

大学数学 复习指导与 试题解析

主 编 陈 仲
副主编 姜东平 陈华钧



南京大学出版社

13-44

C65-2

(2)

442034

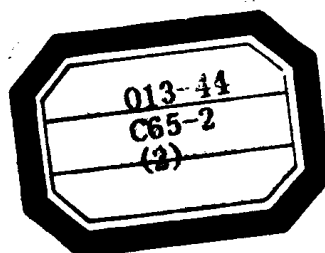
大学数学复习与试题解析

主 编 陈 仲

副主编 姜东平 陈华钧



00442034



南京大学出版社

978730532008

书 名 大学数学复习指导与试题解析
著 者 主编 陈仲 副主编 姜东平 陈华钧
出 版 者 南京大学出版社
(南京汉口路 22 号 南京大学校内 邮编 210093)
印刷 常熟市印刷二厂
发行 江苏省新华书店 全国各地新华书店经售
开本 787×1092 1/16 印张 31.375 字数 783 千
1999 年 5 月第 2 版 1999 年 5 月第 5 次印刷
印数 20 001—25 000
定价 34.00 元
ISBN 7-305-02062-1/O·109

声明:(1) 版权所有, 侵权必究.
(2) 本版书若有印装质量问题, 与经销者联系
发行部订购、联系电话: (025)3592317

编 者 的 话

《高等数学》是大学理科、工科和部分文科专业学生必修的基础课,也是硕士研究生入学考试的一门必试科目. 为了帮助大学生们学好并强化《高等数学》,我们根据原国家教委 1989 年审定的“高等数学课程教学基本要求”,这次又根据教育部 1998 年制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的要求,融学习指导与考研为一体,编写了这本书. 内容包括高等数学、线性代数、概率统计三大部分,每一部分又分为若干章节,每一节又包含三部分:一是“内容提要与重点”,列出基本概念、重要定理和主要内容,并对其中重要内容作简要的叙述;二是“例题与试题解析”,我们从历年研究生入学考试试题和有关书籍中精选精编了有代表性的例题共 870 多条,逐题详细解答或证明,介绍了各种题型的解题方法和技巧,这些例题涉及内容广、类型多、技巧性强,是本书的核心部分,旨在提高分析能力,掌握基本概念和解题技巧;三是“习题”,题目主要选自各种试题,在书末有习题答案与提示.

本书的“高等数学”部分(“级数”一章除外)由陈仲编写,“线性代数”部分和“级数”一章由姜东平编写,“概率论与数理统计”部分由陈华钧编写,全书由陈仲统稿.

由于编者水平所限,书中缺点和不足难免,诚恳期待同行与读者赐教.

目 录

高 等 数 学

1	函数 极限 连续性	1
1.1	一元函数基本概念	1
1.2	求极限的各种方法	3
1.3	无穷小比较	12
1.4	连续性与间断点	14
	习题 1	19
2	一元函数微分学	21
2.1	导数与微分基本概念	21
2.2	求导公式与求导法则	25
2.3	微分中值定理	31
2.3.1	与微分中值定理有关的等式的证明	32
2.3.2	与微分中值定理有关的不等式的证明	38
2.3.3	应用马克劳林展式求极限	42
2.4	洛必达法则	44
2.4.1	$\frac{0}{0}$ 与 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限	45
2.4.2	$\infty - \infty$ 型未定式的极限	46
2.4.3	$1^\infty, \infty^0, 0^0$ 型未定式的极限	47
2.4.4	洛必达法则的应用	49
2.5	导数的应用	52
2.5.1	几何上的应用	53
2.5.2	不等式的证明	60
2.5.3	经济上的应用	61
	习题 2	63
3	一元函数积分学	66
3.1	不定积分	66
3.1.1	应用基本积分公式的积分	68
3.1.2	应用换元积分法的积分	70
3.1.3	应用分部积分法的积分	72
3.1.4	综合应用积分法的积分	74
3.1.5	简单的无理函数的积分	75
3.2	定积分	77
3.2.1	关于定积分定义和性质的应用	79
3.2.2	变上(下)限的定积分	83
3.2.3	定积分的计算	90
3.3	定积分的应用	97

