

# 振動理論及應用詳解

原著者: WT. Thomson

譯著者: 康 淵

曉 園 出 版 社

世界圖書出版公司

# 振动理论及应用详解

W. T. 汤姆森 原著

康 渊 译著

\*

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司重印

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1993 年 11 月第 一 版 开本: 850×1168 1/32

1993 年 11 月第一次印刷 印张: 14.5

印数: 0001—850 字数: 41 万字

ISBN: 7-5062-1643-4/O·78

定价: 11.50 元 (W<sub>9304</sub>/13)

世界图书出版公司通过中华版权代理公司向晓园出版社购得重印权  
限国内发行

03-44  
T32

371845

## 前 言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與鋪路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。



DV67/02  
振動理論及應用詳解

(目 錄)

|      |               |     |
|------|---------------|-----|
| 第一章  | 振盪運動          | 1   |
| 第二章  | 自由振動          | 17  |
| 第三章  | 諧調激勵振動        | 57  |
| 第四章  | 暫態振動          | 91  |
| 第五章  | 2 自由度系統       | 127 |
| 第六章  | 振動系統之性質       | 185 |
| 第七章  | 連續系統的正規振態     | 225 |
| 第八章  | Lagrange 方程式  | 249 |
| 第九章  | 數值近似方法        | 281 |
| 第十章  | 成堆質量參數系統之計算程序 | 317 |
| 第十一章 | 連續系統之振態總和程序   | 375 |
| 第十二章 | 非線性振動         | 399 |
| 第十三章 | 隨機振動          | 433 |

# 第一章 振盪運動

- 1.1 諧調運動之振幅為 0.20 cm，週期為 0.15 sec 求最大速度及加速度。

解 令位移： $x = A \sin(\omega t + \phi)$

則速度： $\dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \phi)$

加速度： $\ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$

已知週期： $\tau = 0.15 \text{ s}$

$$\text{角頻率：}\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{0.15} = 41.89 \text{ rad/s}$$

$$\dot{x}_{\max} = A\omega = 0.2 \times 41.89 = 8.38 \text{ cm/s}$$

$$\ddot{x}_{\max} = A\omega^2 = 0.2 \times 41.89^2 = 350.95 \text{ cm/s}^2$$

- 1.2 某加速計指出結構在 82 cps 下諧調振動，其最大加速度為 50g，求振幅 (cps : cycle/sec)。

解  $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 82 = 515.22 \text{ rad/s}$  ,  $g = 980 \text{ cm/s}^2$

$$A = \frac{\ddot{x}_{\max}}{\omega^2} = \frac{50 \times 980}{(515.22)^2} = 0.1846 \text{ cm}$$

- 1.3 頻率 100 cps 的諧調運動，其最大速度為 4.57 m/sec，求其振幅，週期及最大加速度。

解 振幅： $A = \frac{\dot{x}_{\max}}{\omega} = \frac{4.57 \times 100}{2\pi \times 100} = 0.7273 \text{ cm}$

最大加速度：

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{\max} &= \omega \dot{x}_{\max} = 2\pi \times 100 \times 4.57 \\ &= 2871 \text{ cm/s}^2\end{aligned}$$

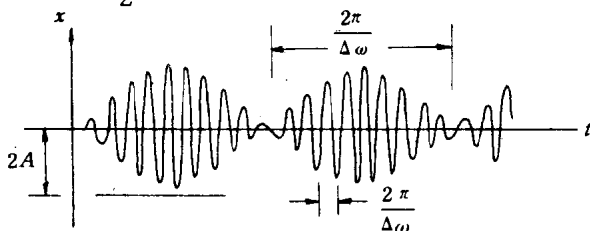
$$\text{週期：}\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{100} = 0.0628 \text{ sec}$$

