# 塑性力学

B·B·索科羅夫斯基著

建築工程出版社

**內容提要** 本書系研究塑性力学中的一系列新問題：彈塑性变形理論和塑性流动理論之間的关係；解平面彈塑性問題的新方法；梁和平板的弯曲理論；棱柱形杆和变直徑圓杆的扭轉問題；在塑性条件下的平面变形狀态等。

本書特別注意有实际意义的問題的解答，列举了許多实例來加以詳細推論，并对各例題附有图表解析，使計算簡便，也使讀者便於閱讀。

本書供技術工程人員和科学研究者参考之用。

**原本說明**

| | |
|---|---|
| 書　　名 | ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ |
| 作　　者 | В. В. Соколовский |
| 出 版 者 | Государственное издательство технико-теоретической литературы |
| 出版地点及年份 | Москва—1950—Ленинград |

塑 性 力 学

王振常譯

*

建筑工程出版社出版（北京市阜成門外南禮士路）

（北京市書刊出版業營業許可証出字第052号）

建筑工程出版社印刷廠印刷·新華書店發行

書号142 字數313千字 787×1092 1/25 印張 15 3/25

1957年4月第1版 1957年4月第1次印刷

印數：1—5,360册 定價（10）2.10元

# 目　錄

**内容提要**　本書系研究塑性力学中的一系列新問題：彈塑性变形理論和塑性流动理論之間的关係；解平面彈塑性問題的新方法；梁和平板的弯曲理論；棱柱形杆和变直徑圓杆的扭轉問題；在塑性条件下的平面变形狀态等。

本書特别注意有实际意义的問題的解答，列举了許多实例來加以詳細推論，并对各例題附有图表解析，使計算簡便，也使讀者便於閱讀。

本書供技術工程人員和科学研究者参考之用。

**原本說明**

| | |
|---|---|
| 書　名 | ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ |
| 作　者 | В. В. Соколовский |
| 出版者 | Государственное издательство технико-теоретической литературы |
| 出版地点及年份 | Москва—1950—Ленинград |

塑　性　力　学

王振常譯

＊

建筑工程出版社出版（北京市阜成門外南礼士路）

（北京市書刊出版業營業許可証出字第052号）

建筑工程出版社印刷廠印刷・新華書店發行

書号142　字數313千字　787×1092 1/25　印張 15 3/25

1957年4月第1版　1957年4月第1次印刷

印數：1—5,360册　定價（10）2.10元

# 目　錄

# 第二版 序 言

本書第二版在发行前几乎完全經过修改。它包括第一和第二版发行期間所研究出的一系列新問題，就是：物体的簡單加荷重；彈塑性变形理論和塑性流动理論之間的联系；在彈塑性变形理論中的卸荷重；应力分量和变形分量的三角表达式；在冪硬化时圓錐形杆的扭轉；解平面問題的新方法；平面彈塑性問題的比拟；在一般塑性条件下，平面变形狀态；塑性楔在各种荷重作用下的平面平衡；塑性質体在剛壁之間的平面平衡及軸向对称平衡，在冪硬化时圓盤的等速旋轉和圓形平板的彎曲。

大量的补充材料引起一系列新章的增加，同时又引起一系列旧章的認眞修改，自然也使篇幅大为增加。但是为了使篇幅的增加以某范圍为限，故在第二版中沒有包括第一版中所述的一系列問題，該种問題可以删去，并且無多大損失。新版簡要內容如下：

第一章和第二章——引論，其中說明兩个塑性理論：彈塑性变形理論和塑性流动理論。这些理論的基本方程式首先是用主法向应力、主伸長和主伸長速度來表示；其次，这些方程式是用在正交直綫座标、圓柱形座标或球面座标上的应力分量、变形分量和变形速度分量來表示。敍述关于簡單加荷重的概念和建立彈塑性变形理論与塑性流动理論之間的联系。又給出以后在解个别問題时广泛采用的应力分量和变形分量的三角表示式。

第三章包括在实际上有意义的彈塑性問題：关于厚壁圓筒和球形容器在內外压力作用下的平衡以及关于圓盤的等速旋轉。这些問題在任意硬化塑性条件下，按彈塑性变形理論考虑；研究材料無論在彈性或塑性狀态下可压縮性的影响。

