

现代数学丛书

陆洪文 著

二次数域的 高斯猜想

GAUSS'
CONJECTURES
ON THE
QUADRATIC
NUMBER FIELDS

LU HONGWEN

上海科学技术出版社

· 现代数学丛书 ·

二次数域的高斯猜想

陆洪文 著

国家自然科学基金资助项目

上海科学技术出版社

现代数学丛书

二次域的高斯猜想

陆洪文 著

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路 450 号)

本书由上海发行所经销 上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092 小 1/16 印张 29.5 插页 4 字数 381,000

1994 年 9 月第 1 版 1994 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—1,500

ISBN7-5323-3441-4/O·175

定价: 37.20 元

(沪)新登字 108 号

内 容 提 要

本书系统和完整地阐述了高斯所提出的关于二次数域类数的三个著名猜想，特别着重于近二十多年来有关这方面研究的最新成就。

前三章是预备知识，系统阐明了二次数域的算术理论和解析理论。第四、五、六章分别详细论述了类数问题的一般状况，虚二次数域高斯类数猜想的解决，以及实二次数域的类数问题的难点所在和它的现状。其中特别介绍了 Baker-Stark 和 Goldfeld-Gross-Zagier 的有关研究的详细情况，包括他们是如何把超越数理论和椭圆曲线的 BSD 猜想用在类数问题上的，这两项工作分别获得了 1970 年的 Fields 奖与 1987 年的 Cole 奖。

本书可以作为数学工作者、研究生和大学数学系高年级学生的教材和参考书。

本项研究得到国家自然科学基金委员会数学天元基金的资助。



0138/22

Modern Mathematics Series

**GAUSS' CONJECTURES
ON THE QUADRATIC
NUMBER FIELDS**

Lu Hongwen

Shanghai Scientific & Technical Publishers

Gauss' Conjectures on the Quadratic Number Fields

Abstract

In 1801 Gauss had raised three famous conjectures which can be restated in modern language as follows.

(1) $h_K = h(-D) \rightarrow +\infty$ as $-D \rightarrow -\infty$, where $h_K = h(-D)$ denotes the class number of the imaginary quadratic number fields $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$;

(2) There exist exactly nine imaginary quadratic number fields with class number one. Moreover, Gauss found that the nine imaginary quadratic number fields with class number one are $-D = -3, -4, -7, -8, -11, -19, -43, -67$ and -163 , and there exist exactly 18 imaginary quadratic number fields with class number 2;

(3) There exist infinitely many real quadratic number fields with class number one.

The systematic and complete theory on the above Gauss' conjectures is stated in this book. As the main part, we have given the detail of the recent great achievements on this problem, which are reached in last two decades.

In the first three chapters, as the basic knowledge, we state systematically the arithmetical and analytic theory on the quadratic number fields.

The contents of the chapter 4, 5 and 6 are the general theory of the problem on class numbers of the quadratic number fields, the solution for Gauss' problem on the class numbers of the imaginary quadratic number fields, and the key difficulty and the present situation of the problem on

the class numbers of the real quadratic number fields respectively. Especially, we have stated and rewritten the detail of the works of Baker-Stark and Goldfeld-Gross-Zagier. The reader will find that these great mathematicians how to use the transcendental number theory and BSD conjecture on elliptic curve to the problem on the class numbers respectively. It would like to point out that these two famous works have been awarded Fields Medal of 1970 and Cole Prize of 1987 respectively.

Some new research on the fundamental units of the real quadratic number fields are stated in chapter 7.

One will find that the works, published or unpublished, of the author of the present book are also stated in details.

《现代数学丛书》编辑委员会

名誉主编 苏步青

主 编 谷超豪

委 员 (以姓氏笔划为序)

丁夏畦 王梓坤 叶彦谦

石钟慈 冯克勤 刘应明

严志达 杨 乐 吴 方

李大潜 陈希孺 陈翰馥

张恭庆 胡和生 姜伯驹

梁友栋 曹锡华 程民德

Modern Mathematics Series

Editorial Committee

Honorary Editor-in-Chief Su Buchin

Editor-in-Chief Gu Chaohao

Members

Cao Xihua	Chen Hanfu
Chen Xiru	Cheng Minde
Ding Xiaqi	Feng Keqin
Hu Hesheng	Jiang Boju
Li Tatsien	Liang Youdong
Liu Yingming	Shi Zhongci
Wang Zikun	Wu Fang
Yan Zhida	Yang Le
Ye Yanqian	Zhang Gongqing