- 1.4 求兩振幅相等，頻率有微小差值的諧調運動之和，並討論其合成運動之拍擊現象 (beat phenomena)。

## 2 振動理論及應用詳解

解 令  $x_1 = A \sin \omega t$  ,  $x_2 = A \sin (\omega + \Delta \omega) t$

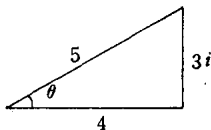
$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A [\sin \omega t + \sin (\omega + \Delta \omega) t] \\ &= 2A \cos \frac{1}{2} (\omega + \Delta \omega - \omega) t \cdot \sin \frac{1}{2} (\omega + \omega + \Delta \omega) t \\ &\simeq 2A \cos \frac{\Delta \omega}{2} t \cdot \sin \omega t \end{aligned}$$



1.5 以指數形式  $Ae^{i\theta}$  表示複向量  $4 + 3i$ 。

解  $z = 4 + 3i = 5 \left( \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i \right)$   
 $= 5 (\cos \theta + i \sin \theta)$   
 $= 5 e^{i\theta}$

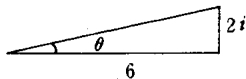
$$\theta = \tan^{-1} \frac{3}{4} = 0.6435 \text{ rad}$$



1.6 以  $A \angle \theta$  表示兩複量  $(2 + 3i)$  及  $(4 - i)$  之和。

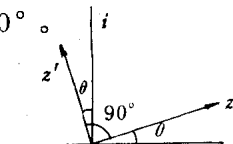
解  $(2 + 3i) + (4 - i)$   
 $= 6 + 2i = \sqrt{40} \left( \frac{6}{\sqrt{40}} + \frac{2}{\sqrt{40}}i \right)$   
 $= 6.325 \angle \theta$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2}{6} = 18.43^\circ$$



1.7 求證向量  $z = Ae^{i\omega t}$  乘以  $i$  的結果為原向量旋轉  $90^\circ$ 。

解  $iz = iAe^{i\omega t}$   
 $= \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) Ae^{i\omega t}$



$$\begin{aligned}
 &= e^{i\frac{\pi}{2}} A e^{i\omega t} \\
 &= A e^{i(\frac{\pi}{2} + \omega t)}
 \end{aligned}$$

1.8 求兩向量  $5e^{i\pi/6}$  及  $4e^{i\pi/3}$  之和，並找出合向量與原向量之夾角。

解  $z = 5e^{i\pi/6} + 4e^{i\pi/3}$

$$= 5\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) + 4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 5(0.866 + 0.5i) + 4(0.5 + 0.866i)$$

$$= 6.33 + 5.96i$$

$$= \sqrt{6.33^2 + 5.96^2} e^{i\theta}$$

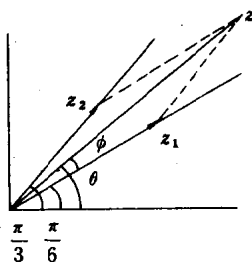
$$= 8.69 e^{i\theta}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{5.96}{6.33}$$

$$= 43.28^\circ$$

合向量與原第一向量之夾角：

$$\phi = \theta - \frac{\pi}{6} = 13.28^\circ$$



1.9 求如圖P1-9所示矩形波之 Fourier 級數。

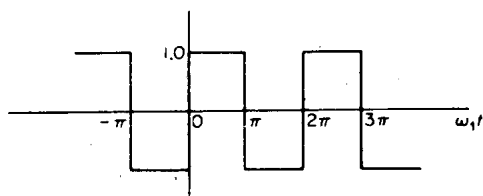


圖 P1-9

解  $x(t)$  為奇 (odd) 函數， $\therefore a_n = 0$

$$x(\omega_1 t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin n\omega_1 t = \begin{cases} 1 & , 0 < x < \pi \\ -1 & , \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

