信号统计分析基础

沈凤麟　钱玉美　编著　　陈宗鹭　审订

中国科学技术大学出版社

信号统计分析基础

沈凤麟　钱玉美　编著

陈宗骘　　　　审订

中国科学技术大学出版社

1989・合肥

内 容 简 介

本书较为系统地介绍了随机信号的基本原理、概念及统计分析的方法。内容包括概率论、随机过程、随机信号与系统、高斯过程及其变换、假设检验与判决规则、已知信号检测、随机参量信号的检测、非白高斯噪声中信号的检测、信号参量的估计和维纳滤波与卡尔曼滤波共十章。每章都附有习题及参考文献。

该书是作者多年教学实践的总结。它可作为高等学校有关信号处理专业的专业基础课教材，亦可供从事或涉及信号处理的工程科技人员参阅。

信 号 统 计 分 析 基 础

沈凤麟　钱玉美　编著

陈宗骘　　　　审订

责任编辑：于文良　封面设计：王瑞荣

*

中国科学技术大学出版社出版

（安徽省合肥市金寨路96号）

中国科学技术大学印刷厂印刷

安徽省新华书店发行

*

开本：850×1168/32　印张：11.75　字数：300千

1989年7月第1版　1989年7月第1次印刷

印数：1—3000

ISBN 7-312-00122-X/TN·5　定价：2.80元

前　言

随着现代科学技术的发展，信号的统计分析与处理在雷达、声纳、遥感技术、自动控制、地球物理、生物医学、系统辨识、语音识别、图像处理等学科与领域中得到日益广泛的应用。

所谓信号分析与处理，通常是指从实际观测结果中提取所需要的信息。如果没有干扰和噪声的存在，这种信号的分析与处理相对来讲比较简单，当然，当有用信号本身是随机的，即使没有干扰或噪声的存在，对它的分析与处理亦具有与一般确定信号的分析与处理显著不同的特点。实际上，与有用信号存在的同时，不可避免地存在着干扰与噪声，这就使信号的分析与处理变得愈加复杂。

鉴于“信号统计分析基础”对于现代科学与技术发展的重要意义，中国科学技术大学在建校之初就把它列入有关系的教学计划，作为重要的课程向学生进行讲授。1980 年以来，中国科学技术大学无线电电子学系在总结建校以来本课程的教学经验的基础上，并根据人才培养的实际需要，不断地对本课程的教学进行改进，从这个意义上来说，本书是自中国科学技术大学设置本课程以来，特别是近几年来教学实践的一个总结。全书共分十章。第一章简要复习概率论的基本概念、定理。第二章论述随机过程的基本性质。第三章讨论窄带信号、窄带噪声、窄带滤波器的分析与处理方法，并扼要地介绍了随机信号作用于线性与非线性系统时的基本分析方法。第四章概述高斯随机过程及其变换的有关性质。第五章引入有关的判决准则和判决规则。第六章研究高斯白噪声中确知信号的检测问题。第七章研究高斯白噪声中随机参量信号的检测问题。第八章介绍非白高斯噪声中信号的检测

问题。第九章研究信号参量的估值问题。第十章介绍维纳滤波和卡尔曼滤波。其中第一、二、三、九、十章由沈凤麟教授执笔，第四、五、六、七、八章由钱玉美执笔，各章习题由李辉负责编写，当时的研究生隋文泉、陆军以及大学生王纯，王道宏等参加了部分有关工作。在本书编写过程中，得到中国科学院电子学研究所研究员、中国科大兼职教授陈宗骘先生的热情支持和帮助。并对全书进行了认真的审订，对此，我们表示衷心的感谢。

关于本书的名称作一说明如下：

信号的统计分析虽然在理论与实际两方面已取得了十分重要的成就，但实际科研与生产的需要对它提出了许多新的课题，吸引着有关领域的科技工作者，这些新的方向中包括：非参量检测理论，稳健检测（Robust Detection）理论，现代谱估计理论，自适应滤波理论与技术，多维信号处理与分析等等。从这个意义上来说，本书所涉及的内容仅仅是信号的统计分析与处理这一学科的经典部分，这也是本书命名为信号统计分析基础的由来。基础训练的重要性是众所周知的，作者希望本书的出版能对正在努力从事基础学习的青年学生和有志自学深造的朋友们有所帮助。

由于编者水平有限，书中难免会有错误和不足之处，恳请读者批评指正。

作　者

1989年1月

目　录

第一章 概 率 论

§1-1 概 率 定 义

概率论是研究随机现象的数学分支。有关“概率”的定义是概率论这一数学分支涉及全局性的根本问题。

随机现象是和随机试验相联系的。所谓随机试验是这样一种试验，每次试验事先并不能准确地预言它的结果，但在相同条件下可以重复进行的试验。对于每一类随机试验，首先要掌握试验的所有可能结果，由上述所有可能结果所构成的空间称为样本空间（亦称为基本空间）。样本空间中各元素的各种组合，构成各种不同的随机事件。例如，掷骰子是一种随机试验，$\{i\}, i=1, 2, 3, 4, 5, 6$点，是其样本空间，那么，样本空间各元素的如下组合$\{2,4,6\}$即代表试验结果为偶数点这一类随机事件。