第四章是关于棱柱形杆的扭轉和变直徑圓杆的扭轉。用解析方法研究棱柱形杆的塑性扭轉及解关于長圓形横截面的棱柱形杆扭轉的彈

塑性問題(具有閉合形式)。研究变直徑圓杆的塑性扭轉，特别是研究阶梯形和圓錐形杆的扭轉。又給出在帶硬化的冪塑性条件下，关于圓錐形杆扭轉問題的簡單解。

第五～八章講解平面变形狀态。詳細研究塑性平衡方程式和使其向正則方程組的变換，并給出数值积分的方法。闡述兩个使很多問題有解析形式解答的新方法。

特别注意一系列有实际意义的問題的提出和解决：关于孔洞周圍应力的分布；关于冲模在塑性体上的压力；关于塑性条形的压縮和牽引。按特征綫法建立待求的解歸結为正則方程組边界問題的組合，而按新方法可有三角級数或閉合形式的解答。

在第九章是研究平面应力狀态。詳細研究切应力强度为常数和最大切应力为常数时塑性平衡方程式。在关于薄板极向对称拉伸的最簡單問題上指出了这些情形的区别。研究一系列关于有非圓孔的薄板各向拉伸問題；其中若干可有閉合形式的解。

比較在平面变形和平面应力狀态时相当問題的解答結果，即可显出这些狀态的特点。

第十章叙述在以任意形式的极限曲綫所确定的塑性条件下平面变形狀态。研究塑性平衡方程式，將它們变換为正則方程組，并解答某些問題。

当极限曲綫是擺綫时，发現可以求得最簡單的結果，因为这时塑性平衡方程式有簡單的积分。研究关于矩形和条形的压縮問題，而且它們的解有閉合形式。

第十一章和第十二章講解塑性楔在各种荷重作用下的平面平衡，以及在帶硬化的冪塑性条件下塑性質体的平面平衡和軸向对称平衡。某些問題的解有閉合形式；其余問題的解歸結为非綫性常微分方程式的积分。

在無硬化的塑性情形下，可以求得一系列問題的簡單解答，就是：关于半平面彈塑性平衡的平面問題和关于塑性質体在圓錐形壁內部平衡的軸向对称問題。

第十三、十四章包括梁和平板的弯曲理論，該理論系根据普通几何假設。研究梁弯曲的各种情形，其横截面有兩个或一个对称軸，以及導

出任意形狀的平板弯曲的基本方程式。詳細研究关于在各种外荷重和周边約束下圓形和环形平板彈塑性的弯曲問題，而且研究在增加荷重时塑性区域沿平板厚度的扩展。在帶硬化的幂塑性条件下，采用特别簡單形式的解答。

各章列举很多例子来闡明，这可使在技术应用部門的工作人員便于閱讀。这些例子附有图綫和表格，而且以后为了簡便，只給出兩位小数，但計算是进行得很精确的。

为了在全書中保持同样的符号，故对于本書第一版和在新的參考著作中所采用的符号不得不作很多的改变。几乎所有章节的号数也都重新改編过。

为了方便起見，參考書籍列为独立目录附于本書末，文內对此目录的引証标以帶方括号的数字。

最后，Л.С.雷本森(Лейбензон)和С.А.赫列斯契雅諾維奇(Христианович)对本書的关懷，著者謹向他們深致謝意，并誠懇地向所有对第一版发表評論和意見的各位表示感激。对А.М.柯契高夫(Кочетков)帮助整理手稿付印，著者亦謹表謝忱。

B.B.索科羅夫斯基

莫斯科　1950年4月

# 引　論

固体变形一般包括弹性部分和殘余部分。按照殘余部分可能有的数值可以說明物体的塑性或脆性。

当殘余变形并未显著减弱微粒之間的联系且其值較大时(比彈性变形)，此种物体狀态称为塑性的；反之，在破坏开始之前，殘余变形較小时(比彈性变形)，此种物体狀态就称为脆性的。这兩种狀态可以在一定条件下表現在同一物体中，而不是可永远屬于某一任何材料的特性。例如，大理石圓柱若在軸向受压則破坏如脆性物体，但若各向受压則表現塑性的特性。材料的基本力学特性已由簡單拉伸試驗得到。試驗通常是在拉力試驗机上使圓柱形試件以常速度承受拉伸。实际的应力值 $\sigma$ 和变形值 $\varepsilon$ 由某一曲綫表示——所謂拉伸图。

当在受拉試件上逐漸增加軸向力时，即是加荷重的过程在进行中。到某一数值 $\sigma_e$ ——彈性极限为止，材料就处于彈性狀态，而应力 $\sigma$ 和变形 $\varepsilon$ 的关系以直綫表示；过此极限后材料就轉入塑性狀态，而二者的关系由傾斜曲綫表示。从一个狀态轉到另一个狀态可以是逐漸地，也可以从一尖峰开始，这对軟鋼，在图 1 和 2 中可以看出。

在塑性狀态开始时，应力通常保持为常量 $\sigma_s$ ——屈服极限，在曲綫上形成水平綫段——屈服阶段；然后应力从新單調地增加到某数值 $\sigma_b$ ——强度极限，此后即破坏。

