海洋湖沼科学理论丛书

海浪理论与计算原理

文圣常　余宙文 编著

科学出版社

1985

内 容 简 介

本书较系统地阐述海浪理论的发展及计算原理．前三章叙述液体波动基本理论，其内容一方面可直接用来近似地说明某些海浪现象，一方面为进一步讨论海浪本身提供基础．第四章中将海浪视为随机过程，利用谱的概念描述海浪的内部结构和外观上的统计特征．第五章说明风和海浪的关系，利用流体动力学探讨风浪生成、成长机制和采用理论的或半理论的方法根据风计算海浪的原理．第六章讨论在地形影响下海浪于近岸发生的变化，包括以谱的观点说明折射、绕射、破碎以及海浪产生的近岸流系．

本书可供海洋科技工作者和高等学校师生参考使用．

海洋湖沼科学理论丛书

海浪理论与计算原理

文圣常　余宙文 编著

责任编辑　张立政

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1984年1月第一版　开本：787×1092 1/16

1985年11月第二次印刷　印张：42

印数：精：711—1,110　插页：精2

平：901—1,390　字数：981,000

统一书号：13031・2436

本社书号：3341・13—17

定价：布脊精装 10.70 元

平　装 9.70 元

《海洋湖沼科学理论丛书》

出版前言

海洋学和湖沼学是研究水体环境的两门姐妹学科，其主要内容包括海洋、湖泊、河川和沼泽等水体的物理、化学性质及其运动规律，水体与大气的相互作用，基底的形态构造特点、沉积物的性质(成分)及其变化规律，水体中(水层及水底)各种生命现象及其与环境因子的相互关系，各种自然资源的分布、蕴藏、再生及其开发利用，水体自然环境保护……等等．海洋学与湖沼学的研究内容基本相同，只是研究对象有所区别。前者研究世界大洋及其边缘海，而后者研究内陆水体．因此，近年来关于如何利用湖泊来进行海洋科学模拟实验等问题，受到了广泛的重视．瑞士的日内瓦湖目前已成为国际海洋水文动力模拟实验的场所就是一个明显的例子．

海洋学和湖沼学对人类的社会实践有巨大的意义．近二十年来，海洋学由于同国防建设和经济建设的关系日益密切而受到临海国家的极大重视．特别是近十年来，随着世界范围的能源和食物来源的探察和开发利用等方面的迫切需要以及有关海洋权益等国际政治、经济问题的日益尖锐化，海洋这个无比富饶的资源宝库和巨大水体引起了人们的更大关注．目前，世界上许多临海国家，竞相投入大量的人力物力，采取各种有效措施，大举向海洋进军，从而使得海洋学研究有了全面而迅速的发展．同样地，湖沼学的研究也由于它在工农业生产、城市规划、工业布局、交通运输、土地利用、环境保护等方面的重要性日益显著，在规模和发展速度上近年来也有了显著的扩大和提高，并取得了一些重要成果．

我国的海洋和湖沼科学，原有基础比较薄弱，只是在全国解放后，由于党和国家的重视，才得到迅速的发展．新中国建立二十多年来，我国广泛地开展了全国规模的海洋调查和内陆湖泊、河川 沼泽的调查研究，积累了系统的资料，从而对我国近海和内陆水体的基本状况及特点有了比较全面的认识．无论在海洋和淡水生物资源开发利用与增殖、养殖研究方面，或者在海流、潮汐、波浪等海水运动规律研究方面，都取得了比较显著的进展；与此同时，也逐步培养了一支有丰富实践经验和一定理论水平的科技队伍．但是，我国目前的海洋科学和湖沼科学研究，无论在理论水平和技术力量方面，远远不能适应四个现代化建设的需要，和世界先进水平相比，还有较大的差距．

为了促进我国海洋和湖沼科学研究的迅速发展，加快科技人员的培养和提高，进一步适应我国国民经济迅速发展的新形势和四个现代化建设的迫切需要，中国海洋湖沼学会和科学出版社决定组织全国海洋与湖沼科学方面的力量，编写出版一套《海洋湖沼科学理论丛书》．这套丛书的选题，包括海洋学、湖沼学，海洋水文、气象、物理、化学、地质和地球物理以及海洋生物学等各分支学科和研究领域；而在内容方面，则本着“侧重基础，侧重提高”的要求，主要介绍各分支学科和研究领域的基础理论，反映最新研究成果和发展前景，以使读者获得较全面的基础理论知识及其应用途径，并在学科发展方向上受到启发．因此，这套《丛书》在很大程度上具有专业参考书的性质，它既不同于大专院校有关专业的

教科书，也区别于专题论著，其主要读者对象是有一定专业基础的科研人员、研究生、高等院校有关专业的教师和高年级学生以及有关生产部门的科技人员.