定义与随机事件A相对应的数$P(A)$为概率，$P(A)$越大，表示A发生的可能性越大，$P(A)$越小，表示A发生的可能性越小。

古典概率$P(A)$的定义如下：

$$P(A)=\frac{k}{n}. \tag{1-1}$$

其中n为样本空间中所有可能结果的总数，而k为样本空间中与随机事件A有关的结果数。显然，古典概率是假定各种结果是以“等可能”地出现为前提的，这样的前提具有明显的局限性。

随机事件A的另一种以“相对频率”为基础的定义如下：

首先，定义事件A的相对频率为$\frac{n_A}{N}$，其中N为随机试验重复次数，n_A为在N次试验中事件A出现的次数，

$$P(A)=\lim_{N\to\infty}\frac{n_A}{N}. \qquad (1\text{-}2)$$

上述定义显然去掉了古典概率定义中的“等可能”的限制，但它是以随机事件A的相对频率的极限的存在为前提的，而这样的前提本身严格来说只是一种假定。

概率的公理化定义[注]，则是对于随机事件的规律性所作的严格数学概括。

首先，定义可测空间(Ω，$\mathscr{F}$)，其中Ω是样本空间，而$\mathscr{F}$则是Ω的子集所组成的集合，$\mathscr{F}$称为样本空间Ω上的σ-域（或称为σ代数），如果集合$\mathscr{F}$满足以下条件：

（1）若$A\in\mathscr{F}$，则$\bar{A}\in\mathscr{F}$（其中$\bar{A}=\Omega-A$）；

（2）若$A\in\mathscr{F}$，$B\in\mathscr{F}$，则$A\cup B\in\mathscr{F}$。

(由上述条件，不难推得，$\Omega\in\mathscr{F}$；$\phi\in\mathscr{F}$；其中ϕ表示空集，若$A_m\in\mathscr{F}$，$m=1,2,\cdots$则$\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}A_m\in\mathscr{F}$，$\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}A_m\in\mathscr{F}$。)

$P(A)$是定义在σ域上的实值集函数，它满足以下三个基本条件：

（1）任意$A\in\mathscr{F}$，必有$1\geqslant P(A)\geqslant 0$；

（2）$P(\Omega)=1$；

（3）若$A_i\in\mathscr{F}$，$i=1,2,3,\cdots$，并且$A_iA_j=\phi$，$(i\neq j)$，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i). \qquad (1\text{-}3)$$

$P(A)$即为随机事件A的概率，（1），（2），（3）则分别称为概率的非负性、正规性及可列可加性。

根据概率的公理化定义，经过证明可以得到概率的若干基本

[注]其形成见附录一

性质：

（1）$P(\phi)=0$； (1-4)

（2）若 $A_i \in \mathscr{F}$，$i=1,2,\cdots,N$，并且 $A_iA_j=\phi$，$(i\neq j)$，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right)=\sum_{i=1}^{N} P(A_i)\text{；} \tag{1-5}$$

（3）对于任意 N 个事件，$A_i \in \mathscr{F}$，$i=1,2,\cdots N$，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right)=\sum_{i=1}^{N} P(A_i)-\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} P(A_iA_j)$$

$$+\sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=i+1}^{N-1}\sum_{k=j+2}^{N} P(A_iA_jA_k)-\cdots\text{；} \tag{1-6}$$

（4）对于任意 N 个事件，$A_i \in \mathscr{F}$，$i=1,2,\cdots,N$，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{N} P(A_i)\text{；} \tag{1-7}$$

（5）若 $A,B \in \mathscr{F}$，$A\supset B$，则

$$P(A)\geqslant P(B)\text{；} \tag{1-8}$$

（6）$P(\bar{A})=1-P(A)$； (1-9)

（7）若 $A_n \in \mathscr{F}$，$A_n\subset A_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$，则

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)=P\left(\lim_{N\to\infty}\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)\text{；} \tag{1-10}$$

（8）若 $A_n \in \mathscr{F}$，$A_n\supset A_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$，则

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right)=P\left(\lim_{N\to\infty}\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right)\text{。} \tag{1-11}$$

§1-2 条 件 概 率

在事件 B 出现的条件下，事件 A 出现的概率，定义为**条件概**

率，记为 $P(A|B)$。

设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为概率空间，$A\in\mathscr{F}$，$B\in\mathscr{F}$，$P(B)\neq 0$，则 $P(A|B)$定义为：

