

塑性力学

B·B·索科羅夫斯基著

建築工程出版社

內容提要 本書系研究塑性力學中的一系列新問題：彈塑性變形理論和塑性流動理論之間的關係；解平面彈塑性問題的新方法；梁和平板的彎曲理論；棱柱形杆和變直徑圓杆的扭轉問題；在塑性條件下的平面變形狀態等。

本書特別注意有實際意義的問題的解答，列舉了許多實例來加以詳細推論，並對各例題附有圖表解析，使計算簡便，也使讀者便於閱讀。

本書供技術工程人員和科學研究者參考之用。

原本說明

書名 ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ
作者 В. В. Соколовский
出版者 Государственное издательство технико-теоретической литературы
出版地點及年份 Москва—1950—Ленинград

塑 性 力 學

王振常譯

*

建築工程出版社出版（北京市東城門外南門外大街）

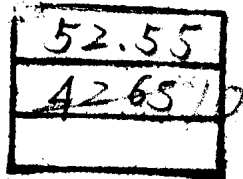
（北京市書刊出版營業許可証出字第053號）

建築工程出版社印刷廠印刷 • 新華書店發行

書號442 字數313千字 787×1092 1/32 印張 15 3/25

1957年4月第1版 1957年4月第1次印刷

印數：1—5,360冊 定價（10）24.10元



目 錄

第二版序言	7
引 論	10
第一章 塑性理論	13
第 一 節 主应力	13
第 二 節 主变形和主变形速度	18
第 三 節 切应力强度不变条件及其推廣	20
第 四 節 最大切应力不变条件及其推廣	23
第 五 節 彈性变形理論的基本方程式	27
第 六 節 彈塑性变形理論的基本方程式	29
第 七 節 应力强度与变形强度的关系。卸荷重的基本方程式	34
第 八 節 塑性流动理論的基本方程式	38
第二章 塑性平衡的基本方程式	41
第 九 節 应力張量。平衡方程式	41
第 十 節 变形張量和变形速度張量	45
第 十一 節 彈性变形理論和彈塑性变形理論的基本方程式	49
第 十二 節 应力分量和变形分量的三角表达式。力学的相似	53
第 十三 節 物体的加荷重和卸荷重过程	56
第 十四 節 塑性流动理論的基本方程式	60
第三章 彈塑性平衡的最簡單問題	63
第 十五 節 在内外压力作用下圓筒的平衡	63
第 十六 節 圓筒的純塑性状态	65
第 十七 節 圓筒的彈塑性状态	67
第 十八 節 在内外压力作用下球形容器的平衡	73
第 十九 節 圓盤的等速旋轉	78
第 二十 節 旋轉圓盤的純塑性状态	80
第 二十一 節 旋轉圓盤的彈塑性状态	85
第 二十二 節 在帶硬化的彈塑性条件下圓盤的应力状态	88
第四章 杆的塑性扭轉	92
第 二十三 節 棱柱形杆的扭轉	92

第二十四節	彈性方程式和塑性方程式	94
第二十五節	純塑性扭轉	97
第二十六節	幾個彈塑性扭轉問題	101
第二十七節	純塑性和彈塑性扭轉的比拟	106
第二十八節	變直徑圓杆的扭轉	109
第二十九節	階梯形和圓錐形杆的塑性扭轉	111
第三十節	在帶硬化的韌塑性條件下，圓錐形杆的扭轉	113
第五章	塑性的平面變形狀態	116
第三十一節	平面變形狀態	116
第三十二節	應力分量的方程式。特徵綫	119
第三十三節	塑性方程式的積分	124
第三十四節	位移分量或速度分量的方程式。邊界問題	127
第三十五節	方程式的數值積分	130
第三十六節	方程式三角級數的積分。近似積分	136
第六章	在孔洞周圍塑性區域中應力的分布	140
第三十七節	在孔洞周圍應力的分布。特徵綫法	140
第三十八節	在孔洞周圍應力的分布。三角級數法	149
第三十九節	在直綫裂縫和矩形切口周圍應力的分布	151
第四十節	平面彈塑性問題的比拟	155
第七章	在塑性體上沖模的壓力	160
第四十一節	半平面和條形的平衡	160
第四十二節	凸形剛性沖模無摩擦的壓入。塑性體的直綫邊界	166
第四十三節	塑性體的曲綫邊界	170
第四十四節	凸形剛性沖模有摩擦的壓入	176
第八章	塑性條形的壓縮和牽引	183
第四十五節	半無限長和無限長塑性條形在剛板間的壓縮	183
第四十六節	有限長塑性條形的壓縮	188
第四十七節	塑性條形通過剛模的牽引	197
第四十八節	塑性條形在兩個剛性滾軸間的牽引	200
第九章	塑性的平面應力狀態	205
第四十九節	平面應力狀態	205
第五十節	當切應力強度為常數時平面應力狀態的方程式	209
第五十一節	平面應力狀態方程式的變換	214
第五十二節	當最大切應力為常數時平面應力狀態的方程式	216

