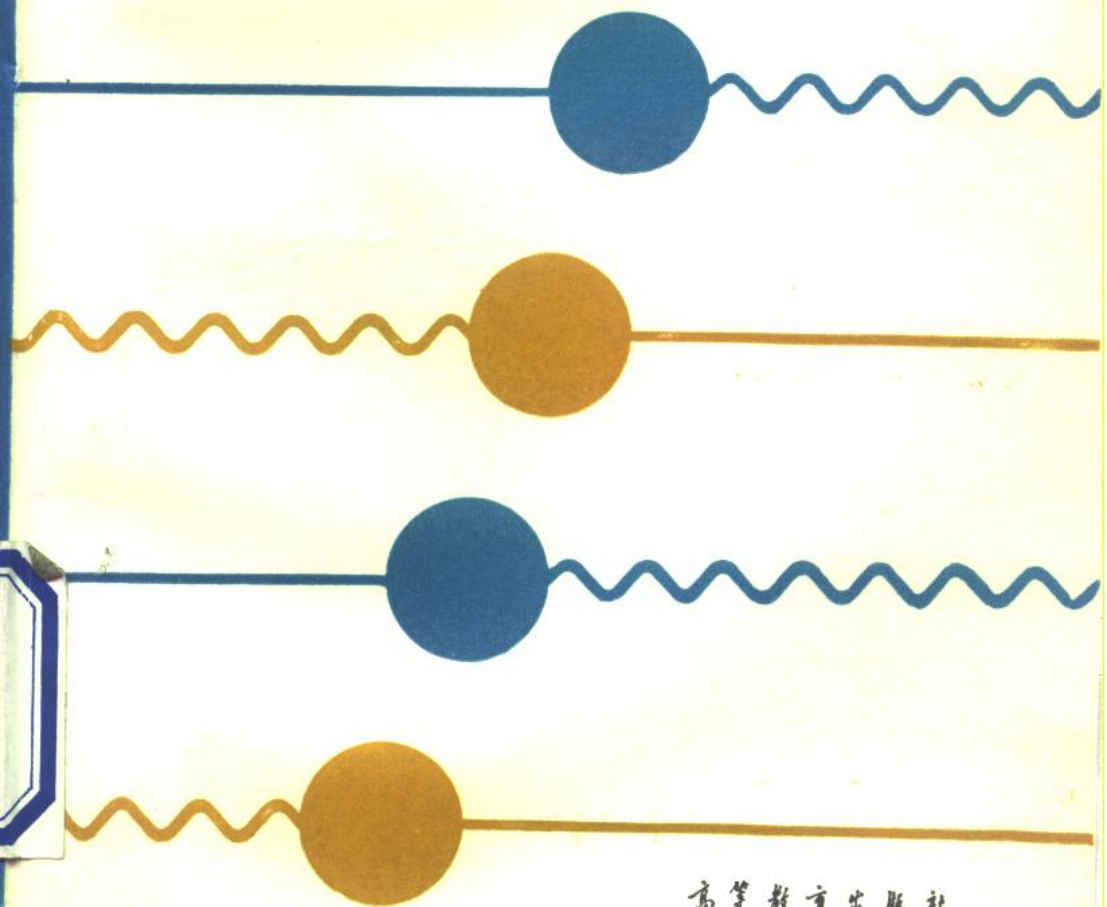


信号与 线性系统

(第三版) 下册

管致中 夏恭恪 编



高等教育出版社

高等学校教材

信号与线性系统

(第三版) 下册

管致中 夏恭恪 编

高等教育出版社

(京)112号

2560/25

内 容 提 要

本书是在原书第二版的基础上经修订而成。第三版保持了第二版的特点,并在此基础上增加了随机变量、随机过程及线性系统对随机信号的影响等新内容,提高了本书的先进性,另外对本书大部分习题作了重新选配,使习题更符合教学的要求,提高了本书的实用性。全书共十二章,上册一至六章,包括绪论、连续时间系统的时域分析、信号分析、连续时间系统的频域分析、连续时间系统的复频域分析、连续时间系统的系统函数;下册包括离散时间系统的时域分析、离散时间系统的变换域分析、线性系统的状态变量分析、随机变量、随机过程、线性系统对随机输入的响应的内容。