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{1-12}$$

条件概率具有以下性质：

（1）任意 $A\in\mathscr{F}$，$1\geqslant P(A|B)\geqslant 0$；

（2）$P(\Omega|B)=1$；

（3）$A_i\in\mathscr{F}$，$i=1,2,\cdots$，$A_iA_j=\phi(i\neq j)$，那么

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i|B\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i|B). \tag{1-13}$$

有了条件概率的概念以后，可以得到三个概率论中的重要定理。

乘法定理 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)$

$$P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}). \tag{1-14}$$

全概率定理 若 B_i，$i=1,2,\cdots$，为有穷个或可列多个互不相容事件，$P\left(\bigcup_i B_i\right)=1$，$P(B_i)\neq 0$，则

$$P(A)=\sum_i P(B_i)P(A|B_i). \tag{1-15}$$

贝叶斯定理 若 B_i，$i=1,2,\cdots$，为有穷个或可列多个互不相容事件，$P\left(\bigcup_i B_i\right)=1$，$P(B_i)\neq 0$，则对于任意事件 A，$P(A)\neq 0$，

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)}. \tag{1-16}$$

§1-3 统计独立

事件A与B彼此统计独立，表示$P(A)=P(A|B)$及$P(B)=P(B|A)$，因此，事件A与B彼此统计独立的充分必要条件是：

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互统计独立的充分必要条件是：A_1，$A_2,\cdots$，A_n事件中任意k个事件$(1\leqslant k\leqslant n)$都满足

$$\begin{aligned}&P(A_{i1}A_{i2}\cdots A_{ik})\\&\quad=P(A_{i1})P(A_{i2})P(A_{i3})\cdots P(A_{ik}),\end{aligned}\tag{1-17}$$

式中$A_{i1},A_{i2},\cdots$，A_{ik}为任意k个事件。

§1-4 随机变量、概率分布函数、概率密度函数、几种常见的概率密度函数

随机变量概念的引入是概率论发展中十分重要的一环，它使概率论的研究由“事件”扩展为“变量”。

离散随机变量　样本空间Ω若包含有限个或可列个随机试验的基本结果，如果对于任意$\omega\in\Omega$，有一个实数$\xi(\omega)$与之相对应，并且满足$\{\omega:\xi(\omega)\leqslant x\}\in\mathscr{F}$，其中$x$为任意值，那么这样定义的$\xi(\omega)$即为离散随机变量。

例如，以掷骰子这类随机试验为例，样本空间Ω共有1点，2点，…6点共六种基本结果，不妨令$x_i=\xi(\omega_i)$，$i=1,2,\cdots,6$，其中ω_i代表i点，而且规定$x_6>x_5>x_4>x_3>x_2>x_1$，这时$\{\omega:\xi(\omega)\leqslant x_3\}$表示随机试验小于等于3点的随机事件，因此根据概率论的定义可见，这时，

$$P(X\leqslant x_3)=P(x_1)+P(x_2)+P(x_3).\tag{1-18}$$

式中用X代替了随机变量ξ，其含义是相同的。而

$$P(X\leqslant x_3)=P(x_1)+P(x_2)+P(x_3)$$
$$=P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3), \qquad (1\text{-}19)$$

上述中的$P(X\leqslant x_3)$定义为离散随机变量X的概率分布函数(亦可称为分布函数或累积分布函数)。令$F_X(x_3)=P(X\leqslant x_3)$。图 1.1($B$)所示即为离散随机变量的概率分布（或累积分布）函数，所涉及的随机试验仍为前述的掷骰子，图 1.1(A)则代表离散概率的冲击函数。

根据累积分布函数的定义，不难看出，$F_X(-\infty)=0,F_X(\infty)=1$。可见累积分布函数是不可能小于零，也不可能大于1的。

连续随机变量　实际上许多随机试验的结果不呈离散的性质，例如噪声电压这种随机现象，其每次出现往往在一定范围内可以连续取值，又如降雨量，也是在一定范围内可以连续取值的，因此，相应的可以定义连续随机变量。样本空间Ω的结果若在一定范围内（包括$-\infty$至$+\infty$这种可能的范围）可以连续取值，如果对于任意$\omega\in\Omega$，存在实集函数$\varepsilon(\omega)$，并且满足