由于本《丛书》的内容比较广泛，涉及的分支学科和研究领域较多，具体选题将根据我国海洋科学和湖沼科学各分支学科发展的需要和当前科学研究工作的实际情况逐步确定，并陆续出版.

在我国，编辑出版这样一套专业性较强的基础理论丛书，还是初次尝试. 缺点和错误在所难免，我们衷心希望读者提出宝贵意见，特别是有关选题和内容方面的建议，共同为编写好这套《丛书》而努力.

《海洋湖沼科学理论丛书》编委会

1979 年

目　　录

前言 …… vii
第一章　液体表面波的基本方程及其普遍积分 …… 1
§1.1 流体动力学的基本方程 …… 1
1.1.1 理想流体的运动方程 …… 1
1.1.2 连续方程 …… 2
1.1.3 拉格朗日形式的运动方程和连续方程 …… 3
1.1.4 运动方程的几个积分 …… 4
1.1.5 理想流体的边界条件 …… 6
1.1.6 能量,能量变化率和能量通量 …… 8
1.1.7 动量积分,动量通量与辐射应力 …… 11
§1.2 表面波问题的精确提法 …… 13
§1.3 线性波动(小振幅波动)的基本方程 …… 14
§1.4 浅水波动的基本方程 …… 17
§1.5 浅水波动的小参数展开法以及静压分布律的导出 …… 19
§1.6 二维无旋周期进行波的若干普遍积分性质 …… 23
第二章　线性波动(小振幅波动)理论 …… 31
§2.1 简单波动 …… 31
2.1.1 随时间作简谐振动的二维简单波动普遍解 …… 31
2.1.2 二维深水进行波 …… 33
2.1.3 有限常深度水域中的二维进行波 …… 36
2.1.4 驻波·进行波在直墙前的反射 …… 39
2.1.5 三维简单波动 …… 41
2.1.6 简单波动的能量 …… 42
2.1.7 能流 …… 44
2.1.8 两层流体中的二维进行波 …… 46
2.1.9 毛细重力波 …… 50
2.1.10 以定常运动的方法分析进行波 …… 54
§2.2 简谐表面压强维持的简单波动 …… 56
§2.3 小振幅简单波动的合成 …… 57
2.3.1 概说 …… 57
2.3.2 研究初始扰动引起的波动时初始条件的提法 …… 58
2.3.3 初始扰动引起的波动 …… 59
2.3.4 稳定相原理 …… 65
2.3.5 合成波表视频率与表视波数之间的关系以及位相连续方程 …… 67
2.3.6 群速及其物理意义 …… 71
2.3.7 关于群速的进一步讨论 …… 78
§2.4 倾斜水底上波浪的传播 …… 80
§2.5 具有复杂水底地形水域上的波动传播·波的折射 …… 87
§2.6 具有障碍物的水域中的波动传播·波动绕射 …… 91