本书可作为四年制电子、通信类专业信号与系统课程的教材使用,也可供有关科技人员参考。

责任编辑 崔万胜

高等学校教材

信号与线性系统

(第三版) 下册

管致中 夏恭恪 编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

中国科学院印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 11.25 字数 270,000

1979年2月第1版

1992年10月第3版 1993年10月第2次印刷

印数 4·618—9 343

ISBN 7-04-004031-X/TM·211

定价 4.40元

目 录

第七章 离散时间系统的时域分析	1
§ 7.1 引言	1
§ 7.2 抽样信号与抽样定理	5
§ 7.3 离散时间系统的描述和模拟	14
§ 7.4 离散时间系统的零输入响应	24
§ 7.5 离散时间系统的零状态响应	31
§ 7.6 离散时间系统与连续时间系统时域分析法的比较	44
习题	46
第八章 离散时间系统的变换域分析	53
§ 8.1 引言	53
§ 8.2 Z 变换及其性质	54
§ 8.3 反 Z 变换	67
§ 8.4 Z 变换与拉普拉斯变换的关系	72
§ 8.5 离散时间系统的 Z 变换分析法	76
§ 8.6 离散时间系统的频率响应特性	87
§ 8.7 数字滤波器	92
§ 8.8 离散傅里叶变换	99
习题	109
第九章 线性系统的状态变量分析	115
§ 9.1 引言	115
§ 9.2 系统的状态方程	121
§ 9.3 由输入-输出方程求状态方程	131
§ 9.4 连续时间系统状态方程的复频域解法	143
§ 9.5 连续时间系统状态方程的时域解法	151
§ 9.6 离散时间系统状态方程的解	161
§ 9.7 按照状态方程作系统的模拟	167

§ 9.8	状态方程的数值解法	170
§ 9.9	可控制性和可观测性	179
§ 9.10	线性系统分析方法综述	184
	习题	188
第十章	随机变量	195
§ 10.1	引言	195
§ 10.2	随机变量的概念	198
§ 10.3	概率分布函数和概率密度函数	199
§ 10.4	平均值、矩和特征函数	204
§ 10.5	高斯型随机变量	210
§ 10.6	其他类型概率分布	213
§ 10.7	条件概率分布函数和密度函数	221
§ 10.8	多个随机变量	224
§ 10.9	应用举例	233
	习题	240
第十一章	随机过程	245
§ 11.1	引言	245
§ 11.2	平稳随机过程与各态历经随机过程	247
§ 11.3	自相关函数	252
§ 11.4	互相关函数	255
§ 11.5	功率谱密度	259
§ 11.6	功率谱密度函数与相关函数的关系	265
§ 11.7	常见随机过程	269
	习题	284
第十二章	线性系统对随机输入的响应	289
§ 12.1	引言	289
§ 12.2	由时域分析法确定线性系统响应的统计量	390
§ 12.3	时域分析法应用举例——线性系统对白噪声输入的响应	294
§ 12.4	由频域分析法确定线性系统响应的功率谱密度	299
§ 12.5	最佳线性系统	303