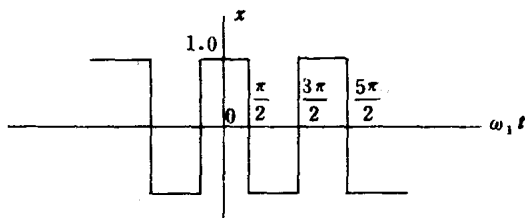
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x \sin n\omega_1 t d(\omega_1 t)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{2\pi} \left[ \int_0^{\pi} \sin n\tau \, d\tau - \int_{\pi}^{2\pi} \sin n\tau \, d\tau \right] \\
&= \frac{1}{n\pi} \left[ -(\cos n\tau)_0^{\pi} + (\cos n\tau)_{\pi}^{2\pi} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} [\cos 2n\pi - 2\cos n\pi + 1] \\
&= \frac{1}{n\pi} (\cos 2n\pi - 2\cos n\pi + \cos 0) \\
&= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \\
&= \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n=2m+1, \\ 0, & n=2m, \end{cases} \quad m=0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

$$x = \frac{4}{\pi} \left( \sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t + \dots \right)$$

1.10 若題 1-9 的方波自原點向右偏移  $\pi/2$ ，求其 Fourier 級數。

解



$x(t)$  為偶 (even) 函數， $\therefore b_n = 0$

$$x(\omega_1 t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_1 t$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} x(\omega_1 t) \, d(\omega_1 t)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{\pi/2} d\tau - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\tau + \int_{3\pi/2}^{2\pi} d\tau \right) = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^{2\pi} x(\omega_1 t) \cos n\omega_1 t \, d(\omega_1 t)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{2\pi} \left( \int_0^{\pi/2} \cos n\tau d\tau - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos n\tau d\tau + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos n\tau d\tau \right) \\
&= \frac{1}{n\pi} \left[ (\sin n\tau)_0^{\pi/2} - (\sin n\tau)_{\pi/2}^{3\pi/2} + (\sin n\tau)_{3\pi/2}^{2\pi} \right] \\
&= \frac{1}{n\pi} \left( \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{3n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{3n\pi}{2} \right) \\
&= \frac{2}{n\pi} \left( \sin \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{3n\pi}{2} \right) \\
&= \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n=4m+1 \\ -\frac{4}{n\pi}, & n=4m+3, \quad m=0, 1, 2, \dots \\ 0, & n=2m \end{cases} \\
x(t) &= \frac{4}{\pi} \left( \sin \omega_1 t - \frac{\sin 3\omega_1 t}{3} + \frac{\sin 5\omega_1 t}{5} - + \dots \right)
\end{aligned}$$

1.11 求圖 P1-11 所示三角形波之 Fourier 級數。

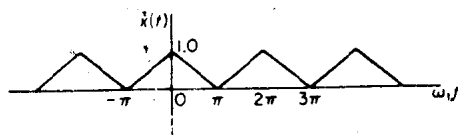


圖 P1-11

解  $x(t)$  為偶函數， $\therefore b_n = 0$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{-1}{\pi} (\omega_1 t - \pi), & 0 < \omega_1 t < \pi \\ \frac{1}{\pi} (\omega_1 t - \pi), & \pi < \omega_1 t < 2\pi \end{cases}$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_1 t$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(\omega_1 t) d(\omega_1 t)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\pi} -\frac{1}{\pi} (\tau - \pi) d\tau + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{\pi} (\tau - \pi) d\tau \right] \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \left[ \left( -\frac{\tau^2}{2} + \pi\tau \right) \Big|_0^{\pi} + \left( \frac{\tau^2}{2} - \pi\tau \right) \Big|_{\pi}^{2\pi} \right] \\
&= \frac{1}{2} \\
a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T x(\tau) \cos n\tau d\tau \\
&= \frac{2}{2\pi} \left[ \int_0^{\pi} -\frac{1}{\pi} (\tau - \pi) + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{\pi} (\tau - \pi) \right] \cos n\tau d\tau \\
&= \frac{1}{\pi^2} \left[ \left( -\frac{\tau \sin n\tau}{n} - \frac{\cos n\tau}{n^2} + \frac{\pi \sin n\tau}{n} \right) \Big|_0^{\pi} \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\tau \sin n\tau}{n} + \frac{\cos n\tau}{n^2} - \frac{\pi \sin n\tau}{n} \right) \Big|_{\pi}^{2\pi} \right] \\
&= \frac{1}{n^2 \pi^2} (\cos 2n\pi - 2\cos n\pi + \cos 0) \\
&= \begin{cases} 0, & n=2m, & m=1, 2, \dots \\ \frac{4}{n^2 \pi^2}, & n=2m-1, \end{cases} \\
x(t) &= \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \left( \cos \omega_1 t + \frac{\cos 3\omega_1 t}{3^2} + \frac{\cos 5\omega_1 t}{5^2} + \dots \right)
\end{aligned}$$