出版说明

从 60 年代起, 由华罗庚教授任主编的《现代数学丛书》编辑委员会曾组织编著, 并由我社出版了多部具有很高水平的数学学术专著, 有几部专著并已在外国出了外文版, 受到国内外数学界和广大读者的高度重视, 获得了很高的评价。原编委会中华罗庚、关肇直、吴新谋三位教授虽已先后逝世, 但他们为本《丛书》所作出的贡献迄今仍为人们所敬仰、怀念。由于某些客观原因, 《现代数学丛书》的出版工作曾一度停顿。

为了适应现代数学的迅速发展, 更好地反映我国数学家近几年的优秀研究成果, 必须大力加强《现代数学丛书》的规划、编辑、出版工作。充实编委会的力量。考虑到不少编委年事已高, 经向原编委会中大部分同志及数学界有关专家广泛征求意见后, 于 1990 年对编委会作了调整, 补充了一些著名的中年数学家和学科带头人, 建立了新的编委会, 并进一步明确了本丛书的宗旨。

《现代数学丛书》新的编辑委员会由苏步青教授任名誉主编、谷超豪教授任主编, 18 位著名数学家任委员。编委会负责推荐(或审定)选题和作者, 主持书稿的审核等工作。

《现代数学丛书》的宗旨是: 向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的、国内第一流水平的数学研究成果, 反映我国数学研究的特色和优势, 扩大我国数学研究成果的影响, 促进学科的发展和国内外的学术交流。

为了实现上述宗旨, 本丛书将陆续组织出版在基础数学、应用数学和计算数学方面处于学科发展前沿、有创见且具有系统完整

研究成果的现代数学学术专著。

为出版好《现代数学丛书》，我们热切地期望着数学界各位专家的大力支持和悉心指导，并欢迎广大读者提出宝贵的建议和意见。

上海科学技术出版社

1991年4月

常用符号表

N —自然数的全体, 即 $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

Z, Q, R, C, F_q 分别代表有理整数环, 有理数域, 实数域, 复数域, q 个元素组成的有限域. 而 M^* ($M = Z, Q, R, C$, 或 F_q) 表示由 M 的全体非零元素组成的集合.

$A \ll B$ 或 $A = O(B)$ 表示两个变量 A, B 在极限过程中满足 $|A| \leq cB$, 这里 c 是一个正常数, $B \geq 0$, 一般在各个具体情况下说明 c 的依赖关系.

$A \stackrel{\text{def}}{=} B$ 表示 A 由 B 定义.

两个 L -级数 $A \stackrel{\text{def}}{=} \sum \frac{a_n}{n^s} \ll B \stackrel{\text{def}}{=} \sum \frac{b_n}{n^s}$, 表示 $b_n \geq 0$, 且 $|a_n| \leq b_n, n \geq 1$.

两个有理整数 $A|B$, 表示 A 是 B 的因子, 即 A 除尽 B . $A \nmid B$ 表示 A 不是 B 的因子, 即 A 除不尽 B .

$p^n \| A$, 表示素数 p 的 n 次幂除尽 A , 而 $p^{n+1} \nmid A$.

$[x]$ 表示实数 x 的整数部分, 除非另有说明.

$[\alpha]$ 表示代数整数 α 生成的主理想.

目 录

常用符号表

绪论	1
第 1 章 连分数与 Pell 方程	5
§1 实二次无理数的连分数展开	5
§2 Pell 方程	44
本章评注	65
第 2 章 二元二次型与二次域	66
§1 二元二次型	66
§2 二次域	134
本章评注	147
第 3 章 Dedekind ζ -函数与极限公式	149
§1 二次域的 Dedekind ξ -函数	149
§2 Kronecker 极限公式	178
本章评注	205
第 4 章 Gauss 类数猜想的一般性讨论	206
§1 Dirichlet L -函数的零点分布和阶的估计	206
§2 实二次域的正则子 $\log \varepsilon$ 与连分数	229
§3 二次 Euclid 域	240
本章评注	268
第 5 章 虚二次域的 Gauss 类数猜想	270
§1 类数 1 的虚二次域的最后确定	271
§2 椭圆曲线与模形式	280
§3 Goldfeld-Gross-Zagier 定理及其证明	301
本章评注	322

第 6 章 实二次域的 Gauss 类数猜想	324
§1 实二次域 Gauss 类数猜想的一般性讨论	325
§2 实二次域类数为 1 的判别准则	327
§3 用连分数表示虚二次域类数	340
§4 S. Chowla 的一个猜想	372
§5 Goldfeld 定理	390
本章评注	427
第 7 章 Hirzebruch 和与 Hecke 算子	429
§1 实二次域基本单位的两个著名猜想	429
§2 Hirzebruch 和的一个恒等式	430
§3 AAC 猜想与 Hirzebruch 和	437
§4 Mordell 猜想与 Hirzebruch 和	444
本章评注	446
参考文献	447