第五十三節	当切应力强度为常数时有孔平板的拉伸	219
第五十四節	当最大切应力为常数时有孔平板的拉伸	228
第十章	在一般塑性条件下平面变形状态	239
第五十五節	平面变形状态的塑性条件	239
第五十六節	当極限曲綫有擺綫形式时塑性平衡方程式	242
第五十七節	矩形和条形的压縮	244
第五十八節	当極限曲綫有任意形式时塑性平衡方程式	248
第五十九節	半平面的平衡	252
第十一章	塑性楔的平面平衡	257
第六十節	楔的平面平衡	257
第六十一節	在力作用于頂点的影响下楔的压縮和弯曲	259
第六十二節	在力偶作用于頂点的影响下楔的弯曲	263
第六十三節	在均匀压力影响下楔的弯曲	268
第六十四節	半平面的彈塑性平衡	272
第十二章	塑性質体在剛壁之間的平面平衡和軸向对称平衡	276
第六十五節	关于充滿楔形区域的塑性質体平衡的平面問題	276
第六十六節	冪硬化塑性的平面問題	279
第六十七節	無硬化塑性的平面問題	285
第六十八節	关于充滿圓錐形区域的塑性質体平衡的 軸向对称問題	287
第六十九節	冪硬化塑性的軸向对称問題	290
第七十節	無硬化塑性的軸向对称問題	296
第十三章	梁和板的彈塑性弯曲	300
第七十一節	橫截面有兩個对称軸的梁的彈塑性弯曲	300
第七十二節	沿梁長度塑性区域的分布	304
第七十三節	橫截面只有一個对称軸的梁的彈塑性弯曲	308
第七十四節	三角形橫截面的梁的应力状态	312
第七十五節	平板的彈塑性弯曲	315
第七十六節	在帶硬化的冪塑性条件下平板的弯曲	322
第十四章	圓形和环形平板的彈塑性弯曲	325
第七十七節	圓形和环形平板的弯曲	325
第七十八節	圓形和环形平板的彈塑性弯曲方程式	330
第七十九節	圓形和环形平板的純塑性弯曲	337

內容提要 本書系研究塑性力學中的一系列新問題：彈塑性變形理論和塑性流動理論之間的關係；解平面彈塑性問題的新方法；梁和平板的彎曲理論；棱柱形杆和變直徑圓杆的扭轉問題；在塑性條件下的平面變形狀態等。

本書特別注意有實際意義的問題的解答，列舉了許多實例來加以詳細推論，並對各例題附有圖表解析，使計算簡便，也使讀者便於閱讀。

本書供技術工程人員和科學研究者參考之用。

原本說明

書名 ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ
作者 В. В. Соколовский
出版者 Государственное издательство технико-теоретической литературы
出版地點及年份 Москва—1950—Ленинград

