现代数学丛书

陆洪文 著

二次数域的高斯猜想

GAUSS' CONJECTURES ON THE QUADRATIC NUMBER FIELDS

LU HONGWEN

上海科学技术出版社

·现代数学丛书·

二次数域的高斯猜想

陆洪文 著

国家自然科学基金资助项目

上海科学技术出版社

现代数学丛书

二次数域的高斯猜想

陆洪文 著

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所经销　　上海商务印刷厂印刷

开本787×1092　小1/16　印张 29.5　插页 4　字数 381,000

1994 年 9 月第 1 版　　1994 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—1,500

ISBN7-5323-3441-4/O·175

定价: 37.20 元

(沪)新登字 108 号

内 容 提 要

本书系统和完整地阐述了高斯所提出的关于二次数域类数的三个著名猜想，特别着重于近二十多年来有关这方面研究的最新成就。

前三章是预备知识，系统阐明了二次数域的算术理论和解析理论。第四、五、六章分别详细论述了类数问题的一般状况，虚二次数域高斯类数猜想的解决，以及实二次数域的类数问题的难点所在和它的现状。其中特别介绍了Baker-Stark和Goldfeld-Gross-Zagier的有关研究的详细情况，包括他们是如何把超越数理论和椭圆曲线的BSD猜想用在类数问题上的，这两项工作分别获得了1970年的Fields奖与1987年的Cole奖。

本书可以作为数学工作者、研究生和大学数学系高年级学生的教材和参考书。

本项研究得到国家自然科学基金委员会数学天元基金的资助。

Modern Mathematics Series

GAUSS' CONJECTURES ON THE QUADRATIC NUMBER FIELDS

Lu Hongwen

Shanghai Scientific & Technical Publishers

Gauss' Conjectures on the Quadratic Number Fields

Abstract

In 1801 Gauss had raised three famous conjectures which can be restated in morden language as follows.

(1) $h_K = h(-D) \to +\infty$ as $-D \to -\infty$, where $h_K = h(-D)$ denotes the class number of the imaginary quadratic number fields $K = Q(\sqrt{-D})$;

(2) There exist exactly nine imaginary quadratic number fields with class number one. Moreover, Gauss found that the nine imaginary quadratic number fields with class number one are $-D = -3, -4, -7, -8, -11, -19, -43, -67$ and -163, and there exist exactly 18 imaginary quadratic number fields with class number **2**;

(3) There exist infinitely many real quadratic number fields with class number one.

The systematic and complete theory on the above Gauss' conjectures is stated in this book. As the main part, we have given the detail of the recent great achievements on this problem, which are reached in last two decades.

In the first three chapters, as the basic knowledge, we state systematically the arithmetical and analytic theory on the quadratic number fields.

The contents of the chapter 4, 5 and 6 are the general theory of the problem on class numbers of the quadratic number fields, the solution for Gauss' problem on the class numbers of the imaginary quadratic number fields, and the key difficulty and the present situation of the problem on

the class numbers of the real quadratic number fields respectively. Especially, we have stated and rewritten the detail of the works of Baker-Stark and Goldfeld-Gross-Zagier. The reader will find that these great mathematicians how to use the transcendtal number theory and BSD conjecture on elliptic curve to the problem on the class numbers respectively. It would like to point out that these two famous works have been awarded Fields Medal of 1970 and Cole Prize of 1987 respectively.

Some new research on the fundamental units of the real quadratic number fields are stated in chapter 7.

One will find that the works, published or unpublished, of the author of the present book are also stated in details.

出版说明

从60年代起，由华罗庚教授任主编的《现代数学丛书》编辑委员会曾组织编著，并由我社出版了多部具有很高水平的数学学术专著，有几部专著并已在国外出了外文版，受到国内外数学界和广大读者的高度重视，获得了很高的评价。原编委会中华罗庚、关肇直、吴新谋三位教授虽已先后逝世，但他们为本《丛书》所作出的贡献迄今仍为人们所敬仰、怀念。由于某些客观原因，《现代数学丛书》的出版工作曾一度停顿。

为了适应现代数学的迅速发展，更好地反映我国数学家近几年的优秀研究成果，必须大力加强《现代数学丛书》的规划、编辑、出版工作。充实编委会的力量。考虑到不少编委年事已高，经向原编委会中大部分同志及数学界有关专家广泛征求意见后，于1990年对编委会作了调整，补充了一些著名的中年数学家和学科带头人，建立了新的编委会，并进一步明确了本丛书的宗旨。