习题.....	314
参考书目	320
索引	322
下册部分习题参考答案	337

第七章 离散时间系统的时域分析

§ 7.1 引言

在本书 § 1.2 中曾经指出, 信号按照它的时间变量 t 是否连续, 分为连续时间信号和离散时间信号两类。随着近代数字技术的发展, 离散时间信号的应用已经非常广泛。表示这种信号的函数, 只在一系列互相分离的时间的点上才有定义, 而在其他的时间上则未定义, 所以这样的函数是离散时间变量 t_k 的函数。离散时间信号可以由将连续时间信号进行抽样得到, 离散时间 t_1, t_2, \dots, t_k 等就是抽样那一瞬间的时间。抽样时间的间隔, 并不必需是均匀的, 但是实际工作中一般都采用均匀间隔, 因为这样较为方便, 所以本章只讨论这种均匀间隔的情况。如令此间隔为 T , 则离散时间 $0, t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ 分别等于 $0, T, 2T, \dots, kT, \dots$ 。如果信号不是一个有始信号, 离散时间还可以取负值 $-T, -2T, \dots, -kT, \dots$ 。从更抽象的意义上说, 离散时间信号仅仅是一个数值的序列, 它的函数图是在坐标平面中一系列的点。但为了醒目起见, 这些离散的函数值也常常象离散频谱那样画成一条条的垂直线, 如图 7-1(a) 所示, 其中每条直线的端点才是实际的函数值。在数字技术中函数的抽样值并不是可以任意取值的, 而必须将幅度加以量化, 也就是幅度的数值, 只能取接近于预定的若干有限个数值之一, 如图 7-1(b) 所示, 这种经过量化的离散时间信号称为数字信号。在实用中, 数字信号的量化幅值常常是用二进制数表示的。数字通信、数字计算机等所用的信号, 就是这样的数字信号。

离散时间信号简称离散信号, 如上述, 这种信号的特点表现为

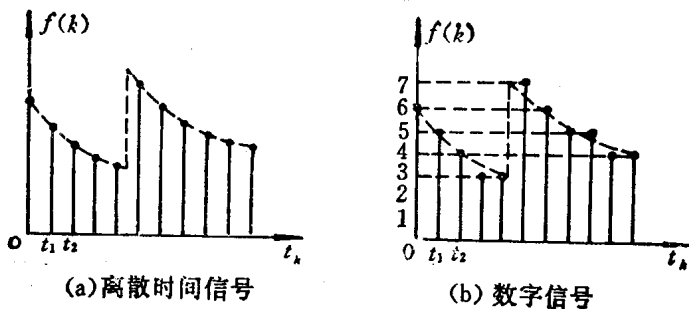


图 7-1 离散时间信号

它是一个离散的数值序列。这序列中的每一数值，仍按一定的函数规律随着离散变量 kT 变化。这里 k 是一整数，是一个表示次序的序号。正象对于连续信号可以用连续时间函数 $f(t)$ 来表示一样，对于离散信号则可以用离散时间函数 $f(kT)$ 来表示。在这后一函数的记法中，表示它仍是一时间 t 的函数，而其函数值仅在离散的时间值 $t=0, \pm T, \pm 2T, \dots$ 等处被定义。离散时间函数又常常记为 $f(k)$ ，而不写成 $f(kT)$ 。这样做，不仅是为了书写简便，而且可以使分析方法具有更为普遍的意义，因为如在 § 7.3 将看到的，离散变量可不限于时间变量。但是，对于离散时间信号 $f(k)$ ，当 k 等于某一整数 n 时， $f(n)$ 就理解为在 $t=nT$ 时的函数值。例如，设

$$f(k) = a^{kT}$$

当 $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 等整数时，就得到一个数值的序列

$$\dots, a^{-2T}, a^{-T}, 1, a^T, a^{2T}, \dots$$

这样一个序列与 $f(k)$ 一样代表了该离散信号，其中的某一数值如 a^{2T} 即为序号 $k=2$ 或时间 $t=2T$ 时的函数值 $f(2)$ 。在实际工作中，离散时间函数常常作为一组数据被记录并存储起来，以备取用。由于使用这组数据时往往不是实时的，各数据除了必须遵循

一定的次序外,时间的意义已不重要。在这种情况下,即使是离散时间函数,也以记为 $f(k)$ 比较贴切。对于连续时间信号, $f(t-t_0)$ 表示信号 $f(t)$ 延时 t_0 , 或时间坐标轴向负方向移动 t_0 (t_0 为负时,坐标轴向正方向移动);同样,对于离散时间信号, $f(k-n)$ 表示信号 $f(k)$ 延时 nT , 或时间坐标轴向负方向平移 nT (n 为负时,坐标轴向正方向移动)。而对于一般的离散信号, $f(k-n)$ 表示信号 $f(k)$ 的序号后移了 n 。函数序号的增减称为移序;当 n 为正时称为减序,当 n 为负时称为增序。