塑 性 力 學

王振常譯

*

建築工程出版社出版（北京市東城門外南池子路）

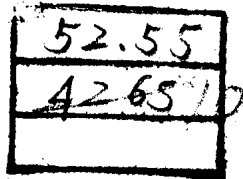
（北京市書刊出版營業許可証出字第053號）

建築工程出版社印刷廠印刷・新華書店發行

書號442 字數313千字 787×1092 1/32 印張 15 3/25

1957年4月第1版 1957年4月第1次印刷

印數：1—5,360冊 定價（10）24.10元



目 錄

第二版序言	7
引 論	10
第一章 塑性理論	13
第 一 節 主应力	13
第 二 節 主变形和主变形速度	18
第 三 節 切应力强度不变条件及其推廣	20
第 四 節 最大切应力不变条件及其推廣	23
第 五 節 彈性变形理論的基本方程式	27
第 六 節 彈塑性变形理論的基本方程式	29
第 七 節 应力强度与变形强度的关系。卸荷重的基本方程式	34
第 八 節 塑性流动理論的基本方程式	38
第二章 塑性平衡的基本方程式	41
第 九 節 应力張量。平衡方程式	41
第 十 節 变形張量和变形速度張量	45
第 十一 節 彈性变形理論和彈塑性变形理論的基本方程式	49
第 十二 節 应力分量和变形分量的三角表达式。力学的相似	53
第 十三 節 物体的加荷重和卸荷重过程	56
第 十四 節 塑性流动理論的基本方程式	60
第三章 彈塑性平衡的最簡單問題	63
第 十五 節 在内外压力作用下圓筒的平衡	63
第 十六 節 圓筒的純塑性状态	65
第 十七 節 圓筒的彈塑性状态	67
第 十八 節 在内外压力作用下球形容器的平衡	73
第 十九 節 圓盤的等速旋轉	78
第 二十 節 旋轉圓盤的純塑性状态	80
第 二十一 節 旋轉圓盤的彈塑性状态	85
第 二十二 節 在帶硬化的彈塑性条件下圓盤的应力状态	88
第四章 杆的塑性扭轉	92
第 二十三 節 棱柱形杆的扭轉	92

第二十四節	彈性方程式和塑性方程式	94
第二十五節	純塑性扭轉	97
第二十六節	幾個彈塑性扭轉問題	101
第二十七節	純塑性和彈塑性扭轉的比拟	106
第二十八節	變直徑圓杆的扭轉	109
第二十九節	階梯形和圓錐形杆的塑性扭轉	111
第三十節	在帶硬化的韌塑性條件下，圓錐形杆的扭轉	113
第五章	塑性的平面變形狀態	116
第三十一節	平面變形狀態	116
第三十二節	應力分量的方程式。特徵綫	119
第三十三節	塑性方程式的積分	124
第三十四節	位移分量或速度分量的方程式。邊界問題	127
第三十五節	方程式的數值積分	130
第三十六節	方程式三角級數的積分。近似積分	136
第六章	在孔洞周圍塑性區域中應力的分布	140
第三十七節	在孔洞周圍應力的分布。特徵綫法	140
第三十八節	在孔洞周圍應力的分布。三角級數法	149
第三十九節	在直綫裂縫和矩形切口周圍應力的分布	151
第四十節	平面彈塑性問題的比拟	155
第七章	在塑性體上沖模的壓力	160
第四十一節	半平面和條形的平衡	160
第四十二節	凸形剛性沖模無摩擦的壓入。塑性體的直綫邊界	166
第四十三節	塑性體的曲綫邊界	170
第四十四節	凸形剛性沖模有摩擦的壓入	176
第八章	塑性條形的壓縮和牽引	183
第四十五節	半無限長和無限長塑性條形在剛板間的壓縮	183
第四十六節	有限長塑性條形的壓縮	188
第四十七節	塑性條形通過剛模的牽引	197
第四十八節	塑性條形在兩個剛性滾軸間的牽引	200
第九章	塑性的平面應力狀態	205
第四十九節	平面應力狀態	205
第五十節	當切應力強度為常數時平面應力狀態的方程式	209
第五十一節	平面應力狀態方程式的變換	214
第五十二節	當最大切應力為常數時平面應力狀態的方程式	216