《现代数学丛书》新的编辑委员会由苏步青教授任名誉主编、谷超豪教授任主编，18位著名数学家任委员。编委会负责推荐（或审定）选题和作者，主持书稿的审核等工作。

《现代数学丛书》的宗旨是：向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的、国内第一流水平的数学研究成果，反映我国数学研究的特色和优势，扩大我国数学研究成果的影响，促进学科的发展和国内外的学术交流。

为了实现上述宗旨，本丛书将陆续组织出版在基础数学、应用数学和计算数学方面处于学科发展前沿、有创见且具有系统完整

研究成果的现代数学学术专著。

为出版好《现代数学丛书》，我们热切地期望着数学界各位专家的大力支持和悉心指导，并欢迎广大读者提出宝贵的建议和意见。

上海科学技术出版社

1991年4月

常用符号表

N—自然数的全体，即 $N=\{1, 2, 3, \cdots\}$

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}_q$ 分别代表有理整数环，有理数域，实数域，复数域，q 个元素组成的有限域。而 $M^*(M=\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, 或 $\mathbb{F}_q)$ 表示由 M 的全体非零元素组成的集合。

$A \ll B$ 或 $A=O(B)$ 表示两个变量 A、B 在极限过程中满足 $|A| \leqslant cB$，这里 c 是一个正常数，$B \geqslant 0$，一般在各个具体情况下说明 c 的依赖关系。

$A \stackrel{\text{def}}{=\!=} B$ 表示 A 由 B 定义。

两个 L-级数 $A \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum\limits^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \ll B \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum\limits^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$，表示 $b_n \geqslant 0$，且 $|a_n| \leqslant b_n$, $n \geqslant 1$。

两个有理整数 $A|B$，表示 A 是 B 的因子，即 A 除尽 B。$A \nmid B$ 表示 A 不是 B 的因子，即 A 除不尽 B。

$p^n \| A$，表示素数 p 的 n 次幂除尽 A，而 $p^{n+1} \nmid A$。

$[x]$ 表示实数 x 的整数部分，除非另有说明。

$[\alpha]$ 表示代数整数 α 生成的主理想。

目　录

CONTENTS

绪　论

Euler 在 1772 年发现了下列有趣的事实：

当 $x=0,1,\cdots,40$ 时，x^2-x+41 均是素数。

这一事实，与所谓的 Gauss 的类数 1 问题密切相关，因为我们有下列的命题 A。

命题 A (Rabinovitch[88]) 设无平方因子整数 $D<0$，$D\equiv 1 \pmod 4$。则当 $x=0,1,\cdots,\frac{|D|-3}{4}$ 时，$x^2-x+\frac{1+|D|}{4}$ 均表素数的充要条件是虚二次域 $Q(\sqrt{D})$ 的整数环是唯一分解的，即 $Q(\sqrt{D})$ 的类数为 1。

由于虚二次域 $Q(\sqrt{-163})$ 的类数是 1，所以我们由定理 A 立即得出 Euler 断言的真实性。

同样的，我们可以有下面的命题 B。

命题 B (陆洪文[46]) 设无平方因子整数 $D=4N^2+1$，其中正整数 $N>1$。则当 $x=1,2,\cdots,N-1$ 时，N^2-x-x^2 均表素数的充要条件是实二次域 $Q(\sqrt{D})$ 的整数环是唯一分解的，即 $Q(\sqrt{D})$ 的类数为 1。

由于 $N=13$ 时，$D=677$，而 $Q(\sqrt{677})$ 的类数为 1，所以我们有下列事实：

当 $x=1,2,\cdots,12$ 时，$169-x-x^2$ 均是素数。

这样寻找类数为 1 的二次数域是一个既古老又很有意义的问题。这个问题是 Gauss 提出的。Gauss 在其名著《Disquisitiones Arithmeticae》(《算术研究》，于 1801 年，Gauss 24 岁时出版)中，提出下列三个著名的猜想，它们用现代语言叙述，即为

1. 当判别式 $D\to-\infty$ 时，虚二次域 $Q(\sqrt{D})$ 的类数 $h(D)\to$