典型的离散信号有单边指数序列, 单边余弦(或正弦)序列, 单位阶跃序列及单位函数等, 分别如图 7-2(a)至(d)所示。很易看出,除单位函数以外,一般的序列均可由相应的连续信号按一定间隔抽样得到。这里的单位阶跃序列与单位函数均将于本章 § 7.5 中予以定义。图 7-2 所示的序列,在 $k < 0$ 时其值均为零。这样的

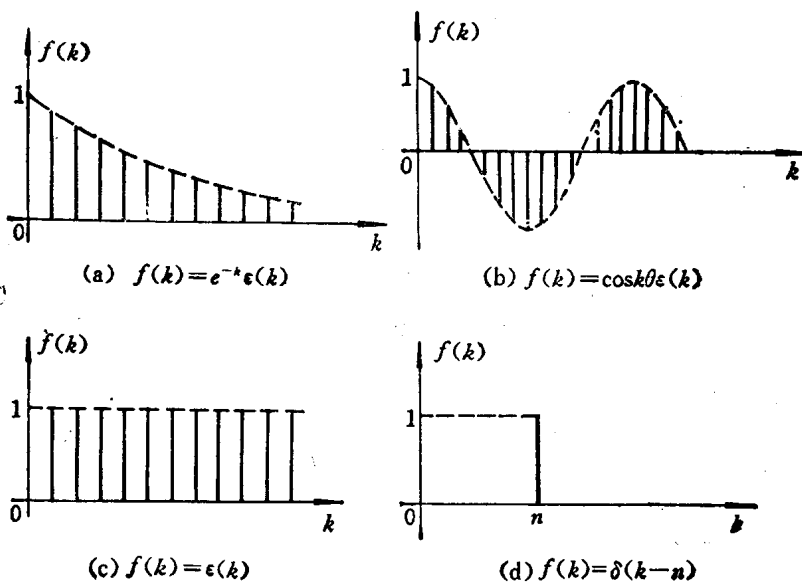


图 7-2 几种典型的离散信号

序列称为单边序列，或有始序列。

一个系统，如果它的输入和输出信号都是离散时间的函数，它就是离散时间系统。数字计算机是离散时间系统的最典型的例子。在数字计算机中，人们关心的是上述均匀离散的瞬刻机器的工作情况。在这些瞬刻，由于离散信号的作用，机器内部电路的状况发生转变；而对于其它时间，则认为机器是处于安静等待的状态。在实际工作中，离散时间系统常常是与连续时间系统联合运用的，同时具有这两者的系统称为混合系统，实用的自动控制系统和数字通信系统等都属此类。例如，在信号处理中，有时要求某种传输性能颇为特殊的滤波器，用传统的模拟滤波器理论不可能设计出来，若用数字滤波器就较易实现。特别是离散时间系统便于应用大规模集成电路，可使机器做得小巧、可靠而又价廉。这就是近来离散时间系统之所以日见重要以及这种系统的理论迅速发展的主要原因。

在本书第一章 § 1.3 中，曾经定义了连续时间系统的线性系统和非时变系统。对于离散时间系统，也可相应地定义其线性系统和非时变系统。设由激励函数 $e_1(k)$ 产生的系统响应是 $y_1(k)$ ，由激励函数 $e_2(k)$ 产生的系统响应是 $y_2(k)$ ，若由线性组合的激励函数 $c_1e_1(k) + c_2e_2(k)$ 产生的系统响应是 $c_1y_1(k) + c_2y_2(k)$ ，（其中 c_1 和 c_2 是常系数），则此系统是线性的。当系统初始状态不为零时，如系统具有分解性，且同时具有零输入线性与零状态线性，则该系统也仍是线性的。如果由激励函数 $e(k)$ 产生的系统响应是 $y(k)$ ，而由激励函数 $e(k-i)$ 产生的系统响应是 $y(k-i)$ ，（其中 i 是可正可负的整数），则此系统是非时变的，在离散变量系统中，又常称为非移变的。上述意思可以用符号表示如下：

若
$$e_1(k) \rightarrow y_1(k), \quad e_2(k) \rightarrow y_2(k)$$

对于线性系统则有

$$c_1 e_1(k) + c_2 e_2(k) \rightarrow c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k)$$