第五十三節	当切应力强度为常数时有孔平板的拉伸	219
第五十四節	当最大切应力为常数时有孔平板的拉伸	228
第十章	在一般塑性条件下平面变形状态	239
第五十五節	平面变形状态的塑性条件	239
第五十六節	当極限曲綫有擺綫形式时塑性平衡方程式	242
第五十七節	矩形和条形的压縮	244
第五十八節	当極限曲綫有任意形式时塑性平衡方程式	248
第五十九節	半平面的平衡	252
第十一章	塑性楔的平面平衡	257
第六十節	楔的平面平衡	257
第六十一節	在力作用于頂点的影响下楔的压縮和弯曲	259
第六十二節	在力偶作用于頂点的影响下楔的弯曲	263
第六十三節	在均匀压力影响下楔的弯曲	268
第六十四節	半平面的彈塑性平衡	272
第十二章	塑性質体在剛壁之間的平面平衡和軸向对称平衡	276
第六十五節	关于充滿楔形区域的塑性質体平衡的平面問題	276
第六十六節	冪硬化塑性的平面問題	279
第六十七節	無硬化塑性的平面問題	285
第六十八節	关于充滿圓錐形区域的塑性質体平衡的 軸向对称問題	287
第六十九節	冪硬化塑性的軸向对称問題	290
第七十節	無硬化塑性的軸向对称問題	296
第十三章	梁和板的彈塑性弯曲	300
第七十一節	橫截面有兩個对称軸的梁的彈塑性弯曲	300
第七十二節	沿梁長度塑性区域的分布	304
第七十三節	橫截面只有一個对称軸的梁的彈塑性弯曲	308
第七十四節	三角形橫截面的梁的应力状态	312
第七十五節	平板的彈塑性弯曲	315
第七十六節	在帶硬化的冪塑性条件下平板的弯曲	322
第十四章	圓形和环形平板的彈塑性弯曲	325
第七十七節	圓形和环形平板的弯曲	325
第七十八節	圓形和环形平板的彈塑性弯曲方程式	330
第七十九節	圓形和环形平板的純塑性弯曲	337

第二版 序 言

本書第二版在發行前几乎完全經過修改。它包括第一和第二版發行期間所研究出的一系列新問題，就是：物體的簡單加荷重；彈塑性變形理論和塑性流動理論之間的聯繫；在彈塑性變形理論中的卸荷重；應力分量和變形分量的三角表达式；在幕硬化時圓錐形杆的扭轉；解平面問題的新方法；平面彈塑性問題的比擬；在一般塑性條件下，平面變形狀態；塑性楔在各種荷重作用下的平面平衡；塑性質體在剛壁之間的平面平衡及軸向對稱平衡，在幕硬化時圓盤的等速旋轉和圓形平板的彎曲。

大量的補充材料引起一系列新章的增加，同時又引起一系列舊章的認真修改，自然也使篇幅大為增加。但是為了使篇幅的增加以某範圍為限，故在第二版中沒有包括第一版中所述的一系列問題，該種問題可以刪去，並且無多大損失。新版簡要內容如下：

第一章和第二章——引論，其中說明兩個塑性理論：彈塑性變形理論和塑性流動理論。這些理論的基本方程式首先是用主法向應力、主伸長和主伸長速度來表示；其次，這些方程式是用在正交直線座標、圓柱形座標或球面座標上的應力分量、變形分量和變形速度分量來表示。敘述關於簡單加荷重的概念和建立彈塑性變形理論與塑性流動理論之間的聯繫。又給出以後在解個別問題時廣泛採用的應力分量和變形分量的三角表示式。

第三章包括在實際上有意義的彈塑性問題：關於厚壁圓筒和球形容器在內外壓力作用下的平衡以及關於圓盤的等速旋轉。這些問題在任意硬化塑性條件下，按彈塑性變形理論考慮；研究材料無論在彈性或塑性狀態下可壓縮性的影響。

第四章是關於棱柱形杆的扭轉和變直徑圓杆的扭轉。用解析方法研究棱柱形杆的塑性扭轉及解關於長圓形橫截面的棱柱形杆扭轉的彈

塑性問題(具有閉合形式)。研究變直徑圓杆的塑性扭轉,特別是研究階梯形和圓錐形杆的扭轉。又給出在帶硬化的冪塑性條件下,關於圓錐形杆扭轉問題的簡單解。

第五~八章講解平面變形狀態。詳細研究塑性平衡方程式和使其向正則方程組的變換,並給出數值積分的方法。闡述兩個使很多問題有解析形式解答的新方法。

特別注意一系列有實際意義的問題的提出和解決:關於孔洞周圍應力的分布;關於沖模在塑性體上的壓力;關於塑性條形的壓縮和牽引。按特征綫法建立待求的解歸結為正則方程組 邊界問題的組合,而按新方法可有三角級數或閉合形式的解答。

