

251418

高等学校试用教材

兴波阻力理论基础

武汉水运工程学院 李世谟编著
上海交通大学 刘应中 审

人民交通出版社

内 容 提 要

本书介绍了船波基本知识、经典薄船理论、线性理论的应用以及兴波阻力理论发展大概等内容。

该书可作为船舶制造专业的教材，也可供工程界有关技术人员和对此问题有兴趣的一般读者参考。

0192/63

目 录

前言.....	1
第一章 船波基本知识.....	6
§1 定解问题 边界条件.....	6
§2 平面进行波.....	12
§3 波能和波能传播.....	16
§4 船行波 稳定相原理.....	20
§5 从波能导出兴波阻力.....	26
第二章 经典薄船理论.....	30
§6 一项准备知识.....	30
§7 空间点源兴波速度势 Havelock 方法.....	33
§8 辐射条件 满足辐射条件的另一种方式.....	39
§9 船体运动兴波速度势 格林函数法.....	46
§10 兴波阻力 Michell 积分.....	54
§11 兴波问题的分离变量解法.....	64
§12 浅水兴波速度势及阻力.....	81
§13 狭窄航道兴波速度势及阻力.....	90
§14 理论计算与试验结果的比较.....	94
第三章 兴波理论的发展.....	100
§15 高阶理论.....	100
1. Wehausen 的高阶理论.....	100
2. 摄动法的引用.....	106
3. Eggers 二阶理论.....	113
4. Kitazawa 和 Takagi 的工作.....	119
§16 Neumann-Kelvin 问题.....	124
1. R. Brard 的理论.....	127

2. Y. Kayo 的工作.....	131
§17 Guilloton-Gadd 方法 坐标变形法.....	135
1. Guilloton-Gadd 方法.....	136
2. Noblesse 1975 年的工作.....	143
3. Noblesse 和 Dagon 1976 年的工作.....	151
§18 慢船理论.....	155
1. 波动势 Φ 量级分析及应用.....	156
2. 慢船理论自由面边界条件.....	160
3. Baba 对波动势 Φ 的解.....	163
4. Kitazawa 和 Kajitani 的工作.....	166
§19 射线理论.....	170
1. U-I-K 理论.....	171
2. Keller 的射线理论.....	181
第四章 线性理论的应用.....	185
§20 波形测量和分析.....	185
1. 横切法.....	186
2. 纵切法(一) Sharma 法.....	190
3. 纵切法(二) Newman 法.....	196
§21 最小兴波阻力船型.....	201
§22 Inui 无波船型思想.....	206
§23 卞保琦优化船型方法及其发展.....	216
§24 船型改良 Baba 方法.....	226
参考文献.....	233

前 言

我们知道，船舶阻力主要由粘性阻力和兴波阻力构成。给定航速，粘性阻力与船体湿表面面积成正比。因船体湿表面面积不易改变，倘若不采取特殊措施，则减小粘性阻力的可能性不大。与之相反，在一定的弗汝德数 (F_n) 范围内，兴波阻力对船型的变化相当敏感，如适当修改船体型线，有可能使兴波阻力明显降低。因此，用理论的、试验的以及计算的手段探讨兴波的机理，预估实船的兴波阻力，并以此着手改进船型，一直为船舶阻力研究的中心内容。

理论上研究兴波阻力的历史已近百年了。然而，由于兴波现象的复杂性，而工程界对计算的精度要求又高，以至今天尚难以完全用理论预估兴波阻力和改进船型。但是，兴波问题的重要性以及它本身所特有的一种魅力，一直吸引着许多专家和工程师，为之孜孜不倦地作出努力。

早在1887年，Kelvin就发表了有关移动压力点兴波的重要文章。他描绘的波纹 (Pattern) 图，已清楚地再现了横波与散波，以及限制在 $\pm 19^\circ 28'$ 范围内波系的状态 (参见本书§4)。作为远场解，即令在今天，Kelvin波系在兴波理论中依然占据着重要的位置。