对于非移变系统则有

$$e_1(k-i) \rightarrow y_1(k-i), \quad e_2(k-j) \rightarrow y_2(k-j)$$

对于线性非移变系统则有

$$c_1 e_1(k-i) + c_2 e_2(k-j) \rightarrow c_1 y_1(k-i) + c_2 y_2(k-j)$$

和前面连续时间系统一样, 如果没有特别指明, 本书所说的离散时间系统都是指线性非移变的。

要分析一个系统, 首先要解决如何描述这个问题, 或者说是要建立一个系统的数学模型。如所熟知, 对于连续时间系统, 在时域中是用微分方程来描述的。与之相应, 对于离散时间系统, 在时域中是用差分方程来描述的。在时域中为分析离散时间系统而求解差分方程时, 也可以分为求解零输入分量和零状态分量, 其求解方法也和解微分方程颇多相似。时域中的微分方程可以通过傅里叶变换或拉普拉斯变换转到频域或广义频域中去求解。相应地, 时域中的差分方程则可以通过 Z 变换转到 z 域中去求解, 或者用离散傅里叶变换转到频域中去求解。总之, 离散时间系统的分析方法, 在相当大的程度上, 与连续时间系统的分析方法有着平行的相似性, 这种相似将在后面有关地方分别指明。

本章从下一节起, 先讨论信号的抽样及抽样信号与原信号间的关系; 其次讨论离散时间系统的时域描述和时域分析法, 即介绍系统的差分方程及其时域求解法, 而把离散时间系统的变换域分析留待下一章研究。

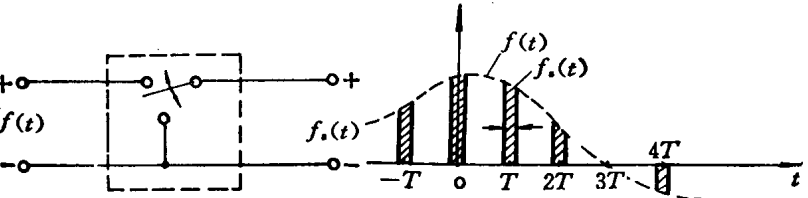
§ 7.2 抽样信号与抽样定理

如上节所述, 离散时间系统中处理的信号都是离散信号。离散信号可以从某种不连续的事件中去获取, 也可以从每隔一定时

间对于一连续信号抽取样本数值获得。例如，对于一连续变化的量(如速度、温度)每隔一定时间进行一次测量等。本节讨论连续信号的抽样，以及在什么条件下抽样信号能够保留原连续信号中的信息量而不受损失。对于一个连续信号只是在若干个时刻抽取了样本数值，就能由这些抽样值去恢复原来的信号波形，这件事初看起来好象颇令人惊奇。但是大家都有绘制曲线的经验，在画曲线时，只要利用数据先确定若干有限个点，然后通过这些点可以连成一条光滑曲线。这些点就是抽样值。要作出一条具有一定精度的曲线，并不需要过多的点。当然点数太少也不行，太少了就不能确切地反映曲线的变化，也就是将会损失原来含有的信息量。要有多少个抽样点才合适，这里有一个需要加以研究的条件问题。

信号的抽样由抽样器来进行。抽样器即是一开关，如图 7-3(a) 所示。开关每隔时间 T 接通输入信号和接地各一次，接通时间是 τ 。这种开关接通实际上是用电子线路来完成的，这里的图仅是示意。显然，抽样器输出信号 $f_s(t)$ 只包含有开关接通时间内的输入信号 $f(t)$ 的一些小段，如图 7-3(b) 所示，这些小段就是原输入信号的抽样。为了研究在什么条件下可由抽样信号去重新建立原信号，必须考察抽样信号频谱与原信号频谱间的关系。