在第九章是研究平面應力狀態。詳細研究切應力強度為常數和最大切應力為常數時塑性平衡方程式。在關於薄板極向對稱拉伸的最簡單問題上指出了這些情形的區別。研究一系列關於有非圓孔的薄板各向拉伸問題;其中若干可有閉合形式的解。

比較在平面變形和平面應力狀態時相當問題的解答結果,即可顯出這些狀態的特點。

第十章敘述在以任意形式的極限曲綫所確定的塑性條件下平面變形狀態。研究塑性平衡方程式,將它們變換為正則方程組,並解答某些問題。

當極限曲綫是擺綫時,發現可以求得最簡單的结果,因為這時塑性平衡方程式有簡單的積分。研究關於矩形和條形的壓縮問題,而且它們的解有閉合形式。

第十一章和第十二章講解塑性楔在各種荷重作用下的平面平衡,以及在帶硬化的冪塑性條件下塑性質體的平面平衡和軸向對稱平衡。某些問題的解有閉合形式;其餘問題的解歸結為非綫性常微分方程式的積分。

在無硬化的塑性情形下,可以求得一系列問題的簡單解答,就是:關於半平面彈塑性平衡的平面問題和關於塑性質體在圓錐形壁內部平衡的軸向對稱問題。

第十三、十四章包括梁和平板的彎曲理論,該理論系根據普通幾何假設。研究梁彎曲的各種情形,其橫截面有兩個或一個對稱軸,以及導

出任意形狀的平板彎曲的基本方程式。詳細研究關於在各種外荷重和周邊約束下圓形和環形平板彈塑性的彎曲問題，而且研究在增加荷重時塑性區域沿平板厚度的擴展。在帶硬化的彈塑性條件下，採用特別簡單形式的解答。

各章列舉很多例子來闡明，這可使在技術應用部門的工作人員便於閱讀。這些例子附有圖綫和表格，而且以後為了簡便，只給出兩位小數，但計算是進行得很精確的。

為了在全書中保持同樣的符號，故對於本書第一版和在新的參考著作中所採用的符號不得不作很多的改變。幾乎所有章节的號數也都重新改編過。

為了方便起見，參考書籍列為獨立目錄附於本書末，文內對此目錄的引証標以帶方括號的數字。

最後，Л. С. 雷本森(Лейбензон)和С. А. 赫列斯契雅諾維奇(Христианович)對本書的關懷，著者謹向他們深致謝意，並誠懇地向所有對第一版發表評論和意見的各位表示感激。對А. М. 柯契高夫(Кочетков)幫助整理手稿付印，著者亦謹表謝忱。

В. В. 索科羅夫斯基

莫斯科 1950年4月

引 論

固体变形一般包括弹性部分和残余部分。按照残余部分可能有的数值可以说明物体的塑性或脆性。

当残余变形并未显著减弱微粒之间的联系且其值较大时(比弹性变形),此种物体状态称为塑性的;反之,在破坏开始之前,残余变形较小时(比弹性变形),此种物体状态就称为脆性的。这两种状态可以在一定条件下表现在同一物体中,而不是可永远属于某一任何材料的特性。例如,大理石圆柱若在轴向受压则破坏如脆性物体,但若各向受压则表现塑性的特性。材料的基本力学特性已由简单拉伸试验得到。试验通常是在拉力试验机上使圆柱形试件以常速度承受拉伸。实际的应力值 σ 和变形值 ϵ 由某一曲线表示——所谓拉伸图。