有时完全沒有屈服阶段，而从加荷重开始 $\sigma$ 和 $\varepsilon$ 的关系即为光滑曲綫，这对退火的銅如图 3 所示。

試件的横向縮短与縱向伸長在彈性极限內的比值为常数，称为 С. 波桑(Пуассон)系数，以 $\nu$ 表示。确定相对密度变化的体积变形可用 $(1-2\nu)\varepsilon$ 表示。

試件横向縮短和縱向伸長在彈性极限之后的比值为变数，但是随着变形的增加而趋近于本身的极限值 1/2 因为甚至在塑性变形較大

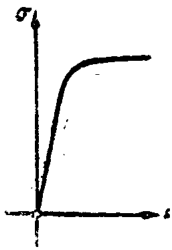


圖 1

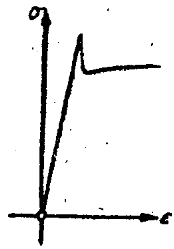


圖 2

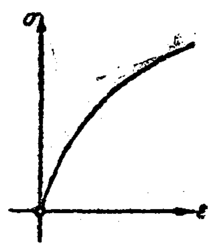


圖 3

时，試驗也祇給出非常小(为百分之分数)的相对密度变化。

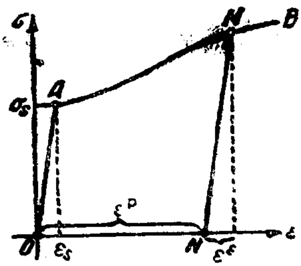


圖 4

由試驗方法求得的实际应力 $\sigma$ 和变形 $\varepsilon$ 的关系，可用图綫表示为拉伸图形式，如图 4 所示。

首先，当 $\varepsilon \leqslant \varepsilon_s$ 时，根据P.虎克(Гук)定律，应力与变形成正比

$$\sigma = E\varepsilon$$

在拉伸图上以直綫綫段 $OA$ 表示；其次当 $\varepsilon \geqslant \varepsilon_s$ 时，应力用变形的某函数表示:

$$\sigma = f(\varepsilon)$$

在同一图上表現为角系数 $d\sigma/d\varepsilon$ 比 $E$ 小許多倍的曲綫 $AB$ 形式。

$\sigma$ 和 $\varepsilon$ 在彈性极限以后的关系，除去有显著 $d\sigma/d\varepsilon$ 变化的小間段外，常常可以用綫性函数表示:

$$\sigma = \sigma_s + E_1(\varepsilon - \varepsilon_s),$$

而拉伸图中的曲綫可以用有角系数 $E_1$——硬化模量的斜直綫代替。硬化模量通常比彈性模量 $E$ 小許多倍。这时，取相当于两条直綫交点的应力为屈服极限。

从开始加荷重起，$\sigma$ 和 $\varepsilon$ 的非綫性关系在拉伸图中表示为光滑的單調增長的曲綫，通常可有足够精确度用含有两个常数 $K$ 和 $\mu$ 的冪函数近似地表示:

$$\sigma = K\varepsilon^{\mu}。$$

变形 $\varepsilon$ 可認为是由兩部分組成——彈性的(用字母 e 表示)和塑性的(用字母 p 表示),且可表示为总和的形式:

$$\varepsilon=\varepsilon^{e}+\varepsilon^{p}。$$

彈性变形确定如形式:

$$\varepsilon^{e}=\frac{\sigma}{E},$$

而塑性变形可由差数求得:

$$\varepsilon^{p}=\varepsilon-\frac{\sigma}{E}。$$

当逐漸減小受拉試件上的軸向力 时,則卸荷重过程即在进行中。这个过程用虎克定律确定,其中变形由新狀态計算

$$\sigma=E\varepsilon^{e}=E(\varepsilon-\varepsilon^{p})。$$

假若 用符号 * 标記卸荷 重开始瞬时,則以上 的关系 也可以 这样表示:

$$\sigma=\sigma^{*}+E(\varepsilon-\varepsilon^{*})。$$

当完全取消軸向力时,試件的殘余变形 $\varepsilon^{r}$ 將是

$$\varepsilon^{r}=\varepsilon^{p}=\varepsilon^{*}-\frac{\sigma^{*}}{E},$$

而且彈性变形常常可以忽略。

在全部过程中,$\sigma$ 和 $\varepsilon$ 的关系为綫性的

$$\sigma=E(\varepsilon-\varepsilon^{p})\text{或}\ \sigma=\sigma^{*}+E(\varepsilon-\varepsilon^{*}),$$