3.3.1	几何上的应用	98
3.3.2	物理上的应用	105
3.3.3	经济上的应用	106
3.3.4	与定积分有关的等式与不等式的证明	107
3.4	广义积分	112
3.4.1	广义积分的计算	114
3.4.2	广义积分敛散性判别	117
习题 3		118
4	空间解析几何	120
4.1	向量代数	120
4.2	平面与直线	124
4.3	曲面与曲线	131
习题 4		135
5	多元函数微分学	137
5.1	多元函数 极限 连续性	137
5.2	偏导数与全微分基本概念	141
5.3	求偏导法则	146
5.4	多元函数极值	157
习题 5		161
6	重积分	163
6.1	二重积分	163
6.2	三重积分	173
6.3	重积分的应用	178
习题 6		185
7	线积分 面积分	187
7.1	曲线积分	187
7.2	曲面积分	194
7.3	三大定理	198
7.4	场论初步 方向导数	208
习题 7		212
8	无穷级数	214
8.1	常数项级数	214
8.2	幂级数	224
8.2.1	求幂级数的收敛域	224
8.2.2	求幂级数的和函数	226
8.2.3	借助于幂级数求数项级数的和	228
8.2.4	求函数的幂级数展开式	229
8.2.5	杂题	232
8.3	傅里叶级数	236
8.3.1	区间 $[-\pi, \pi]$ 上的傅里叶级数	237
8.3.2	展开已知函数为正弦级数或余弦级数	239
8.3.3	区间 $[-l, l]$ 上的傅里叶级数	239
8.3.4	杂题	240

习题 8	243
9 常微分方程	246
9.1 基本概念	246
9.2 一阶方程	248
9.3 二阶方程	254
9.3.1 特殊的二阶方程	257
9.3.2 二阶常系数线性方程	258
9.3.3 高于二阶的常系数线性齐次方程	269
9.3.4 欧拉方程	270
9.3.5 常系数线性方程组	271
9.4 微分方程的应用	273
9.4.1 求函数表达式	273
9.4.2 几何上的应用	275
9.4.3 物理上的应用	277
9.5 差分方程	280
习题 9	282

线 性 代 数

10 行列式	284
10.1 行列式的定义与性质	284
10.2 行列式的计算	289
10.2.1 将某行(列)化为非零元素甚少然后展开	289
10.2.2 化为上(下)三角行列式	291
10.2.3 观察分析法	292
10.2.4 利用已知结果和公式	293
10.2.5 寻求递推公式,利用数学归纳法	294
10.2.6 运用矩阵的运算和性质	297
习题 10	300
11 矩阵	302
11.1 矩阵及其运算	302
11.2 逆矩阵 伴随矩阵 矩阵方程	306
习题 11	314
12 向量	316
12.1 线性相关性 秩	316
12.2 向量空间 线性变换	331
习题 12	338
13 线性方程组	341
13.1 线性齐次方程组	341
13.2 线性非齐次方程组	345
习题 13	354
14 矩阵的对角化	356
14.1 特征值和特征向量	356

14.2	相似矩阵	361
	习题 14	367
15	二次型	369
15.1	化二次型为标准形	369
15.2	正定二次型	380
	习题 15	384

概 率 论 数 理 统 计

16	随机事件 概率	385
16.1	随机事件及其运算	385
16.2	概率的定义与性质	387
16.3	条件概率与事件的独立性	392
	习题 16	400
17	随机变量及其概率分布	402
17.1	随机变量	402
17.2	二维随机变量及其概率分布	412
17.3	随机变量函数的分布	420
	习题 17	430
18	数字特征	435
18.1	随机变量的数字特征	435
18.2	二维随机变量的数字特征	444
	习题 18	456
19	大数定律 中心极限定理	460
	习题 19	464
20	数理统计初步	465
20.1	数理统计的基本概念	465
20.2	参数估计	471
20.3	假设检验	480
	习题 20	484
	习题答案与提示	486

高等数学

1 函数 极限 连续性

1.1 一元函数基本概念

内容提要与重点

1) 一元函数概念

设 $I \subseteq \mathbf{R}$, 则称映射

$$f: I \rightarrow \mathbf{R}$$

为定义在 I 上的一元函数. 称 I 为 f 的定义域, 记为 $D(f)$. 全体函数值 $f(x)$ 的集合称为 f 的值域.