历史上，第一个导出波阻公式的是 Michell (1898)。他藉助富氏积分法，求得在线性自由面条件下薄船的速度势 (本书§11)，并获得以他本人名字命名的积分公式 (§10)。该公式将船型和波阻直接联系起来，成为以后许多研究的基础。到了1928年，Havelock找到了现在称之为 Kelvin (或 Havelock) 源的格林函数 (§7)，从而可用中纵剖面上分布的源汇来描述薄船的速度势 (§9)。有了源汇的速度势，就可自然地推广到浅水 (§12) 以

及狭窄航道 (§13) 的情形。经过将计算结果与试验结果加以比较, 已经发现, Michell 理论仅对极薄物体 ($B/L = 0.05 \sim 0.075$), 并当 $F_n > 0.2$ 时方可适用, 而对普通船型, 则不能精确预极兴波阻力: 低速时, 阻力曲线的峰谷过于明显; 而在高速时, 数值偏低。从计算所得波形观察, 船尾处横波偏高, 船首处第一波峰略见后移。此外, Michell 公式仅仅反映了船体纵向斜率的影响, 而与船体的下沉和纵倾无关。这些, 均与人们的观察和经验不符。

直到六十年代初 Inui 的工作出现以前, 各种改善 Michell 理论的尝试均未获成功。Inui 的主要贡献是: (一) 给定奇点分布, 用流线追踪方法得到船型, 这种船体绕流能精确地满足物面边界条件。从船型的改进角度看, 这种方法与传统的变分解法 (§21) 不同, 而是一种间接方法; (二) 改变了依靠船首尾波系相互干扰以降低波阻的被动观念, 提出在船首处安装球首, 使球首与主船体的波浪彼此抵消 (§22); (三) 发展了用立体摄影法获取船行波纹的技术, 并使之与船型的改进结合起来。Inui 的上述观点和技术在当时受到广泛重视, 从而促进了兴波研究的发展。一段时间内, 安装球首成为一种风尚, 连丰满船型也竞相安装球首。近年又开发出尾端球 (SEB) 来。接着, 卞保琦发展了 Inui 的思想, 仅利用船体本身奇点分布间的干扰, 在一定的弗汝德数范围内, 也达到了减少波阻的效果。当然, 双管齐下, 把船体上的奇点分布与首端点偶、线偶分布作为总体优化的对象 (§23), 也就容易理解了。另一方面, 在立体摄影观察波纹的启发下, 各种简便的波型测量技术相继提出 (§20)。今天, 波型测量和分析技术已经成为水池试验的常规项目。1972年, Baba 提出了结合波形分析改善船型的思想。近年来, 这方面的研究也有一定的进展。

同一时期, 改进 Michell 理论的工作也在进行。1954年, Peter 和 Stoker 认识到 Michell 理论实质上是以 B/L 为小参数展开的第一项。以后, Sizov (1961)、Wehausen (1963)、Eggers (1966) 和 Maruo (§15) 提出了各自的高阶薄船理论, 而 Kitaza-

wa 和 Takagi 则沟通了它们之间的联系。但是，用这类正则摄动展开得到的解不是一致收敛的，船首尾或尖肩的奇点处，低速情况以及组成波 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时都是产生不一致收敛的处所 (Tulin, 1978)。可以预料，随着理论阶次的升高，这些地方的奇异性会加强。

也在同一时期，Gadd 于 1973 年重新发掘出 Guilloton 方法，并用奇点法加以改造 (§17)，在计算机上实现了较多的计算，获得了意外的成功，一时间给兴波理论的发展带来了新希望。早在 1939 年，Guilloton 在他的博士论文中，就以 Michell 理论为基础，直观地提出了一种变换手段，但当时未曾受到重视。在以后 (1939—1964) 漫长岁月里，纯粹是出于一种业余爱好，他发表了一系列文章来阐述这种思想。在最后一篇文章中，Guilloton 声称：他的变换能使问题的边界条件（物面和自由面条件）满足到二阶。Emerson 也曾用 Guilloton 的方法做过计算 (1967)，结果有好有坏。一经 Gadd 的改造和计算，人们才认识到 Guilloton 方法的实用价值。1975 年，Dagon 和 Noblesse 分别独立地用坐标变形法证实，Guilloton—Gadd 法乃是一种不协调理论：边界条件满足到二阶，控制方程仍是一阶的。1976 年，他们俩人又联合著文，提出一种协调的二阶理论 (§17.3)，但缺乏数值计算的经验。