而在拉伸图中用有角系数 $E$ 的直綫 $MN$ 表示。

以上所研究的祇是材料在彈性极限后最簡單的特性。那些塑性現象如鬆弛、后效、蠕变、疲劳等,我們此处不講。

在簡單拉伸中所观察出的材料的这些最簡單特性,可以运 用到物体承受任意荷重作用下所產生的复杂应力狀态。对物体在彈性极限后的复杂应力狀态的研究構成下面全部內容。

# 第一章　塑性理論

确定固体空間变形的塑性理論可以分为兩类，視其是否以联系应力和变形的方程式或者以联系应力和变形速度的方程式为基础而異。

对这最簡單的兩类，我們規定称为彈塑性变形理論和塑性流动理論，現今获得了很大的发展。由于上述理論的簡單性和严整性，同时又与試驗相当符合，故被采用來解很多实际重要的問題。

在建立塑性理論时，將基本方程式用主法向应力、主伸長或主伸長速度來表示較为方便。

## 第一節　主應力

如所周知，物体內任意点$M$的应力狀态可以用应力主軸1、2、3的三个方向和三个主法向应力$\sigma_1$、$\sigma_2$、$\sigma_3$來确定。这三个主法向应力作用在垂直于相当主軸的微分面上，其上幷無切应力。因而，在所考慮的点上，任何应力狀态都可以由在三个互相垂直的主方向上的拉伸產生。

除去用$\sigma_1$、$\sigma_2$、$\sigma_3$外，也宜利用平均法向应力

$$\sigma=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) \tag{1.1}$$

和三个所謂減化主法向应力

$$s_i=\sigma_i-\sigma \quad (i=1,2,3), \tag{1.2}$$

这些減化主法向应力滿足显然的恒等式

$$s_1+s_2+s_3=0.$$

也可以采用主切应力代替減化主法向应力

$$\tau_1=\frac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_3),\quad \tau_2=\frac{1}{2}(\sigma_3-\sigma_1),\quad \tau_3=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2),$$

它們彼此之間以恒等式联系

$$\tau_1+\tau_2+\tau_3=0。$$

且作用在那些微分面上，其中每一微分面經过主軸之一，而且平分其他二主軸之間的夾角。

然后我們來考慮正值❶

$$S=\sqrt{\frac{2}{3}[\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2]}=\sqrt{\frac{1}{2}[s_1^2+s_2^2+s_3^2]} \tag{1.3}$$

和下列等式决定的 $\omega_\sigma$ 值

$$\operatorname{tg}\omega_\sigma=\frac{\sqrt{3}\,\tau_3}{\tau_1-\tau_2}=-\frac{s_1-s_2}{\sqrt{3}\,s_3}.$$

其中第一式称为**切应力强度**，它也可以用下列形式表示：

$$S=\sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2+(\sigma_1-\sigma_2)^2]}, \tag{1.4}$$

并且在塑性理論中起着显著作用。

根据前面等式，三个量 $s_1$、$s_2$、$s_3$ 可用 $S$ 和 $\omega_\sigma$ 表示如下形式：❷

$$\left.\begin{matrix}s_1\\s_2\end{matrix}\right\}=\frac{2}{\sqrt{3}}S\cos\left(\omega_\sigma\mp\frac{\pi}{3}\right),\quad s_3=-\frac{2}{\sqrt{3}}S\cos\omega_\sigma, \tag{1.5}$$

而三个量 $\tau_1$、$\tau_2$、$\tau_3$ 可用 $S$ 和 $\omega_\sigma$ 这样确定：

$$\left.\begin{matrix}\tau_1\\\tau_2\end{matrix}\right\}=-S\sin\left(\omega_\sigma\mp\frac{\pi}{3}\right),\quad \tau_3=S\sin\omega_\sigma。 \tag{1.6}$$

这样，为了說明在一点上的应力狀态，除去用主法向应力 $\sigma_1$、$\sigma_2$、$\sigma_3$ 外，采用三个量 $\sigma$、$S$、$\omega_\sigma$ 也是方便的。

我們用引入**八面体应力**向量的方法給量 $\sigma$、$S$ 和 $\omega_\sigma$ 以力学解釋，該向量就是作用在与主軸 1、2、3 作同样傾斜的平截面 Π 上的应力向量（图 5）。假若这个向量的法向分量和切向分量以及切向分量在平面 Π 上的方向为已知，則这个向量即被确定。

我們利用已知的变換公式

$$\left.\begin{aligned}\sigma_n&=\sigma_1 l^2+\sigma_2 m^2+\sigma_3 n^2,\\ \sigma_u^2+\tau_u^2&=\sigma_1^2 l^2+\sigma_2^2 m^2+\sigma_3^2 n^2,\end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

---

❶ 所有平方根都認爲是正。

❷ 上面的符號"－"屬於 $s_1$，而下面的符號"＋"屬於 $s_2$，在以后常會遇到這種類似寫法。