右两端为函数 $\frac{v^2}{2}$ 和 $\frac{p}{\rho}$ 的全微分, 因此, 我们可以写出

$$d \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (1-69)$$

式 (1-69) 即为理想不可压缩流体稳定流动并忽略体积力时, 沿流线的运动方程式的解,

也是著名的柏努利方程的最简单的形式。

4.1.2 层流流动

(1) 稳定流动时圆直管的层流理论解

不可压缩流体在圆直管中作稳定的层流流动时, 在流动已充分发展后, 取柱坐标的 z 轴与管轴重合, 如图1-3所示。

求解奈维-斯托克斯方程可得流速分布和流量,

$$v_z = -\frac{\Delta p}{4\mu L}(R^2 - r^2) \quad (1-70)$$

式中 Δp ——沿管长 L 的压降

R ——管半径

μ ——流体粘度

r ——径向上的距离

或写成以下形式

$$v_z = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (R^2 - r^2) \quad (1-71)$$

$$Q = \frac{\pi}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dz} \right) R^4 \quad (1-72)$$

式中 Q ——流量

(2) 充分发展了的稳定层流流过其他形状断面管道的流速分布、流量与压降的关系

(2.1) 同心圆管环隙流动

$$v(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} \left[a^2 - r^2 + (a^2 - b^2) \frac{\ln(a/r)}{\ln(b/a)} \right] \quad (1-73)$$

$$Q = \frac{\pi}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \left[a^4 - b^4 - \frac{(a^2 - b^2)}{\ln(a/b)} \right] \quad (1-74)$$

式中 a ——外管半径

b ——内管半径

Q ——流量, 其余符号同圆管

(2.2) 椭圆切面管

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

$$v(x, y) = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right) \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (1-75)$$

$$Q = \frac{\pi}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \quad (1-76)$$

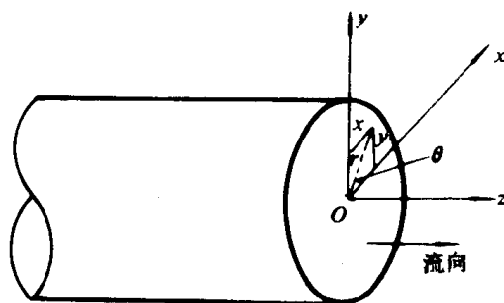


图 1-3

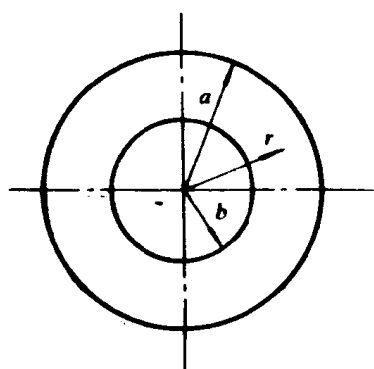


图 1-4

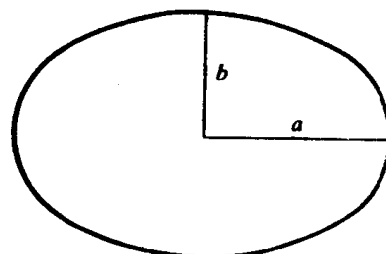


图 1-5