第三章 有限振幅波动……95

§ 3.1 引言……95

§ 3.2 斯托克斯波……96

3.2.1 深水三阶斯托克斯波的势函数解……96

3.2.2 深水三阶斯托克斯波的性质……97

3.2.3 深水高阶斯托克斯波简介……101

3.2.4 浅水斯托克斯波……104

3.2.5 斯托克斯波的极限情形……105

§ 3.3 摆线波……106

§ 3.4 椭圆余弦波……110

3.4.1 椭圆余弦波波剖面表达式的导出……111

3.4.2 椭圆余弦波波要素的计算……118

§ 3.5 孤立波……124

第四章 作为随机过程的海浪……127

§ 4.1 海面的描述与海浪谱……127

4.1.1 海浪的复杂性和随机性……127

4.1.2 波面的描述与谱的概念……130

4.1.3 线性海浪理论的优点和限制……141

§ 4.2 海浪谱的形式……142

4.2.1 海浪频谱的形式和特性……142

4.2.2 其它几种常用的海浪频谱……149

4.2.3 常用的海浪方向谱……158

§ 4.3 海浪要素的统计分布……161

4.3.1 波面高度的分布……161

4.3.2 波面极大值的分布……166

4.3.3 波高的分布……169

4.3.4 各种波高间的关系……177

4.3.5 周期和波长的分布……184

4.3.6 波高与周期的联合分布……190

§ 4.4 谱与海浪要素的计算……194

4.4.1 谱与波高、周期和波长的计算……194

4.4.2 谱与波群的计算……204

4.4.3 谱宽度……212

§ 4.5 海浪记录与海浪要素的计算……216

4.5.1 由海浪记录计算海浪要素的手续……216

4.5.2 压力式测波仪记录的换算……220

4.5.3 海浪的统计可变性……225

§ 4.6 海浪频谱的估计……228

4.6.1 谱估计的基本概念……228

4.6.2 由协方差函数估计谱的方法……233

4.6.3 应用快速傅氏变换算法估计谱的方法……242

4.6.4 非平稳情形下的谱估计……246

4.6.5 二阶谱及其估计……249

§ 4.7 海浪方向谱的确定……251

4.7.1 概说……251

4.7.2 应用阵列和傅氏变换得到方向谱的方法 …… 253
4.7.3 应用阵列和参量化得到方向谱的方法 …… 255
4.7.4 方向谱的平滑 …… 259
4.7.5 仪器阵列的分辨力和设计 …… 263
4.7.6 利用自由浮标测定方向谱的方法 …… 269
4.7.7 利用立体摄影得到方向谱的方法 …… 271
§4.8 海浪的模拟 …… 276
4.8.1 利用波的叠加进行模拟 …… 276
4.8.2 利用线性过滤进行模拟 …… 279
4.8.3 以造波机模拟海浪 …… 286
4.8.4 以风模拟海浪 …… 291
§4.9 海浪组成波间的非线性相互作用 …… 296
4.9.1 二阶非线性相互作用 …… 296
4.9.2 三阶非线性相互作用——共振相互作用 …… 299
第五章 风与海浪 …… 305
§5.1 气-水界面附近的流场 …… 305
5.1.1 概说 …… 305
5.1.2 波面附近平均风速分布 …… 308
5.1.3 波动于水面附近诱生的气流速度和应力 …… 317
5.1.4 波面附近气流中的湍流运动 …… 326
5.1.5 波面附近气流压力分布 …… 331
5.1.6 波面附近的气流流线 …… 335
5.1.7 气-水界面下侧水流场结构 …… 341
§5.2 风浪生成和成长的机制 …… 348
5.2.1 风浪生成和成长理论的发展 …… 348
5.2.2 Phillips 共振机制 …… 355
5.2.3 Miles 切流不稳定性机制 …… 368
5.2.4 风浪生成和成长机制理论的验证 …… 380
5.2.5 两层切流模型和风浪的生成 …… 390
5.2.6 波动和气流湍流间的相互作用 …… 397
§5.3 风浪谱的成长与参量化 …… 403
5.3.1 以风要素为参量的无因次频谱 …… 404
5.3.2 风浪频谱的平衡域 …… 411
5.3.3 风浪谱的成长 …… 417
5.3.4 以海浪要素为参量的无因次频谱 …… 424
§5.4 风浪的计算 …… 430
5.4.1 海浪的能量来源与消耗 …… 430
5.4.2 以特征波计算风浪的方法 …… 440
5.4.3 以谱计算风浪的方法 …… 451
5.4.4 浅水风浪的计算 …… 462
5.4.5 计算风浪的经验公式 …… 469
§5.5 涌的传播 …… 473
5.5.1 波动于静止水域中的传播 …… 473
5.5.2 涌要素的计算 …… 484
§5.6 风浪与涌的数值计算 …… 495
5.6.1 基于经验公式或谱的方法 …… 495

5.6.2 基于谱组成波成长的方法 …… 499
5.6.3 基于谱的参量化的方法 …… 507
第六章 近岸的海浪 …… 521
§6.1 倾斜水底对海浪的影响 …… 521
6.1.1 概说 …… 521
6.1.2 波速、波长及波高的变化 …… 523
6.1.3 波面的变化与破碎 …… 532
6.1.4 波动于倾斜水底上产生的平均水面升降和爬高 …… 556
6.1.5 变浅作用下的波谱和波浪统计特性 …… 567
§6.2 复杂地形对海浪的作用 …… 575
6.2.1 单频率波的折射和波要素的计算 …… 575
6.2.2 谱的折射 …… 586
6.2.3 折射理论与计算方法的改进 …… 593
6.2.4 谱与绕射 …… 605
§6.3 海浪产生的近岸流和碎波拍 …… 614
6.3.1 近岸流的特征和分析方法 …… 614
6.3.2 沿岸流 …… 622
6.3.3 离岸流和近岸流系 …… 630
6.3.4 碎波拍 …… 641
参考文献 …… 646

第一章　液体表面波的基本方程及其普遍积分

§1.1　流体动力学的基本方程

在本节，我们不加推导地概述流体动力学的一些方程，因为在以后的讨论中，要经常地应用它们．对于想了解这些方程推导细节的读者，可参考有关的专著[292,339,60]．

1.1.1　理想流体的运动方程

流体在流场中运动时，必须遵循一定的法则．例如，流体元所受到的合力应该等于流体元的质量乘以流体元的加速度，这就是大家熟悉的动量守恒定理，也称为牛顿第二定理．流体动力学中的运动方程就是牛顿第二定理应用于流体运动时的具体表述．研究任何形式的液体表面波的运动，都必须应用流体的运动方程．