当在受拉试件上逐渐增加轴向力时,即是加荷重的过程在进行中。到某一数值 σ_s ——弹性极限为止,材料就处于弹性状态,而应力 σ 和变形 ϵ 的关系以直线表示;过此极限后材料就转入塑性状态,而二者的关系由倾斜曲线表示。从一个状态转到另一个状态可以是逐渐地,也可以从一尖峰开始,这对软钢,在图 1 和 2 中可以看出。

在塑性状态开始时,应力通常保持为常量 σ_s ——屈服极限,在曲线上形成水平线段——屈服阶段;然后应力从新单调地增加到某数值 σ_b ——强度极限,此后即破坏。

有时完全没有屈服阶段,而从加荷重开始 σ 和 ϵ 的关系即为光滑曲线,这对退火的铜如图 3 所示。

试件的横向缩短与纵向伸长在弹性极限内的比值为常数,称为 σ ·波桑(Пуассон)系数,以 ν 表示。确定相对密度变化的体积变形可用 $(1 - 2\nu)\epsilon$ 表示。

试件横向缩短和纵向伸长在弹性极限之后的比值为变数,但是随着变形的增加而趋近于本身的极限值 $1/2$ 因为甚至在塑性变形较大

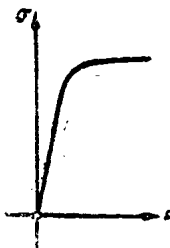


圖 1

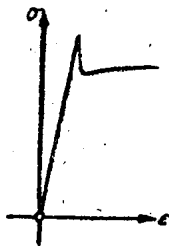


圖 2

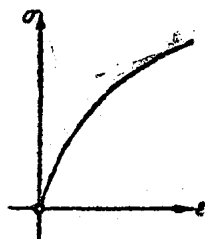


圖 3

时,試驗也祇給出非常小(为百分之分数)的相对密度变化。

由試驗方法求得的实际应力 σ 和变形 ϵ 的关系,可用图綫表示为拉伸图形式,如图 4 所示。

首先,当 $\epsilon \leq \epsilon_s$ 时,根据 P. 虎克(Гук)定律,应力与变形成正比

$$\sigma = E\epsilon$$

在拉伸图上以直綫綫段 OA 表示;其次当 $\epsilon \geq \epsilon_s$ 时,应力用变形的某函数表示:

$$\sigma = f(\epsilon)$$

在同一图上表现为角系数 $d\sigma/d\epsilon$ 比 E 小許多倍的曲綫 AB 形式。

σ 和 ϵ 在弹性极限以后的关系,除去有显著 $d\sigma/d\epsilon$ 变化的小間段外,常常可以用綫性函数表示:

$$\sigma = \sigma_s + E_1(\epsilon - \epsilon_s),$$

而拉伸图中的曲綫可以用有角系数 E_1 ——硬化模量的斜直綫代替。硬化模量通常比彈性模量 E 小許多倍。这时,取相当于兩条直綫交点的应力为屈服极限。

从开始加荷重起, σ 和 ϵ 的非綫性关系在拉伸图中表示为光滑的單調增長的曲綫,通常可有足够精确度用含有兩個常数 K 和 μ 的幂函数近似地表示:

$$\sigma = K\epsilon^\mu.$$

变形 ε 可認為是由兩部分組成——彈性的(用字母 e 表示)和塑性的(用字母 p 表示),且可表示为总和的形式:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p.$$

彈性变形确定如形式:

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E},$$

而塑性变形可由差数求得:

$$\varepsilon^p = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}.$$

当逐渐减小受拉試件上的軸向力时,則卸荷重过程即在进行中。这个过程用虎克定律确定,其中变形由新状态計算

$$\sigma = E \varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p).$$

假若用符号 $*$ 标记卸荷重开始瞬时,則以上的关系也可以这样表示:

$$\sigma = \sigma^* + E(\varepsilon - \varepsilon^*).$$

当完全取消軸向力时,試件的殘余变形 ε^r 将是

$$\varepsilon^r = \varepsilon^p = \varepsilon^* - \frac{\sigma^*}{E},$$

而且彈性变形常常可以忽略。

在全部过程中, σ 和 ε 的关系为綫性的

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \text{ 或 } \sigma = \sigma^* + E(\varepsilon - \varepsilon^*),$$