1.12 求如圖P1-12所示鋸齒曲線之Fourier級數，以(1.2-4)式之指數形式表示其結果。

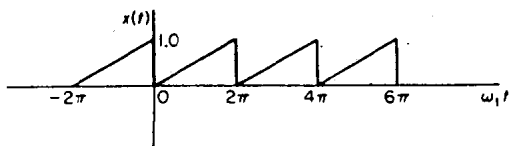


圖 P1-12

$$\text{解 } x(t) = \frac{\omega_1 t}{2\pi}, \quad 0 \leq \omega_1 t \leq 2\pi$$

$$2\pi c_0 = \int_0^{2\pi} \frac{\tau}{2\pi} d\tau = \pi, \quad c_0 = \frac{1}{2}$$

$$2\pi c_n = \int_0^{2\pi} \frac{\tau}{2\pi} e^{-in\tau} d\tau$$

$$\text{令 } u = \tau, \quad dv = e^{-in\tau} d\tau$$

$$du = d\tau, \quad v = \frac{-1}{in} e^{-in\tau}$$

則

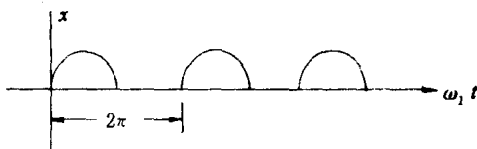
$$\begin{aligned} 4\pi^2 c_n &= \left[ \frac{-\tau}{in} e^{-in\tau} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{in} \int_0^{2\pi} e^{-in\tau} d\tau \\ &= \frac{-1}{in} (2\pi e^{-in2\pi}) + \frac{-1}{i^2 n^2} [e^{-in\tau}]_0^{2\pi} \\ &= \frac{2\pi i}{n} (\cos 2n\pi - i \sin 2n\pi) + \frac{1}{n^2} (\cos 2n\pi - i \sin 2n\pi - 1) \\ &= \frac{2\pi i}{n} \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{i}{2\pi n}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\omega_1 t}}{n}, \quad (n \neq 0) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \left[ (e^{i\omega_1 t} - e^{-i\omega_1 t}) + \frac{1}{2} (e^{i2\omega_1 t} - e^{-i2\omega_1 t}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} (e^{i3\omega_1 t} - e^{-i3\omega_1 t}) + \dots \right] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left( \sin \omega_1 t + \frac{1}{2} \sin 2\omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \dots \right) \end{aligned}$$

1.13 求出只含正值部分的正弦波 rms 值。

解



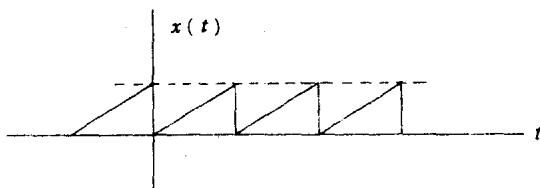
$$x(t) = \begin{cases} \sin \omega_1 t & , 0 \leq \omega_1 t \leq \pi \\ 0 & , \pi \leq \omega_1 t \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T x^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi A^2 \sin^2 \tau d\tau \\ &= \frac{A^2}{4\pi} \int_0^\pi (1 - \cos 2t) dt = \frac{A^2}{4} \end{aligned}$$