图 7-3(b) 中所示的抽样信号 $f_s(t)$ ，可以看成是由原信号 $f(t)$ 和一开关函数 $s(t)$ 的乘积，即



(a) 抽样器示意 (b) 输入原信号 $f(t)$ 和输出抽样信号 $f_s(t)$

图 7-3 信号的抽样

$$f_s(t) = f(t)s(t) \quad (7-1)$$

这就是说,抽样的过程可以用一个相乘的数学模型来代表,这模型表示为数学式即如式(7-1)所示,表示为模拟图即如图7-4所示。

式中和图中的开关函数 $s(t)$ 是一个门函数的序列,如图7-5(a)所示。开关函数中每一矩形脉冲的幅度为1、宽度为 τ , 所以它的面积是 τ 。当脉宽 τ

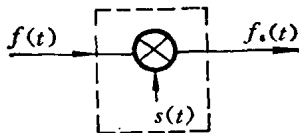


图7-4 抽样的模型

很小时,每一个矩形脉冲可以用一个位于脉冲中心线的冲激函数来近似地表示,冲激函数的强度当然也是 τ 。于是整个开关函数可以近似地表示为

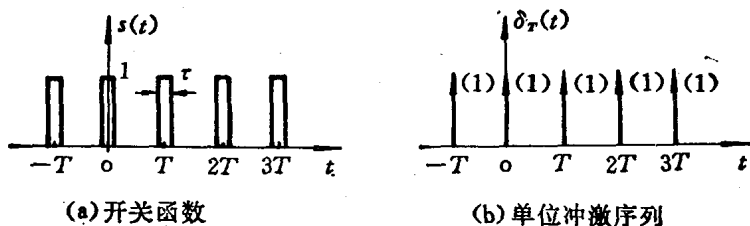


图7-5 开关函数及冲激序列

$$s(t) \approx \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \tau \delta_{\tau}(t) \quad (7-2)$$

此式中 $\delta_{\tau}(t)$ 表示如图7-5(b)所示的单位冲激序列。当 τ 无限趋小时,矩形脉冲面积也随之无限趋小,开关函数变成一条条高度为1的位于原来脉冲中心线的直线。这是在理想情况下的开关函数。它可以表示为冲激函数的序列,即

$$s_0(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau \delta_{\tau}(t) \quad (7-3)$$

如果注意到单位冲激函数的幅度是 $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau}$, 那么就可看出上式中 $s_0(t)$ 的幅度是 $\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau \cdot \frac{1}{\tau} = 1$ 。因此,在上述情况下,抽样信号 $f_s(t)$

就不再是图 7-3(b) 所示那样的一些小段, 而是代表 $t = \dots, -T, 0, T, 2T, \dots$ 等处函数 $f(t)$ 的值的一些离散的点。这样的抽样信号, 按式(7-1), 就可记为

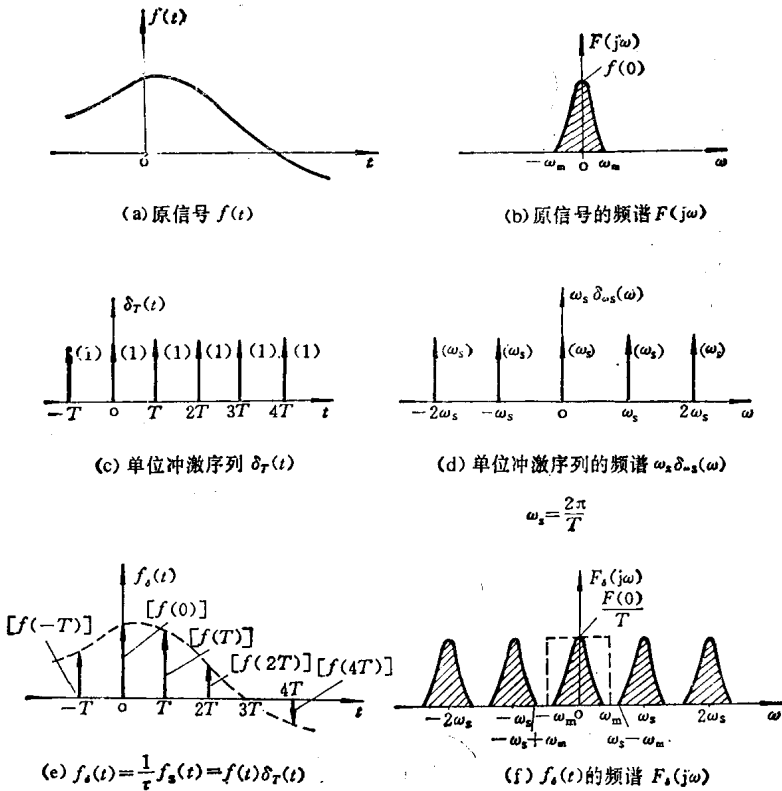


图 7-6 抽样信号的频谱与原信号频谱间的关系

$$f_s(t) = f(t) s_s(t) = f(t) \cdot \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau \delta_T(t) \quad (7-4)$$