CONTENTS

INotations

ntroduction	1
1. The Continued Fractions and Pell's Equation	5
§1 The Development of Continued Fractions for the Real Quadratic Irrational Numbers	5
§2 Pell's Equation.....	44
Comments on this Chapter	65
2. The Binary Quadratic Forms and The Quadratic Number Fields	66
§1 The Binary Quadratic Forms	66
§2 The Quadratic Number Fields	134
The Comments on this Chapter	147
3. Dedekind ζ-Functions and Limit Formulae	149
§1 Dedekind ζ -Functions for the Quadratic Fields.....	149
§2 Kronecker Limit Formulae	178
The Comments on this Chapter	205
4. The general discussion of Gauss Conjectures on Class Number	206
§1 The Distribution of the Zeros and the Estimation of the Order for Dirichlet L -Function	206
§2 The Regulator $\log e$ of the Real Quadratic Fields and the Continued Fractions	229
§3 The Quadratic Euclid Fields.....	240
The Comments on this Chapter	268

5. Gauss Conjecture on Class Number for the Imaginary	
Quadratic Fields	270
§1 The Complete Determination for the Imaginary	
Quadratic Fields with Class Number One.....	271
§2 The Elliptic Curves and the Modular Forms	280
§3 Goldfeld-Gross-Zagier Theorem and It's Proof	301
The Comments on this Chapter	322
6. Gauss' Conjecture on Class Number for the Real	
Quadratic Fields	324
§1 The general discussion of Gauss' Conjecture on Class	
Number for the Real Quadratic Fields	325
§2 The Criteria for the Class Number of the Real	
Quadratic Fields to be One.....	327
§3 Representations the Class Number of the Imaginary	
Quadratic Fields by the Continued Fractions	340
§4 A Conjecture due to S.Chowla	372
§5 Goldfeld Theorem	390
The Comments on this Chapter	427
7. Hirzebruch Sum and Hecke Operators	429
§1 The Two Famous Conjectures on the Fundamental	
Unit of the Real Quadratic Fields	429
§2 An Identity for Hirzebruch Sum	430
§3 AAC Conjecture and Hirzebruch Sum.....	437
§4 Mordell Conjecture and Hirzebruch Sum	444
The Comments on this Chapter	446
References	447

绪 论

Euler 在 1772 年发现了下列有趣的事实:

当 $x = 0, 1, \dots, 40$ 时, $x^2 - x + 41$ 均是素数.

这一事实, 与所谓的 Gauss 的类数 1 问题密切相关, 因为我们有如下列的命题 A.

命题 A (Rabinovitch^[88]) 设无平方因子整数 $D < 0$, $D \equiv 1 \pmod{4}$. 则当 $x = 0, 1, \dots, \frac{|D|-3}{4}$ 时, $x^2 - x + \frac{1+|D|}{4}$ 均表

素数的充要条件是虚二次域 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ 的整数环是唯一分解的, 即 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ 的类数为 1.

由于虚二次域 $\mathbb{Q}(\sqrt{-163})$ 的类数是 1, 所以我们由定理 A 立即得出 Euler 断言的真实性.

同样的, 我们可以有下面的命题 B.

命题 B (陆洪文^[46]) 设无平方因子整数 $D = 4N^2 + 1$, 其中正整数 $N > 1$. 则当 $x = 1, 2, \dots, N-1$ 时, $N^2 - x - x^2$ 均表素数的充要条件是实二次域 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ 的整数环是唯一分解的, 即 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ 的类数为 1.

由于 $N = 13$ 时, $D = 677$, 而 $\mathbb{Q}(\sqrt{677})$ 的类数为 1, 所以我们有下列事实:

当 $x = 1, 2, \dots, 12$ 时, $169 - x - x^2$ 均是素数.

这样寻找类数为 1 的二次数域是一个既古老又很有意义的问题. 这个问题是 Gauss 提出的. Gauss 在其名著 «Disquisitiones Arithmeticae» («算术研究», 于 1801 年, Gauss 24 岁时出版) 中, 提出下列三个著名的猜想, 它们用现代语言叙述, 即为

1. 当判别式 $D \rightarrow -\infty$ 时, 虚二次域 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ 的类数 $h(D) \rightarrow$