$$\text{rms} = \sqrt{\bar{x}^2} = \frac{A}{2}$$

1.14 求題 1-12 鋸齒波之均方值，作此題之兩種方法，其一是由平方運算得到，另一是由 Fourier 級數得到。

解



$$x(t) = \frac{\omega_1 t}{2\pi} \quad , \quad 0 \leq \omega_1 t \leq 2\pi$$

$$x^2 = \frac{(\omega_1 t)^2}{4\pi^2}$$

$$\bar{x}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\tau^2}{4\pi^2} d\tau = \frac{1}{8\pi^2} \left[ \frac{\tau^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{3}$$

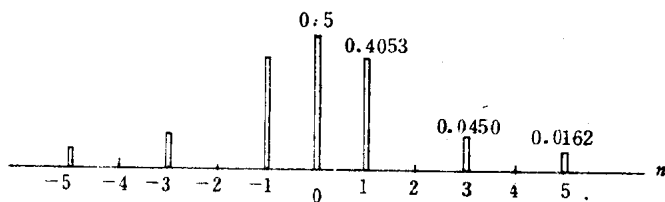
1.15 畫出題 1-11 中三角形波之頻譜。

解 由習題 1-11 所得結果，連續三角形函數展開成 Fourier 級數為

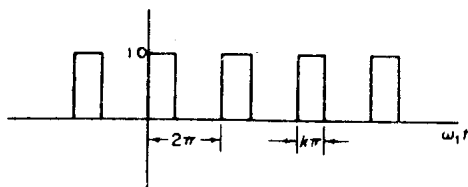
$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \left( \cos \omega_1 t + \frac{\cos 3\omega_1 t}{3^2} + \frac{\cos 5\omega_1 t}{5^2} + \dots \right)$$

Fourier 頻譜 = 係數圖形。

$$\therefore b_n = 0, \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = a_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$



1.16 求圖1-16所示一組矩形波之Fourier級數，並畫出 $c_n$ 及 $\phi_n$ 對應 $n$ 的關係圖，其中 $k=2/3$ 。



圖P1-16

$$\text{解 } x(t) = \begin{cases} 1.0 & 0 \leq \omega_1 t \leq k\pi \\ 0 & k\pi < \omega_1 t \leq 2\pi \end{cases}$$

$$2\pi c_0 = \int_0^{k\pi} d\tau = k\pi$$

$$2\pi c_n = \int_0^{k\pi} x e^{-in\tau} d\tau = \int_0^{k\pi} e^{-in\tau} d\tau = \frac{i}{n} (e^{-in k\pi} - 1)$$

已知

$$k = \frac{2\pi}{3}$$

$$c_0 = \frac{\frac{2}{3}\pi}{2\pi} = \frac{1}{3}$$

$$c_n = \frac{i}{2n\pi} (e^{-in \frac{2}{3}\pi} - 1) = \frac{i}{2n\pi} (\cos \frac{2}{3}n\pi - i \sin \frac{2}{3}n\pi - 1)$$

當 $n = 1, 4, 7, \dots, 3m-2, \dots$ 時

$$\cos \frac{2}{3}n\pi = -\frac{1}{2}, \quad \sin \frac{2}{3}n\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c_n = \frac{i}{2n\pi} \left( -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) = \frac{i}{4n\pi} (-3 - i\sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{4n\pi} (\sqrt{3} - 3i) , \quad |c_n| = \frac{\sqrt{3}}{2n\pi}$$