在研究短周期的液体波动时，常常可以认为流体是无粘性的，也就是说可以忽略流体的内摩擦效应，此时只需考虑压强而不必考虑切向的应力．另外，假定重力是唯一的外力，这对于地球上周期不太长（例如，量级相当于海洋上风浪的周期）的波动来说，确是如此．如果我们这样选取坐标系，使得 oxy 平面为水平，而 oz 轴铅直向上为正，那么无粘性流体运动方程的向量形式可写为

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla P+\boldsymbol{F}, \tag{1.1.1-1}$$

式中 $\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}$ 表示流体质点的加速度，$-\frac{1}{\rho}\nabla P$ 表示单位质量流体所受到的表面力合力，即压力的合力，或者称为单位质量流体所受到的压强梯度力，$\boldsymbol{F}=(o,\ o,\ -g)$ 为单位质量流体所受到的外力，其中 g 为重力加速度．如果把上式写为分量形式，则有

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x},\\ \frac{dv}{dt}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y},\\ \frac{dw}{dt}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}-g,\end{aligned}\right\} \tag{1.1.1-2}$$

其中，u，v，w 为速度 $\boldsymbol{V}$ 在三个坐标轴方向上的分量，$\frac{du}{dt}$，$\frac{dv}{dt}$，$\frac{dw}{dt}$分别为流体质点加速度$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}$ 的三个分量．

当流场用欧拉变数来描述时，流场中的物理量一般应为空间坐标 (x,y,z) 和时间 t 的函数．此时有

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)u=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv}{dt}&=\frac{\partial v}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)v=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z},\\ \frac{dw}{dt}&=\frac{\partial w}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)w=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z},\end{aligned}\right\}\tag{1.1.1-3}$$

其中 $\partial u/\partial t$ 称为 x 方向速度分量 u 的局部微商，$(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)u=u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$ 称为 u 的对流微商，它是由流体的运动和流场的不均匀性所引起的加速度部分，而 du/dt 则称为 u 的实质微商或跟随流体微团的微商. 对于 v 和 w 的有关项，亦可作出类似的说明. 将(1.1.1-3)式代入(1.1.1-2)式，便得到

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x},\\ \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y},\\ \frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}-g.\end{aligned}\right\}\tag{1.1.1-4}$$

有一点应该加以说明的是关于柯氏力的问题. 一般，在研究海洋和大气的运动时，必须引进柯氏力. 但在上面的一系列方程中，柯氏力均未出现. 这是因为我们在这里概述这些方程，目的在于应用于短周期表面波的研究. 对于周期不太长的波动，柯氏力相对于流体所受的惯性力来说是小量. 事实上，以后我们将会看到，对于纯波动流场来说，流体质点加速度量值的量级为 $2\pi q/T$，而单位质量流体所受到的柯氏力量值的量级为 $2\omega\cdot\sin\varphi\cdot q$，两者之比值为 $\pi/T\omega\sin\varphi=T_e/2T\sin\varphi$，上面 q 表示流体质点的速度量值，T 为波动周期，ω 为地转角速度，T_e 为地转周期 ($T_e=1$ 天 $=24$ 小时)，φ 为地理纬度. 因为对于海洋中的短周期波动，周期 T 都远小于地转周期 T_e，所以对于这种波动，柯氏力的确是可以忽略的.

1.1.2 连 续 方 程

质量守恒是任何物质运动时必须遵循的另一个普遍法则，当然，流体运动时也不能例外. 对于流场中任意选定的固定几何空间，单位时间内含于此空间内的流体质量的增加量必然等于同时间内通过此空间边界流入到其内部的流体量. 今在流体内取一由闭曲面 S 所围成的固定几何空间，其体积为 τ. 显然在单位时间内所取空间内流体质量的增加量为

$$\iiint_{\tau}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,d\tau,$$

而同一时间内通过边界净流入到此空间内的流体质量为

$$-\iint_{s}\rho V_n ds,$$

其中 V_n 表示沿边界外法线方向上的流体质点的速度分量. 因此，根据质量守恒应有

$$\iiint_{\tau}\frac{\partial\rho}{\partial t}d\tau+\iint_{s}\rho V_n ds=0,$$

对上式中的曲面积分应用高斯公式，便得

$$\iiint_{\tau}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})\right]d\tau=0.$$

考虑到体积 τ 的任意性，我们便得到普遍形式的连续方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0, \tag{1.1.2-1}$$