这就是把离散信号表示为冲激序列的式子。

现在再来进一步考虑式(7-4)所示的离散信号的频谱。函数 $f_s(t)$ 是两个时间函数 $f(t)$ 和 $s_s(t)$ 的乘积, 根据第三章中讨论的卷积定理, 以上三时间函数在频域中应当具有下列关系:

$$F_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * S_s(j\omega) \quad (7-5)$$

式中 $F_s(j\omega)$ 、 $F(j\omega)$ 和 $S_s(j\omega)$ 分别为 $f_s(t)$ 、 $f(t)$ 和 $s_s(t)$ 的频谱函数。由第三章式(3-65)可知, 冲激序列的频谱函数亦是一冲激序列, 即

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_s \delta(\omega - n\omega_s) = \omega_s \delta_{\omega_s}(\omega) \quad (7-6)$$

其中 $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ 称为抽样(角)频率。所以频谱函数 $S_s(j\omega)$ 应为上式乘以 τ 并取 $\tau \rightarrow 0$ 的极限值。又由第二章卷积表可知, 一函数与一单位冲激函数相卷积即等于该函数。但是式(7-5)中 $S_s(j\omega)$ 是一冲激序列与无穷小量 τ 的乘积, 它与函数 $F(j\omega)$ 相卷积所得的 $F_s(j\omega)$ 的幅度也将是无穷小量, 因而就难于作出频谱。为了避免这种困难, 就将式(7-5)等号两方均除以 τ 而考察其频谱特性, 得

$$\begin{aligned} F_s(j\omega) &= \frac{1}{\tau} F_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * \omega_s \delta_{\omega_s}(\omega) \\ &= \frac{1}{T} F(j\omega) * \delta_{\omega_s}(\omega) \end{aligned} \quad (7-7)$$

此式的反变换就是将式(7-4)除以 τ 所得的冲激序列

$$f_s(t) = \frac{1}{\tau} f_s(t) = f(t) \cdot \delta_T(t) \quad (7-8)$$

这些冲激的强度就等于冲激所在处函数 $f(t)$ 的值, 而其幅度则无限趋大, 所以 $f_s(t)$ 与式(7-4)所示的抽样信号 $f_s(t)$ 略有不同。 $f_s(t)$ 称为理想抽样信号, 也称冲激抽样信号, 而式(7-7)的 $F_s(j\omega)$ 则是理想抽样信号的频谱。这种理想抽样的信号及其频谱与式(7-4)、(7-5)所示的抽样信号 $f_s(t)$ 及其频谱 $F_s(j\omega)$ 相比, 都只差一比例因数, 其时域和频域的特性都是一样的。通常所谓抽样信号的频谱, 就是指理想抽样信号的频谱 $F_s(j\omega)$ 。