當  $n = 2, 5, 8, \dots, 3m-1, \dots$  時

$$c_n = \frac{i}{2n\pi} \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) = \frac{i}{4n\pi} (-3 + i\sqrt{3})$$

$$= \frac{-1}{4n\pi} (\sqrt{3} + 3i) , \quad |c_n| = \frac{\sqrt{3}}{2n\pi}$$

當  $n = 3, 6, 9, \dots, 3m, \dots$  時

$$c_n = \frac{i}{2n\pi} (1 - 0 - 1) = 0$$

$$\text{相角: } \phi = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n} = \tan^{-1} \frac{c_n^* - c_n}{i(c_n^* + c_n)}$$

$$\phi_0 = \tan^{-1} 0 = 0$$

當  $n = 1, 4, 7, \dots, 3m-2, \dots$

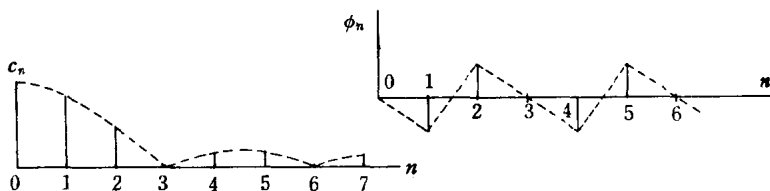
$$\tan \phi_n = \frac{6i}{2i\sqrt{3}} = \sqrt{3} , \quad \phi_n = 60^\circ$$

當  $n = 2, 5, 8, \dots, 3m-1, \dots$

$$\tan \phi_n = \frac{-6i}{2i\sqrt{3}} = -\sqrt{3} , \quad \phi_n = -60^\circ$$

當  $n = 3, 6, 9, \dots, 3m, \dots$

$$\tan \phi_n = 0 , \quad \phi_n = 0$$



- 1.17 如圖 P1-17 所示為滑塊連桿機構，寫出其滑塊之位移  $s$  方程式，並求各部之諧調分量及其相對大小。當  $r/\ell = 1/3$  時，求出第二及第一諧調分量之比為多少？

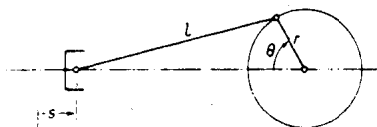


圖 P1-17

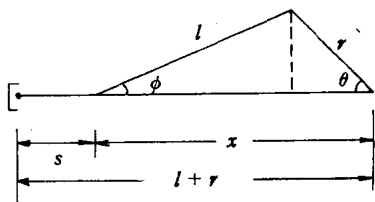
解 二項式原理：

$$\begin{aligned}
 (1+z)^m &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} z^n, \quad n \text{ 爲整數, } m \text{ 爲實數} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{(m-n)! n!} z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{n!} z^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n
 \end{aligned}$$

$$\therefore r \sin \theta = \ell \sin \phi$$

$$\therefore \sin \phi = \frac{r \sin \theta}{\ell}$$

$$\begin{aligned}
 \cos \phi &= \sqrt{1 - \sin^2 \phi} \\
 &= \sqrt{1 - \frac{r^2}{\ell^2} \sin^2 \theta}
 \end{aligned}$$



$$x = \ell \cos \phi + r \cos \theta = \ell \sqrt{1 - \frac{r^2}{\ell^2} \sin^2 \theta} + r \cos \theta$$

$$s = \ell + r - x = \ell + r - r \cos \theta - \ell \left[ 1 - \left( \frac{r}{\ell} \sin \theta \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

以二項式原理展開  $\left[ 1 - \left( \frac{r}{\ell} \sin \theta \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ 

$$c_0 = 1$$

$$c_1 = \frac{m}{n!} z^n = \frac{1}{2} \left( -\frac{r^2}{\ell^2} \sin^2 \theta \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{r}{\ell} \sin \theta \right)^2$$

$$c_2 = \frac{m(m-1)}{n!} z^n = \frac{\frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \right)}{2!} \left( -\frac{r^2}{\ell^2} \sin^2 \theta \right)^2$$

$$= -\frac{1}{8} \left( \frac{r}{\ell} \sin \theta \right)^4$$

$$c_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{n!} z^n$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-1\frac{1}{2}\right)}{3 \times 2} \left(-\frac{r^2}{\ell^2} \sin^2 \theta\right)^3 \\
 &= \frac{-1}{16} \left(\frac{r}{\ell} \sin \theta\right)^6 \dots\dots\dots \\
 c_n &= \frac{-1}{2^{n+1}} \left(\frac{r}{\ell} \sin \theta\right)^{2n}
 \end{aligned}$$