或

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0. \tag{1.1.2-2}$$

在研究液体表面波动的时候，常常可以认为流体是不可压缩的．对于不可压缩流体，任何流体微团在其运动过程中，尽管此微团的形状可发生变化，但是它的体积从而其内部流体的密度不应发生变化．如果用数学语言来说，对于不可压缩流体，应有

$$\frac{d\rho}{dt}=0, \tag{1.1.2-3}$$

此时连续方程变成

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{1.1.2-4}$$

1.1.3 拉格朗日形式的运动方程和连续方程

虽然对于大多数的波动问题，都是用欧拉变数的系统来研究的，但是有时也使用拉格朗日变数系统，例如研究摆线波的时候就是如此．在拉格朗日变数系统中，质点在任意时刻的坐标以及流场中的诸物理量(例如密度 ρ，压强 P 等)被表达成

$$\left.\begin{aligned}x&=x(t;\ a,\ b,\ c),\\ y&=y(t;\ a,\ b,\ c),\\ z&=z(t;\ a,\ b,\ c),\\ \rho&=\rho(t;\ a,\ b,\ c),\\ P&=P(t;\ a,\ b,\ c),\end{aligned}\right\} \tag{1.1.3-1}$$

其中 a，b 和 c 为标识特定流体元的参数，通常可取为初始时刻的流体质点坐标，而在波动问题的研究中则常被取为质点平衡位置的坐标．对于重力场中的无粘性流体，运动方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial^2y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial^2z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial a}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial a}-g\frac{\partial z}{\partial a},\\ \frac{\partial^2x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial^2y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial^2z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial b}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial b}-g\frac{\partial z}{\partial b},\\ \frac{\partial^2x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial^2y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{\partial^2z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial c}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial c}-g\frac{\partial z}{\partial c},\end{aligned}\right\} \tag{1.1.3-2}$$

而连续方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho(t;\ a,b,c)\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial a}&\dfrac{\partial x}{\partial b}&\dfrac{\partial x}{\partial c}\\ \dfrac{\partial y}{\partial a}&\dfrac{\partial y}{\partial b}&\dfrac{\partial y}{\partial c}\\ \dfrac{\partial z}{\partial a}&\dfrac{\partial z}{\partial b}&\dfrac{\partial z}{\partial c}\end{vmatrix}\right\}=0. \tag{1.1.3-3}$$

如果流体为不可压缩流体，则有

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t;a,b,c)=0, \tag{1.1.3-4}$$

或

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c}\\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c}\\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c}\end{vmatrix}=0. \tag{1.1.3-5}$$

1.1.4 运动方程的几个积分

运动方程有许多不同形式的积分，在讨论某些特定问题的时候，应用运动方程的这些积分形式常常要比直接应用运动方程本身方便得多．下面我们将概述几个在波动问题的讨论中常用到的几个积分．

1. Helmholtz 环流积分定理

于 $t=t_0$ 时刻，在流场中取一封闭空间曲线 C_0，那么组成 C_0 的流体质点在时刻 t 将移动到新的位置上，并构成新的封闭空间曲线 C_t，若在此封闭空间曲线 c_t 上的环流记为 $\Gamma(t)$，则

$$\Gamma(t)=\oint_{C_t}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}=\oint_{C_t}udx+vdy+wdz. \tag{1.1.4-1}$$

t 时刻的环流值 $\Gamma(t)$ 依赖于围道 C_t 和 C_t 上的流体质点速度，而这两者均随着流体的运动而变化，所以一般说来，环流值 $\Gamma(t)$ 应该随着流体的运动而变化．我们问，此环流的变化率等于多少？在什么条件下，其变化率为零？为此，我们可对上一式求实质微商

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma(t)}{dt}&=\oint_{C_t}\frac{du}{dt}dx+\frac{dv}{dt}dy+\frac{dw}{dt}dz+\oint_{C_t}udu+vdv+wdw\\&=\oint_{C_t}\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}\cdot d\boldsymbol{l},\end{aligned} \tag{1.1.4-2}$$

上式表示，环流的实质微商等于加速度的环流．在讨论表面波的时候，常认为流体是无粘性的不可压缩均匀流体，而重力为唯一的外力，此时将(1.1.1-1)代入上式后，有

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt}=\oint_{C_t}\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}\cdot d\boldsymbol{l}=\oint_{C_t}d\left[-\frac{P}{\rho}-gz\right]=0, \tag{1.1.4-3}$$

也就是说，对于无粘性的不可压缩均匀流体，由相同流体质点构成的封闭曲线上的环流不随时间而变．

这一环流定理对于波动问题有着特别重要的意义，因为在本书的前三章，我们将对任意时刻、任意围道上的环流均为零的这一特殊情形感兴趣，也就是说，我们将假定流体的运动是无旋的．环流的守恒定理有助于阐明这一假定的正确性．如果重力场中无粘性不可压缩流体初始时为静止或作均匀运动，那么初始时刻任何围道上的速度环流为零．进一步说，由于环流的守恒性，任意时刻、任意围道上的环流均为零．于是，根据斯托克斯定