由以上讨论可见, 离散信号的频谱函数是原函数的频谱函数和冲激序列的频谱函数相卷积。以上有关函数及其频谱均示于图

7-6。图中(a)和(b)分别为原来连续信号及设定的该信号的频谱, 这里假设频谱在频带 $-\omega_m \leq \omega \leq \omega_m$ 之外为零; 图中(c)和(d)分别为单位冲激序列及其频谱, 其中 T 为抽样周期, $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ 为抽样频率。图 7-6(e)为(a)、(c)两函数的乘积 $f_s(t) = f(t)\delta_T(t)$ 。图 7-6(f)所示的 $f_s(t)$ 的频谱 $F_s(j\omega)$ 则为(b)、(d)两频谱函数的卷积的 $\frac{1}{2\pi}$ 倍。一函数与单位冲激函数相卷积就等于该函数本身, 所以图 7-6(b)的频谱函数 $F(j\omega)$ 与(d)中位于 $\omega=0$ 处的冲激函数相卷积, 即得(f)中虚线框内以 $\omega=0$ 为中心的那部分频谱函数, 它和 $F(j\omega)$ 形状相同, 只是所有的幅值都乘以公共因子 $\frac{\omega_s}{2\pi} = \frac{1}{T}$ 。同样, $F(j\omega)$ 与(d)中位于 $\omega=\omega_s$ 处的冲激函数相卷积, 即得(f)中以 $\omega=\omega_s$ 为中心的那部分频谱函数, 它和虚线框中的那一部分频谱的形状是完全相同的, 只是在频率坐标上移动了一位置 ω_s 。频谱的其余部分可依此类推。由此可见, 抽样信号的频谱是由一系列形状相同的组成部分排列构成的周期函数, 其中每一个组成部分都与原信号频谱的形状相同(尺度不同), 而相邻两个组成部分的中心频率之间相隔一个抽样频率 ω_s 。这就是抽样信号的频谱特性, 这一特性和抽样信号在时域中表现为离散的函数值的序列, 合起来构成了抽样信号在时域和频域中的完整性质*。

对于抽样信号的频谱作了如上的讨论以后, 就可以来研究如何由抽样信号重新建立原信号的问题了。图 7-6(f)抽样信号频谱中虚线框内的部分与原信号频谱具有完全相同的结构, 所以只要将抽样信号输入一个理想低通滤波器而把这部分频谱取出, 同时滤除所有其他的部分, 那么在滤波器的输出端就可以得到原来的信号。这个理想低通滤波器的频率特性就象图 7-6(f)中虚线框

* 关于离散时间信号的频谱, 在下一章还要讨论, 见 § 8.8。

那样,在通带内转移函数的模量为1,相位特性为一直线,它的截止频率应等于或略大于信号频谱中的最高频率 ω_m 而小于 $\omega_s - \omega_m$;从而能够恰好把所需的频谱分离出来。由以上讨论显然可见,要重建原来信号的必要条件是,抽样信号频谱中两相邻的组成部分不能互相叠合,否则即使用了理想低通滤波器,也无法滤取出与原信号相同的频谱来。要频谱中相邻组成部分不相叠合,则必须:第一,信号频谱 $F(j\omega)$ 的频带是有限的,或者说在信号中不含有 $\omega \geq \omega_m$ 的频率分量;第二,抽样频率大于或至少等于最高信号频率的两倍,即

$$\omega_s \geq 2\omega_m \quad (7-9)$$

以上要求有限频带是对于原来信号提出的条件,要求抽样频率不小于 $2\omega_m$ 是对于抽样过程提出的条件。这里两倍信号所含的最高频率 $2f_m = \frac{\omega_m}{\pi}$,是最小的抽样频率,称之为奈奎斯特(Nyquist)抽样频率,或称香农(Shannon)抽样频率;它的倒数 $\frac{1}{2f_m}$ 称为奈奎斯特抽样间隔,或称香农抽样间隔。

综上所述,可以归纳出如下均匀抽样定理:一个在频谱中不含有大于频率 f_m 的分量的有限频带的信号,由对该信号以不大于 $\frac{1}{2f_m}$ 的时间间隔进行抽样的抽样值唯一地确定。当这样的抽样信号通过其截止频率 ω_c 满足条件 $\omega_m \leq \omega_c \leq \omega_s - \omega_m$ 的理想低通滤波器后,可以将原信号完全重建。这个定理亦称香农抽样定理。

但是,由抽样信号重建原信号的条件中,有两点是与实际情况有距离的,第一是要用一个理想低通滤波器,第二是原信号的频带必须有限。理想的低通滤波器

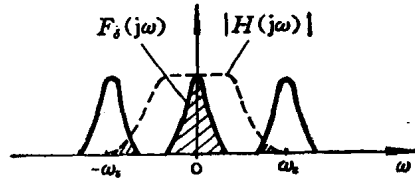


图 7-7 抽样信号通过非理想低通滤波器