$\because r \ll \ell$  ,  $\therefore \left(\frac{r}{\ell}\right)^4$  以上各項可以省略不計。

$$\begin{aligned}
 \text{則 } s &= \ell + r - r \cos \theta - \ell \left[ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{\ell} \sin \theta\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{r}{\ell} \sin \theta\right)^4 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{16} \left(\frac{r}{\ell} \sin \theta\right)^6 - \dots\dots \right] \\
 &\approx \ell + r - r \cos \theta - \ell + \frac{\ell}{2} \left(\frac{r}{\ell}\right)^2 \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right) \\
 &= r \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{r}{\ell} - \cos \theta - \frac{1}{4} \frac{r}{\ell} \cos 2\theta \right)
 \end{aligned}$$

諸調分量 (近似值)  $a_0 \approx \left(1 + \frac{1}{4} \frac{r}{\ell}\right) r$

$$a_1 \approx -r$$

$$a_2 \approx -\frac{1}{4} \frac{r^2}{\ell}, \dots\dots\dots$$

當  $r/\ell = 1/3$  時

$$\frac{\text{第二諧調分量}}{\text{第一諧調分量}} = \frac{\frac{1}{4} \left(\frac{r^2}{\ell}\right)}{r} = \frac{1}{4} \left(\frac{r}{\ell}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

1.18 求如圖 P1-18 所示矩形脈衝之均方值，其  $k = 0.10$ ，若振幅為  $A$ ，則 rms 電壓計的讀值為多少？

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \bar{x}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \\
 &= \frac{A^2}{T} \left( \int_0^{\frac{1}{2}T} dt + \int_{T-\frac{1}{2}T}^T dt \right)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{A^2}{T} \left( \frac{k}{2} T + T - T + \frac{k}{2} T \right) = k A^2$$

當  $k = 0.1$  時

$$\bar{x}^2 = 0.1 A^2$$

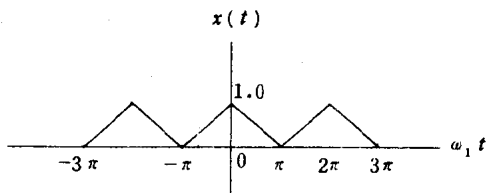
$$\text{rms} = \sqrt{\bar{x}^2} = 0.3162 A$$



圖 P1-18

1.19 求如圖 P1-11 所示三角形波的均方值。

解



$$x(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\omega_1 t}{\pi}\right), & 0 \leq \omega_1 t \leq \pi \\ \left(\frac{\omega_1 t}{\pi} - 1\right), & \pi \leq \omega_1 t \leq 2\pi \end{cases}$$

$$x^2 = 1 - \frac{2\tau}{\pi} + \frac{\tau^2}{\pi^2}, \quad 0 \leq \omega_1 t \leq 2\pi, \quad \text{令 } \omega_1 t = \tau$$

$$\bar{x}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(1 - \frac{2\tau}{\pi} + \frac{\tau^2}{\pi^2}\right) d\tau = \frac{1}{3}$$

1.20 rms 電壓計的精確度設定為  $\pm 0.5 \text{ Db}$ ，若量得振動之 rms 為  $2.5 \text{ mm}$ ，以公分為單位時，求電壓計讀數之精確度。

解  $\text{Db}(+) = 20 \log_{10} \left( \frac{x}{x_0} \right) = 0.5$

$$\frac{x(+)}{2.5} = 10^{\frac{0.5}{20}} = 1.0593$$

$$x(+) = 2.5 \times 1.0593 = 2.6481$$

$$\text{error}(+) = 2.6481 - 2.5 = 0.1481(\text{mm})$$

$$\text{Db}(-) = 20 \log_{10} \left( \frac{x_0}{x} \right) = -0.5$$