理有

$$\oint_{c_t} \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint_s (\nabla\times\boldsymbol{V})\cdot d\boldsymbol{\sigma}=0,$$

式中 s 表示以 c_t 为边界的曲面，$d\boldsymbol{\sigma}$ 为曲面 s 的有向面元. 上式表明，任意时刻、任意点处的旋度均为零，也就是说，可以认为流体的运动是无旋的. 本书的前三章，除非另有说明，都假定波动场是无旋的.

2. 定常积分·柏努力定理

对于重力场中的无粘性不可压缩流体，如果流场是定常的，那么易于证明，沿任何一条给定的固定流线，下面的等式成立

$$\frac{q^2}{2}+gz+\frac{P}{\rho}=\text{const.}, \tag{1.1.4-4}$$

式中 $q=(u^2+v^2+w^2)^{\frac{1}{2}}$ 为流体质点速度的量值. 在应用上式时，应特别注意，一般说来，式中右端的常数依流线的不同而变化. 也就是说，在同一流线上，左端三项之和为常数，但在不同的流线上左端三项之和可能具有不同的值. 只有在流场定常而又无旋时，上式中的常数才处处一样.

波动的流场总是不定常的，所以柏努力定理不能直接加以应用. 但是，以后我们将会看到，对于某些波动，可以通过适当选取平移惯性坐标系的办法，将流场化为定常流场，此时柏努力方程将对问题的讨论起着重要的作用.

3. 无 旋 积 分

当流体作无旋运动时，运动方程和连续方程将具有非常简单的形式. 首先，速度旋度为零（$\nabla\times\boldsymbol{V}=0$）的条件保证在任何单连通域内存在单值速度势 $\varphi(x,y,z,t)$，使得

$$\boldsymbol{V}=\nabla\varphi(x,\ y,\ z,\ t), \tag{1.1.4-5}$$

或

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{1.1.4-6}$$

而

$$\varphi(x,y,z,t)=\int^{(x,y,z)} udx+vdy+wdz,$$

因为 $\nabla\times\boldsymbol{V}=0$ 必然导致上式中的积分表达式为全微分.

如果流体又是不可压缩的，那么连续方程就变成为如下的形式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0, \tag{1.1.4-7}$$

也就是说，对于不可压缩流体的无旋运动，其速度势为一调和函数.

对重力场中的不可压缩流体无旋运动，其运动方程具有如下形式的积分

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi)+\frac{P}{\rho}+gz=c(t), \tag{1.1.4-8}$$

此积分称为无旋积分. 上式右端的积分常数只依赖于时间变数而不依赖于空间变数. 显然，这积分常数不具有实质上的重要性，因为它只能给压强场均匀地加上一个常数，但对有实质意义的压强梯度力并没有什么影响. 事实上，如果我们令

$$\varphi_1 = \varphi + \int c(t)dt,$$

显然 $\varphi_1(x, y, z, t)$ 也可代表同一流场的速度势，因为 $\nabla\varphi_1 = \nabla\varphi$，此时如果用 $\varphi_1(x, y, z, t)$ 来表达(1.1.4-8)式，便有

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi_1)\cdot(\nabla\varphi_1) + \frac{P}{\rho} + gz = 0, \tag{1.1.4-9}$$

也就是说，如果在公式(1.1.4-8)中取 $c(t) = 0$，对公式的普遍性并没有本质的损失.

在本书后面我们研究某些波动问题的时候，常常用方程(1.1.4-7)来求得速度势 $\varphi(x, y, z, t)$，然后由式(1.1.4-5)或(1.1.4-6)求得速度场，由无旋积分(1.1.4-8)求得压强场.

有一点值得指出，方程(1.1.4-7)是线性的，因此初看起来，似乎由于引进速度势便避免了由运动方程的非线性性所引起的困难，从而把非线性问题变成了线性的问题.事实上并非如此，本质上问题仍属于非线性问题，因为方程(1.1.4-8)仍是非线性的，它和其它条件结合在一起将给出非线性的边界条件. 所以说，引进速度势并不能使问题线性化，要想得到线性化的问题，必须引进另外的一些假定. 这些，我们将在后面加以讨论.

在波动问题中，常用到的运动方程的另外两个积分是关于能量的积分和动量的积分. 因为在推导和应用这两种积分时，经常要考虑到各种类型边界的特点，所以我们将把这两个积分留在下面介绍，而先讨论边界条件的提法问题.