慢船理论也产生于这个时代。1968 年，Ogilvie 针对二维问题，证明按弗汝德数 F_n 展开不能获得波动解。1978 年，Vander Broeck-Schwartz-Tuck 甚至证明了：二维正则的弗汝德数 F_n 展开的收敛半径为零。为了得到波动解，Ogilvie 要求叠加于合模解上的波动是短波，其幅值是小量 $O(u^5)$ ，而导数却是增大的： $\frac{\partial}{\partial x_i} = O(u^{-2})$ 。1975 年 Baba 和 Tukakum 首次将这个观念推广到三维船体绕流的情形。后来，Newman (1976)、Maruo (1977) 和 Dawson (1977) (§18) 都重新推导了慢船理论的自由面条

件。其中, Dawson 的解本质上是一种数值法;他把 Rankine 源分布在物面和自由表面上,由物面绕流条件和经过差分离散化的自由面条件共同决定 Rankine 源的强度分布。

在慢船理论的自由面条件中可以看到,与均匀来流的情况不同,波动是叠加在合模势产生的非均匀流动上的。也许正是出于这个观念,促使 Inui 和 Kajitani(1977)把 Ursell(1960)关于波浪在不均匀流动中传播的射线理论引用过来,计算自由波的变形,并结合线性兴波理论,导出波浪阻力 (§19.1)。Tulin 认为: U-I-K 理论是不协调的,因为线性理论在小的弗汝德数情况下失效,而射线理论恰恰要求弗汝德数小。关于射线理论在兴波问题上的应用, Keller 在 1974 年便有文章发表,但似乎未受重视。1979 年,他用更严格的形式来描述这种理论,但未能最终地,一般地解决这个问题。

值得一提的是关于 N-K 问题的争论。早在 1932 年 Havelock 就提到过,准确满足物面条件但自由面条件仍为线性的解有可能改善 Michell 的理论。1936 年, Kochin 对完全潜没物体建立了相应的积分方程后,这个理论似乎一度被人遗忘了。1972 年 Brard 重新发现了它,并命名为 Newman-Kelvin 问题 (N-K) (§16)。然而,它却是一种不协调的,既非一阶又非二阶的理论。对此,争论的主要焦点是:(一)对仅精确考虑物面条件,而保留线性自由面条件,能否获得成功表示怀疑。各种特殊例子的二阶计算表明,自由面条件的非线性,尤其是波和不均匀流的干扰所引起的波浪相位的偏移,是远比物面条件重要的因素。再者, Dagan 曾证明,满足线性自由面条件的解实际上即是一个展开式之首项,而这个展开式,对固定的船体细长参数,在速度足够低的情况下是发散的!(二)在势函数表达式中有一沿船体水线的线积分项,从薄船展开的角度看,它是二阶的,应予忽略,而持不同见解者则认为,线积分恰在水面上,故实际的影响可能不小。Maruo 更认为,从实用的角度来说,不协调的理论有时会给出符合实际的结果;相反,结构合理的数学理论倒可能导致不切

实际的结论。

与这些理论发展相适应，有关的国际会议十分频繁。1975年在美国召开了第一届计算船舶流体力学会议（ICNSH，第一次出现船舶流体力学这个名称）；1976年在东京召开了第二届理论兴波阻力会议（第一届在1963年召开，两届相隔十三年！）。紧接着，1977年在Bakeley召开了第二届船舶流体力学会议。1979年和1980年先后在华盛顿和日本召开了兴波阻力专题讨论会（Workshop）；1981年在巴黎召开第三届船舶流体力学会议；1983年在华盛顿召开第二届兴波阻力专题讨论会。这里还未列入每两年一次的船舶流体力学会议（ONR/SNH）。其中，1977年的船舶流体力学会议被认为是数值计算进入兴波阻力领域的转折点（Tulin，1980）。1979年的第一次专题讨论会，对各种方法的计算结果曾作了比较，虽不能肯定谁是冠军，但指出：多种情况下，Dawson、Gadd-Guilloton方法，包括争论最大的N-K法均能给出合理的结果。后来，Doctors和Dagon(1979)以二维表面压力兴波为例，比较了四种方法，指出：U-I-K法很精确；G-G法趋势正确，定量不甚满意；Baba慢船理论结果最差。