* 利用已知条件求函数的表示式. * 利用函数的解析表达式求函数的定义域. ①

2) 函数的初等性质(奇偶性, 有界性, 周期性)

3) 反函数, * 复合函数, 隐函数概念

4) * 基本初等函数

幂函数 $y=x^a$, 指数函数 $y=a^x (a>0, a \neq 1)$, 对数函数 $y=\log_a x (a>0, a \neq 1)$, 三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$, 反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$ 的性质及其简图.

5) 初等函数与分段函数

例题与试题解析

例 1.1.1 设 $f(x)=\cos x, f(\varphi(x))=2-x^2$, 求函数 $\varphi(x)$ 及其定义域.

解 由 $f(x)=\cos x$ 得 $f(u)=\cos u$, 令 $u=\varphi(x)$ 代入得 $f(\varphi(x))=\cos \varphi(x)=2-x^2$, 故

$$\varphi(x)=\arccos(2-x^2).$$

其定义域由解不等式 $|2-x^2| \leq 1$ 可得

$$D(\varphi)=\{x | -\sqrt{3} \leq x \leq -1 \text{ 或 } 1 \leq x \leq \sqrt{3}\}.$$

例 1.1.2 设函数 $f(x)$ 满足等式

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=c \ln x,$$

① 本书中标“*”的内容为考研重点.

其中 a, b, c 为常数, $a \neq b$, 求 $f(x)$.

解 令 $x = \frac{1}{t}$ 代入原式得

$$af\left(\frac{1}{t}\right) + bf(t) = -c \ln t,$$

将此式中的 t 改为 x , 并与原式联立得

$$\begin{cases} af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = c \ln x, \\ bf(x) + af\left(\frac{1}{x}\right) = -c \ln x, \end{cases}$$

解此关于 $f(x)$ 与 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的方程组得

$$f(x) = \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{vmatrix} c \ln x & b \\ -c \ln x & a \end{vmatrix} = \frac{c}{a-b} \ln x.$$

例 1.1.3 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0; \\ x^2 + x, & x > 0. \end{cases}$ 求 $f(-x)$.

解 因为 $f(u) = \begin{cases} u^2, & u \leq 0; \\ u^2 + u, & u > 0. \end{cases}$ 令 $u = -x$ 代入得

$$\begin{aligned} f(-x) &= \begin{cases} (-x)^2, & -x \leq 0; \\ (-x)^2 + (-x), & -x > 0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2, & x \geq 0; \\ x^2 - x, & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

例 1.1.4 已知

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0; \\ -x, & x \geq 0. \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0; \\ 2+x, & x > 0. \end{cases}$$

试求复合函数 $f(g(x))$ 与 $g(f(x))$.

解 因为

$$f(u) = \begin{cases} u^2, & u < 0; \\ -u, & u \geq 0. \end{cases}$$

令 $u = g(x)$ 代入得

$$f(g(x)) = \begin{cases} g^2(x), & g(x) < 0; \\ -g(x), & g(x) \geq 0. \end{cases}$$

因 $\forall x \in \mathbf{R}, g(x) > 0$. 故

$$f(g(x)) = -g(x) = \begin{cases} x-2, & x \leq 0; \\ -x-2, & x > 0. \end{cases}$$