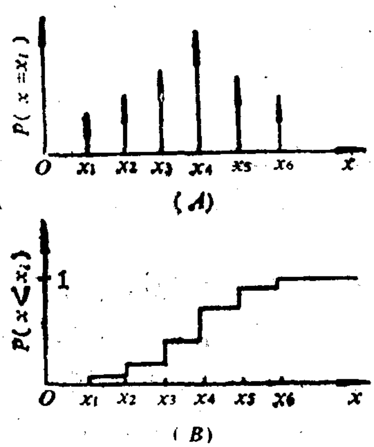

图 1.1　离散随机变量的概率
(A) 离散随机变量概率的冲激函数
(B) 离散随机变量的累积分布函数

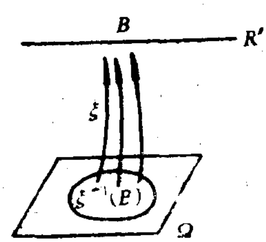

图 1.2　连续随机变量的影射形成过程

$\{\omega:\xi(\omega)\in\mathscr{B}_1\}$。其中 $\mathscr{B}_1$ 即为附录一中所定义的一维波莱尔（Borel）点集，则称 $\xi(\omega)$ 为连续随机变量。

图 1.2 所示为上述连续随机变量通过实集函数 $\varepsilon(\omega)$ 的影射而形成的过程。

若 $\varepsilon(\omega)\in\mathscr{B}$，而 $\mathscr{B}=(-\infty,x)$，则 $P(-\infty<X\leqslant x)$ 即定义为连续随机变量 X 的分布函数，令 $F_X(x)=P(-\infty<X\leqslant x)$。

概率密度 $f_X(x)$ 则定义为概率分布函数的导数：

$$f_X(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_X(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P(-\infty<X\leqslant x). \tag{1-20}$$

因此，

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(x)\mathrm{d}x,$$

$$\begin{aligned}P(a<X\leqslant b)&=P(-\infty<X\leqslant b)-P(-\infty<X\leqslant a)\\&=\int_a^b f_X(x)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{1-21}$$

对于 n 维随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，其联合概率密度为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，定义为：

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=\frac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}F(x_1,x_2\cdots,x_n)\\&=\frac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}P(X_1\leqslant x_1,\ X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n).\end{aligned} \tag{1-22}$$

而相应的

$$\begin{aligned}F(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=P(X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n)\\&=\int_{-\infty}^{x_n}\int_{-\infty}^{x_{n-1}}\cdots\int_{-\infty}^{x_1}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.\end{aligned} \tag{1-23}$$

$$\begin{array}{c}P(X_1\leqslant x_1)=\underset{(x_n)}{\int_{-\infty}^{\infty}}\ \underset{(x_{n-1})}{\int_{-\infty}^{\infty}}\cdots\underset{(x_1)}{\int_{-\infty}^{x_1}}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,\\ \vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\ P(X_n\leqslant x_n)=\underset{(x_n)}{\int_{-\infty}^{x_n}}\ \underset{(x_{n-1})}{\int_{-\infty}^{\infty}}\cdots\underset{(x_1)}{\int_{-\infty}^{\infty}}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.\end{array} \tag{1-24}$$

$$f(x_1)=\underset{(x_n)}{\int_{-\infty}^{\infty}}\ \underset{(x_{n-1})}{\int_{-\infty}^{\infty}}\cdots\underset{(x_2)}{\int_{-\infty}^{\infty}} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n,$$

$$f(x_2)=\underset{(x_n)}{\int_{-\infty}^{\infty}}\ \underset{(x_{n-1})}{\int_{-\infty}^{\infty}}\cdots\underset{(x_3)}{\int_{-\infty}^{\infty}}\ \underset{(x_1)}{\int_{-\infty}^{\infty}} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n,$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$f(x_n)=\underset{(x_{n-1})}{\int_{-\infty}^{\infty}}\ \underset{(x_{n-2})}{\int_{-\infty}^{\infty}}\cdots\underset{(x_2)}{\int_{-\infty}^{\infty}}\ \underset{(x_1)}{\int_{-\infty}^{\infty}} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1}.$$

(1-25)

对于离散随机变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$，相应的概率密度为：

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}P(x_i)\delta(x-x_i), \tag{1-26}$$

相应的概率分布函数为：

$$F_X(x_0)=P(X\leqslant x_0)=\int_{-\infty}^{x_0}\sum_{i=1}^{n}P(x_i)\delta(x-x_i)\,\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{i=1}^{n'}P(x_i). \tag{1-27}$$

$n'\leqslant n$，显然，n'取决于$x_i\leqslant x_0$，$i=1,2,\cdots$的个数。

给定随机变量X后，随机变量Y的条件概率密度定义为：

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f(x)},\quad f(x)\neq 0 \tag{1-28}$$

相应的条件概率的定义是：

$$P(Y\leqslant y|x-\Delta h<X\leqslant x+\Delta h)=\frac{P(Y\leqslant y,x-\Delta h<X\leqslant x+\Delta h)}{P(x-\Delta h\leqslant X\leqslant x+\Delta h)}$$

(1-29)

若X,Y是连续随机变量，那么