1.1.5 理想流体的边界条件

研究流体的运动时，除需要运动方程和连续方程外，还需要预先给出初始条件和边界条件. 所谓给定初始条件是指给定初始时刻的流场状况. 本节主要讨论边界条件的有关问题. 边界条件可分为运动学边界条件和动力学边界条件，下面我们分别对它们作出讨论.

1. 动边界的运动学边界条件

设流场中有一运动的边界面 s，它可能是不同种类流体的分界面，例如海水与大气的分界面，即海面，也可能是同种流体中密度不同的两层间的分界面. 在这种边界面上，一个重要的客观事实是：流体质点一旦在这边界面上，它就永远留在这边界上，而不可能离开这一边界[1]. 或者说边界上流体质点的法向速度应与边界本身移动的法向速度相同. 下面，我们将用数学语言把这一事实表达出来.

设动边界可用方程 $F(x, y, z, t) = 0$ 来描述，由于边界上的流体永远留在此边界上，也就是说边界上的流体质点的坐标 (x, y, z) 应永远满足方程 $F(x, y, z, t) = 0$，所以应有

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}u + \frac{\partial F}{\partial y}v + \frac{\partial F}{\partial z}w = 0, \tag{1.1.5-1}$$

式中 (u, v, w) 应理解为边界上的流体质点的速度分量. 如果我们规定 $F(x, y, z, t)$

1) 实际上，由于分子的热运动，流体的分子可以离开边界，而不一定永远留在边界上. 所以，严格说来，"流体质点一旦在边界上就永远留在这边界上"的说法不过是把流体抽象成连续介质的直接结果.

的梯度 ∇F 的方向为边界 s 的正法线方向，那么边界 s 的单位法向向量 $\boldsymbol{n}_0$ 为

$$\boldsymbol{n}_0=\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},\ \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},\right.$$
$$\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}\right),$$

所以边界上的流体的法向速度 V_n 为

$$v_n=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}_0=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}\left(u\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}+w\frac{\partial F}{\partial z}\right).$$

将上式代入(1.1.5-1)式后，便得到动边界运动学边界条件的另一表达式

$$v_n=-\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.\tag{1.1.5-2}$$

如果运动是无旋的，速度势用 φ 表示，则有

$$v_n=\frac{\partial\varphi}{\partial n}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},\tag{1.1.5-3}$$

式中 $\partial\varphi/\partial n$ 表示速度势沿边界正法线方向的微商．上面的两式，有着明显的物理意义，因为等式左端代表边界上的流体质点的法向速度，而右端则代表边界本身移动时的法向速度．

在波动的问题中，动边界常用下述形式表出

$$z=\zeta(x,\ y,\ t),$$

这相当于 $F(x,\ y,\ z,\ t)=z-\zeta(x,\ y,\ t)=0$，此时边界条件具有如下的形式；

$$w=\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}u+\frac{\partial\zeta}{\partial y}v.\tag{1.1.5-4}$$

如用速度势表示，则在边界 s 上应有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}.\tag{1.1.5-5}$$

2. 固定边界的运动学边界条件

如果边界 s 是固定不动的，例如与流体接触的固体边界(如海岸、海底等)．对于这种边界，其方程应为

$$F(x,\ y,\ z)=0,$$

即 F 中不应包含时间变量 t．此时边界上的流体质点速度应满足如下关系；

$$\frac{\partial F}{\partial x}u+\frac{\partial F}{\partial y}v+\frac{\partial F}{\partial z}w=0, \tag{1.1.5-6}$$

或

$$V_n=0, \tag{1.1.5-7}$$

或

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}=0. \tag{1.1.5-8}$$

3. 动力学边界条件

此处，我们只对海-气界面给出动力学边界条件，而且只讨论无旋运动的情形．对于其它情形下的动力学边界条件，将结合具体问题在适当场合给出．

设海表面 s 的方程为

$$z=\zeta(x, y, t),$$

并且在面 s 上的压强分布预先给定为

$$P_s=P_s(x, y, t),$$

那么，直接应用运动方程的无旋积分 (1.1.4-8) 式，并考虑到压强的连续性，便得到在 s 面上应满足的动力学边界条件

$$g\zeta+\frac{P_s}{\rho}+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi\right)\Big|_{z=\zeta}=C(t). \tag{1.1.5-9}$$

在波动问题的研究中，常选取上式右端的常数为零．

1.1.6 能量,能量变化率和能量通量

在讨论表面重力波问题时，常常需要计算某给定区域内的能量和能量变化率，也要计算通过给定面的能量通量．为此我们将概述运动方程的能量积分．考虑到对波动问题的特殊应用，我们在此不拟讨论普遍形式的能量积分，而只对重力场中无粘性不可压缩流体的无旋运动给出有关公式．前面已经说过，对于这种流动，存在速度势 $\varphi(x, y, z, t)$，且有

$$\Delta\varphi=0, \tag{1.1.6-1}$$

$$\boldsymbol{V}=\nabla\varphi, \tag{1.1.6-2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{P}{\rho}+gz+\frac{1}{2}\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi=C(t). \tag{1.1.6-3}$$