总之，这是一个新思想、新方法层出的年代。已有的方法需要提高精度，同时又要不断探索新的途径。从目前形势看，完全用理论方法预报实船兴波理论的日子为期不会太远了。正值这个时候，李世谟教授的这本书问世了。本书以简练的笔法概括了线性理论的主要内容，系统地总结了非线性理论各方面的最新发展。在材料取舍上，博各家之长，并作了精心的对比和贯通；推导详细，数学处理严谨得当。对有一定数学、流体力学基础的青年读者，这是一本较好的指导书。掌握了本书所述的内容，便可较顺利地阅读近代文献，进入兴波理论研究的前沿。正在从事兴波阻力研究的读者也能从中受到启发，得到教益。相信本书的出版，对我国兴波阻力研究的普及和发展，将有很大促进。

上海交通大学 刘应中

1984年

第一章 船波基本知识

§1 定解问题 边界条件

取右手直角坐标系 (x, y, z) ，如图 1-1 所示。 x 和 y 轴位于未扰水面上， z 轴向上。当结合物体或奇点运动来考察时，则令 x 轴以运动方向为正。而当以船舶运动为考察对象时，则进一步认为 $x-z$ 平面与船舶之中纵剖面吻合。

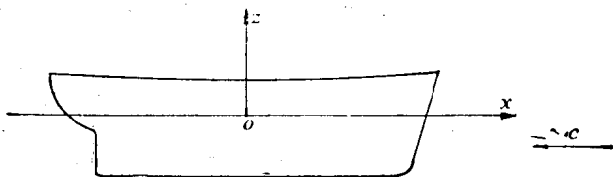


图 1-1

取一般情况下的空间固定坐标系 $o'-x'y'z'$ ，此时的流场是时间 t 的函数。当考虑物体或奇点作等速直线运动时，可以认为其周围之流场，经过一定时间后已趋于稳定。此刻则取随动坐标 $o-xyz$ ，并令该坐标随物体作等速直线运动，而流场相对于随动坐标则为定常。设物体以速度 c 沿 x 轴正向运动，对随动坐标而言相当于有速度为 $-c$ 的均匀来流。从因此二坐标系有如下的关系：

$$x' = x + ct; \quad y' = y; \quad z' = z$$

不过，以后为便于书写，不论取何种坐标，其坐标值均由 (x, y, z) 表示，仅在必要时在叙述中加以说明。

假定所考虑的流体为理想流体，无粘性，其运动无旋，从而

有流速势 $\Phi(x, y, z, t)$ 存在。对于相对于随动坐标之定常流动而言，其流速势则写为 $\Phi(x, y, z)$ ；它可视为均匀来流势 $-cx$ 和扰动势 $\varphi(x, y, z)$ 的叠加结果，即

$$\Phi(x, y, z) = -cx + \varphi(x, y, z) \quad (1-1)$$

倘若能求出流速势，随即可求得各速度分量。例如，相对于空间固定坐标的绝对运动，有

$$\begin{aligned} \Phi_x &= u'(x, y, z, t) \\ \Phi_y &= v'(x, y, z, t) \\ \Phi_z &= w'(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (1-2)$$

而相对于上述随动坐标的流场，则有

$$\begin{aligned} \Phi_x &= -c + \varphi_x = -c + u(x, y, z) \\ \Phi_y &= \varphi_y = v(x, y, z) \\ \Phi_z &= \varphi_z = w(x, y, z) \end{aligned} \quad (1-3)$$

这里，下脚标 x, y, z 表示对 x, y, z 求偏导，而 u, v, w 以及 u', v', w' 则为相应的速度分量。

一般认为，水是不可压缩的。按此，根据连续条件可知 $\text{div} \vec{V} = 0$ ，即

$$u_x' + v_y' + w_z' = 0$$

或

$$u_x + v_y + w_z = 0 \quad (1-4)$$

将各分速与流速势之关系(1-2)和(1-3)式代入，可得泛定方程，即拉普拉斯方程如下：

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0 \\ \nabla^2 \Phi &= \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0 \\ \nabla^2 \varphi &= \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0 \end{aligned} \quad (1-5)$$