而在拉伸图中用有角系数 E 的直綫 MN 表示。

以上所研究的祇是材料在彈性极限后最簡單的特性。那些塑性現象如鬆弛、后效、蠕变、疲劳等,我們此处不講。

在簡單拉伸中所观察出的材料的这些最簡單特性,可以运用到物体承受任意荷重作用下所產生的复杂应力状态。对物体在彈性极限后的复杂应力状态的研究構成下面全部內容。

第一章 塑性理論

确定固体空間变形的塑性理論可以分为兩类，視其是否以联系应力和变形的方程式或者以联系应力和变形速度的方程式为基础而異。

对这最簡單的兩类，我們規定称为彈塑性变形理論和塑性流动理論，現今获得了很大的发展。由于上述理論的簡單性和严整性，同时又与試驗相当符合，故被采用來解很多实际重要的問題。

在建立塑性理論时，將基本方程式用主法向应力、主伸長或主伸長速度來表示較為方便。

第一節 主 應 力

如所周知，物体內任意点 M 的应力状态可以用应力主軸1、2、3的三个方向和三个主法向应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 来确定。这三个主法向应力作用在垂直于相当主軸的微分面上，其上并無切应力。因而，在所考虑的点上，任何应力状态都可以由在三个互相垂直的主方向上的拉伸產生。

除去用 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 外，也宜利用平均法向应力

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (1.1)$$

和三个所謂減化主法向应力

$$s_i = \sigma_i - \sigma \quad (i=1, 2, 3), \quad (1.2)$$

这些減化主法向应力滿足显然的恒等式

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0.$$

也可以采用主切应力代替減化主法向应力

$$\tau_1 = -\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3), \quad \tau_2 = -\frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1), \quad \tau_3 = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2),$$

它們彼此之間以恒等式联系

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0.$$

且作用在那些微分面上,其中每一微分面經過主軸之一,而且平分其他二主軸之間的夾角。

然後我們來考慮正值①

$$S = \sqrt{\frac{2}{3}[\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2]} = \sqrt{\frac{1}{2}[s_1^2 + s_2^2 + s_3^2]} \quad (1.3)$$

和下列等式決定的 ω_σ 值

$$\operatorname{tg} \omega_\sigma = \frac{\sqrt{3} \tau_3}{\tau_1 - \tau_2} = -\frac{s_1 - s_2}{\sqrt{3} s_3}.$$

其中第一式稱為切應力強度,它也可以用下列形式表示:

$$S = \sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2]}, \quad (1.4)$$

並且在塑性理論中起着顯著作用。

根據前面等式,三個量 s_1, s_2, s_3 可用 S 和 ω_σ 表示如下形式:②

$$\left. \begin{aligned} s_1 \\ s_2 \end{aligned} \right\} = \frac{2}{\sqrt{3}} S \cos\left(\omega_\sigma \mp \frac{\pi}{3}\right), \quad s_3 = -\frac{2}{\sqrt{3}} S \cos \omega_\sigma, \quad (1.5)$$

而三個量 τ_1, τ_2, τ_3 可用 S 和 ω_σ 這樣確定:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 \\ \tau_2 \end{aligned} \right\} = -S \sin\left(\omega_\sigma \mp \frac{\pi}{3}\right), \quad \tau_3 = S \sin \omega_\sigma. \quad (1.6)$$

這樣,為了說明在一點上的應力狀態,除去用主法向應力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 外,採用三個量 σ, S, ω_σ 也是方便的。

我們用引入八面體應力向量的方法給量 σ, S 和 ω_σ 以力學解釋,該向量就是作用在與主軸 1、2、3 作同樣傾斜的平截面 Π 上的應力向量(圖 5)。假若這個向量的法向分量和切向分量以及切向分量在平面 Π 上的方向為已知,則這個向量即被確定。

我們利用已知的變換公式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2, \\ \sigma_u^2 + \tau_u^2 &= \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2, \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

① 所有平方根都認為是正。

② 上面的符號“-”屬於 S_1 ,而下面的符號“+”屬於 S_2 ,在以後常會遇到這種類似寫法。