对势函数适当加减一个时间的函数，也可以使(1.1.6-3)式中的 $C(t)$ 等于零．

让我们先给出动能及总能量的计算公式．设区域 τ 是以封闭曲面 s 为界面的、并为流体所占据的区域，那么该区域内流体运动的动能为

$$E_k=\frac{\rho}{2}\iiint_\tau \nabla\varphi\cdot\nabla\varphi d\tau.$$

应用格林公式，并考虑到(1.1.6-1)式，便有

$$E_k=\frac{\rho}{2}\oiint_s \varphi\frac{\partial \varphi}{\partial n}ds. \tag{1.1.6-4}$$

上式表明，区域 τ 内的动能可由边界面上的面积分求得．如果取流体质点在坐标原点处的势能为零，那么区域 τ 内的总能量(＝动能＋势能)为

$$E=\rho\iiint_{\tau}\left[\frac{1}{2}\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi+gz\right]d\tau. \tag{1.1.6-5}$$

应用(1.1.6-3)式，可将上式改写成

$$E=\iiint_{\tau}\left[\rho c(t)-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}-P\right]d\tau. \tag{1.1.6-6}$$

现在，我们来研究区域 τ 内的能量变化率. 为此，假定围成区域 τ 的封闭界面 s 可用关系式 $F(x,y,z,t)=0$ 来表示，也就是说界面 s 可能是不移动的(此时 F 中的变量 t 消失)，也可能是移动的(此时 F 中包含变量 t)，而且它的移动可能是随着界面上的流体一起移动（此时界面移动的法向速度与界面上流体的法向速度相同)，也可能是与流体运动无关而独立地移动. 这样，于不同时刻，界面 s 所围区域的位置、大小和形状一般说来是不相同的，其中所含流体的能量一般也随着时间而变化. 我们来研究区域 τ 内的能量随时间的变化率 $\frac{\tilde{d}E}{dt}$. 应该注意，我们此处使用符号 $\frac{\tilde{d}}{dt}$ 是为了与符号 $\frac{d}{dt}$(实质微商或者说跟随流体运动的微商)和 $\frac{\partial}{\partial t}$ (局部微商)加以区别. 一般地，如果

$$E=\iiint_{\tau(t)}f(x,y,z,t)d\tau,$$

则有如下的普遍数学公式

$$\frac{\tilde{d}E}{dt}=\iiint_{\tau(t)}\frac{\partial f}{\partial t}d\tau+\oiint_{s(t)}fv_{sn}ds,$$

式中 v_{sn} 表示边界 s 本身沿外法线方向的移动速度. 现在，我们对区域 τ 内的总能量应用上式，将(1.1.6-5)式中的 $\rho\left[\frac{1}{2}\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi+gz\right]$ 代入上式右端第一个积分中的 f，将(1.1.6-6)式中的 $\left[\rho C(t)-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}-P\right]$ 代入第二个积分中的 f，我们便得到

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{d}E}{dt}&=\rho\iiint_{\tau}\nabla\varphi\cdot\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}d\tau+\oiint_{s}\left(\rho c(t)-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}-P\right)v_{sn}ds\\&=\oiint_{s}\left[\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}-v_{sn}\right)+(\rho c(t)-P)v_{sn}\right]ds.\end{aligned} \tag{1.1.6-7}$$

下面，我们对几种特殊情形来讨论上式.

(1) 设封闭界面 s 是“物理”边界面，也就是说这种界面总是由相同的流体质点组成的封闭曲面，或者说它是跟随流体质点一起移动的界面. 此时，流体质点的法向速度与界面移动的法向速度相同，即 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=v_{sn}$，而且此时的 $\frac{\tilde{d}}{dt}$ 就表示实质微商 $\frac{d}{dt}$，于是(1.1.6-7)式简化为

$$\frac{dE}{dt}=\oiint_{s}(\rho C(t)-P)\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds=-\oiint P\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds, \tag{1.1.6-8}$$

上式表明，区域 τ 内的总能量的实质微商等于表面力（边界面上的压力）对内部流体所作的总功率.

(2) 如果封闭界面 s 总是由相同的流体质点所组成并且于空间固定不动，或者说 s 是静止的“物理”界面，此时有 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=v_{sn}=0$，而且 $\frac{\tilde{d}}{dt}=\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}$，于是(1.1.6-7)变