可以看到，不论流动是否定常，其运动学的控制方程都是拉普拉斯方程。

为了求解拉氏方程，尚须给出边界条件，而对非定常情况，则还需要给出初始条件。

所谓边界是指两种介质之分界面，其运动学条件可以叙述

为：流体一旦在边界上将不脱离边界。倘若将边界面 F 视为运动的、变化的，则在 F 上的流体质点沿边界面法线方向之速度 Φ_n 应等于边界面上相应点在其法线方向之速度 v_n 。唯有满足此项条件，流体质点方不致穿过或脱离边界面。现今边界面方程为

$$F(x, y, z, t) = 0 \quad (1-6)$$

其上之质点的法向速度 v_n 可写作

$$v_n = \frac{v_x F_x + v_y F_y + v_z F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \quad (1-7)$$

式中 v_x , v_y 及 v_z 表示该点在三个坐标轴方向之分速。注意到 F 对 t 求全微分，有

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_x F_x + v_y F_y + v_z F_z = 0$$

故

$$v_n = \frac{-\frac{\partial F}{\partial t}}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \quad (1-8)$$

而边界面上流体质点的法向速度可写为

$$\Phi_n = \frac{\Phi_x F_x + \Phi_y F_y + \Phi_z F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \quad (1-9)$$

按前述边界运动学条件 $v_n = \Phi_n$ ，可得

$$F_t + \Phi_x F_x + \Phi_y F_y + \Phi_z F_z = 0 \quad (1-10)$$

对于固定边界，显然有 $\Phi_n = 0$ ，或

$$\Phi_x F_x + \Phi_y F_y + \Phi_z F_z = 0 \quad (1-11)$$

譬如，对水底而言，令其方程为 $z = -h$ ，即 $F = z + h = 0$ 。此时 $F_x = F_y = 0$, $F_z = 1$ ，故边界条件写为

$$\Phi_z = 0 \quad \text{当 } z = -h \text{ 时} \quad (1-12)$$

对无限水深，则写成

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \Phi_z = 0 \quad (1-13)$$

现在，考察自由液面情况，令其方程为

$$z = E(x, y, t) \quad (1-14)$$

或写成

$$F = E(x, y, t) - z = 0 \quad (1-14')$$

应用(1-10)式可写出其运动学边界条件为:

$$E_t + \Phi_x E_x + \Phi_y E_y - \Phi_z = 0 \quad (1-15)$$

若再进一步作微幅波假定, 则 E_x 、 E_y 、 Φ_x 和 Φ_y 均为一阶小量, 忽略二阶小量 $\Phi_x E_x$ 和 $\Phi_y E_y$, 则上式线性化为

$$E_t(x, y, t) = \Phi_z(x, y, E, t) \quad (1-16)$$

此式应在波面 E 上被满足。但据所作微幅波假定, 也可以认为此式在 $z=0$ 平面上被满足, 即

$$E_t(x, y, t) = \Phi_z(x, y, 0, t) \quad (1-16')$$

自由液面除了运动学条件以外, 还需考虑动力学条件, 即等压条件。为此, 利用拉格朗日积分并适当选取积分常数, 写得

$$-\frac{1}{\rho}(p - p_a) = \Phi_t + \frac{1}{2}V^2 + gE \quad (1-17)$$

利用等压条件, 在液面 E 上 $p = p_a$, 则有

$$gE + \frac{1}{2}V^2 + \Phi_t = 0 \quad (1-18)$$

若忽略二阶小量 $\frac{1}{2}V^2$, 并认为上式可在 $z=0$ 平面上被满足,

则得自由液面线性化动力学条件如下:

$$E = -\frac{1}{g}\Phi_t(x, y, 0, t) \quad (1-19)$$

消去(1-16')和(1-19)二式中之未知量波高, 有

$$\Phi_{tt} + g\Phi_z = 0 \quad \text{在 } z=0 \text{ 平面上} \quad (1-20)$$

此式即为非定常运动线性自由面条件。

至此, 我们转而推导随动坐标系中定常流动的自由液面边界条件。令自由面方程为 $z = E(x, y, z)$, 可写出其运动学条件为

$$\Phi_x E_x + \Phi_y E_y - \Phi_z = 0 \quad (1-21)$$

注意到(1-3)式, 以扰动速度势 φ 代替上式中之 Φ , 有

$$cE_x = -\varphi_z + \varphi_x E_x + \varphi_y E_y \quad (1-22)$$

忽略二阶小量 $\varphi_x E_x$ 和 $\varphi_y E_y$, 尔后可得

$$cE_x = -\varphi_z \quad (1-23)$$

此即线性化的定常运动自由面运动学条件。

应用伯努利方程, 对波面以及远前方液面, 类似式(1-17), 就定常运动而言, 有

$$-\frac{1}{\rho}(p - p_a) = \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) + gE - \frac{1}{2}c^2$$

用 $\Phi_x = -c + \varphi_x$ 代入, 并利用等压条件, 可得

$$gE = c\varphi_x - \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) \quad (1-24)$$

仍略去二阶小量 $\frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2)$, 则上式变为

$$gE = c\varphi_x \quad (1-25)$$

此式就是线性化的定常运动自由面动力学条件。

消去(1-23)和(1-25)两式中未知波高 E , 有

$$\varphi_{xx} + \frac{g}{c^2}\varphi_z = 0 \quad \text{在 } z = E \text{ 上} \quad (1-26)$$

此即定常运动线性自由面条件, 它应在自由面 E 上被满足, 但同样由于微幅波假定, 故也可近似地取为在未扰平面 $z=0$ 上被满足, 即

$$\varphi_{xx}(x, y, 0) + \frac{g}{c^2}\varphi_z(x, y, 0) = 0 \quad (1-26')$$

用 K_0 表示式中的 g/c^2 , 即所谓波数, 其意义将在下节讨论。

现在再来看随动坐标系中船体表面的边界条件。令船体表面方程为

$$y = f(x, z)$$

或

$$F(x, y, z) = y - f(x, z) = 0 \quad (1-27)$$

按(1-10)式, 对定常流动, 可得

$$-\Phi_x f_x + \Phi_y - \Phi_z f_z = 0$$

引入 Φ 与扰动势 φ 之关系, 整理后得

$$\varphi_y = -cf_x + \varphi_x f_x + \varphi_z f_z \quad (1-28)$$

作薄船假定, 可将 f_x 、 f_z 视为一阶小量, 略去高阶项, 并取上式在 $y=0$ 处被满足, 从而可得线性化的物面条件:

$$\varphi_y(x, 0, z) = -cf_x(x, z) \quad (1-29)$$

考虑了边界条件 (对非定常问题尚还有初始条件) 后, 还必须给出无穷远条件, 通常写为无穷远处扰动为零, 即

$$\nabla\varphi = 0 \quad \text{当} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty \quad (1-30)$$

对随扰动源运动的坐标系中的扰动源兴波问题而言, 还要加上远前方无波条件, 或称辐射条件, 否则问题的解将具有不定性。

为了消除这种解的不定性, Havelock 引入耗散力的概念以取代辐射条件。所谓耗散力是指流体中的一种假想的体积力, 其大小与速度成比例, 即它沿三个坐标轴方向的分力分别为 $\mu'\Phi_x$ 、 $\mu'\Phi_y$ 和 $\mu'\Phi_z$, 这里 μ' 为耗散力系数。从物理意义上看, 引入了耗散力, 远前方扰动速度应为零 (那怕此力极小, 趋近于零); 从数学意义上说, 引入了耗散力, 则在求解时便可消除解的不定性 (即令最终仍令此力趋零)。为了后文推导的需要, 现在来导出引入耗散力以后的自由面边界条件。

不难看出, 此耗散力为有势力。耗散力的势函数为 $\mu'\Phi$ 。在伯努利方程中加入此项, 可写得:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) + \frac{p_0}{\rho} + gE + \mu'\Phi \\ &= \frac{1}{2} c^2 + \frac{p_0}{\rho} + \mu'(-cx) \end{aligned}$$

将 Φ 与 φ 之关系代入上式, 整理后有

$$gE = c\varphi_x - \mu'\varphi - \frac{1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2)$$

略去高阶项, 得

$$gE = c\varphi_x - \mu'\varphi$$

将此式与自由面运动学条件 [(1-23) 式] 联立, 消去未知波高 E , 得

$$\varphi_{xx} + K_0\varphi_z - \mu\varphi_x = 0 \quad (1-31)$$

式中, $\mu = \mu'/c$ 。这就是包含耗散力的自由面边界条件。与前述

一样，也取它在 $z=0$ 处被满足。当 $\mu \rightarrow 0$ 时，(1-31)式即蜕化为(1-26')式。

§2 平面进行波

现在我们首先考虑深水平面进行波。这种波浪运动虽然简单但具有实际意义，同时，也有助于我们对波浪要素的理解。

由于是平面问题，其泛定方程可写成：

$$\Phi_{xx}(x, z, t) + \Phi_{zz}(x, z, t) = 0 \quad (2-1)$$

其自由面边界条件仍为

$$\Phi_{tt}(x, 0, t) + g\Phi_z(x, 0, t) = 0 \quad (2-2)$$

深水情况下，水道底部条件为

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \Phi_z(x, z, t) = 0 \quad (2-3)$$

用分离变量法解拉氏方程(2-1)，令

$$\Phi(x, z, t) = T(t)X(x)Z(z)$$

代入(2-1)式，有

$$T(t)Z(z)X_{xx}(x) + T(t)X(x)Z_{zz}(z) = 0$$

以 $T(t)X(x)Z(z)$ 除之，得

$$\frac{Z_{zz}(z)}{Z(z)} = -\frac{X_{xx}(x)}{X(x)}$$

上式二侧各为一元函数，但二侧又相等，故必定等于一常数。现记此常数为 K^2 ， $K^2 > 0$ （对 $K^2 \leq 0$ 情况，由于不合波动性质，不予讨论），于是，上式化为两个常微分方程：

$$X_{xx}(x) + K^2 X(x) = 0$$

$$Z_{zz}(z) - K^2 Z(z) = 0$$

其解分别为

$$X(x) = a \sin Kx + b \cos K(x) = a_1 \sin(Kx + \varepsilon_1)$$

$$Z(z) = ce^{Kz} + de^{-Kz}$$

按水底条件(2-3)，可知 $d=0$ ，故所求速度势 Φ 可写为

$$\Phi(x, z, t) = a_2 T(t) e^{Kz} \sin(Kx + \varepsilon_1)$$

将此式代入自由面边界条件(2-2)式,有

$$T_{tt}(t) + gKT(t) = 0$$

其解与 $X(x)$ 类似, 可写为

$$T(t) = e \sin \omega t + f \cos \omega t = e_1 \cos(\omega t + \tau)$$

式中

$$\omega^2 = gK \quad (2-4)$$

将 $T(t)$ 代入 $\Phi(x, z, t)$, 因系数取决于初始条件, 故我们可适当选择坐标原点, 把 Φ 写成比较简便的形式, 如

$$\Phi(x, z, t) = \frac{Ag}{\omega} e^{Kz} \sin(Kx - \omega t) \quad (2-5)$$

据(1-19)式, $E = -\frac{1}{g} \Phi_t \Big|_{z=0}$, 我们有波高表达式为

$$E = A \cos(Kx - \omega t) \quad (2-6)$$

此为一余弦波动式, 即对给定的时刻 t , 波面随 x 作余弦波动, A 为振幅。令相位相同的相邻两点之间距为波长 λ , 则当 $x = \lambda$ 时, 波面应恰好完成一个波动周期 2π , 即

$$K\lambda = 2\pi \quad \text{或} \quad K = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2-7)$$

K 称为波数, 意即 2π 距离内所容纳的波长数。波数愈大, 则波长愈小, 反之亦然。

若在既定的空间点上, x 固定, 波面也作余弦振荡。令其周期为 T , 则有

$$\omega T = 2\pi \quad \text{或} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2-8)$$

ω 称波动频率。

频率与波数间存在(2-4)式表示的关系。借用光学术语, 此关系可称为色散关系。不过要注意, 这一关系由深水重力波自由面边界条件导出, 故反映了深水重力波的特征。倘若考虑浅水或另加考虑表面张力, 则将获得不同的关系式。

当 x 和 t 同时变化时, 取波动的同一相位, 如令