因为

$$g(u) = \begin{cases} 2-u, & u \leq 0; \\ 2+u, & u > 0. \end{cases}$$

令 $u = f(x)$ 代入得

$$g(f(x)) = \begin{cases} 2-f(x), & f(x) \leq 0; \\ 2+f(x), & f(x) > 0. \end{cases}$$

而 $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) = -x, x \geq 0; f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) = x^2, x < 0$. 所以

$$g(f(x)) = \begin{cases} 2 - (-x) = 2 + x, & x \geq 0; \\ 2 + x^2, & x < 0. \end{cases}$$

例 1.1.5 求函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2, & x < -1; \\ x^3, & -1 \leq x \leq 2; \\ 12x - 16, & x > 2 \end{cases}$$

的反函数.

解 由 $y = 1 - 2x^2, x < -1$ 可得 $x = -\sqrt{\frac{1-y}{2}}, y < -1$; 由 $y = x^3, -1 \leq x \leq 2$ 可得 $x = \sqrt[3]{y}, -1 \leq y \leq 8$; 由 $y = 12x - 16, x > 2$ 可得 $x = \frac{1}{12}(16 + y), y > 8$. 所以所求反函数为

$$y = f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1-x}{2}}, & x < -1; \\ \sqrt[3]{x}, & -1 \leq x \leq 8; \\ \frac{1}{12}(16 + x), & x > 8. \end{cases}$$

1.2 求极限的各种方法

内容提要与重点

1) 数列与函数极限的定义

(1) 若 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时恒有

$$|x_n - A| < \epsilon,$$

其中 $A \in \mathbb{R}$, 则称 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 或称 $\{x_n\}$ 收敛于 A .

(2) 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时恒有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

其中 $A \in \mathbb{R}$, 则称 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 或称 $x \rightarrow a$ 时 $f(x)$ 有有限极限 A .

(3) 若 $\forall \epsilon > 0, \exists M > 0$, 当 $x > M$ 时恒有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

其中 $A \in \mathbb{R}$, 则称 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 或称 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x)$ 有有限极限 A .

关于其它极限过程(如 $x \rightarrow -\infty, x \rightarrow \infty$)极限的定义可类似地写出, 这里从略.

2) 函数在 $x = a$ 的左、右极限的定义

(1) 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < a - x < \delta$ 时恒有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

其中 $A \in \mathbb{R}$, 则称 $f(a-) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A$ (左极限为 A).

(2) 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < x - a < \delta$ 时恒有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

其中 $A \in \mathbf{R}$, 则称 $f(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A$ (右极限为 A).

3) 判定极限存在的夹逼准则

若函数 $f(x), g(x), h(x)$ 皆在 $x=a$ 的某去心邻域 I 内定义, 且 $\forall x \in I$ 有

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

若

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A \text{ (或 } \pm\infty),$$

则

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \text{ (或 } \pm\infty).$$

这里的极限过程改为 $x \rightarrow +\infty$, 或 $x \rightarrow -\infty$, 上述结论仍成立.

4) 判定极限存在的单调有界准则

若数列 $\{x_n\}$ 单调增有上界, 或单调减有下界, 则数列 $\{x_n\}$ 必收敛, 即 $\exists A \in \mathbf{R}$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A.$$

5) * 两个重要极限

若 $x \rightarrow a$ (或 $x \rightarrow a+, x \rightarrow a-, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty, x \rightarrow \infty$) 时 $u(x) \rightarrow 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow a} (1 + u(x))^{\frac{1}{u(x)}} = e.$$

6) * 等价无穷小因子替换求极限

若 $x \rightarrow a$ (或其它极限过程) 时 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小 ($\alpha(x) \sim \beta(x)$), $\gamma(x)$ 与 $\delta(x)$ 为等价无穷小 ($\gamma(x) \sim \delta(x)$), 则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)f(x)}{\gamma(x)g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)f(x)}{\delta(x)g(x)},$$

当右端极限为 A 时, 左端也为 A ; 或右端极限不存在时, 左端也不存在.

当 $u \rightarrow 0$ 时, 有下列无穷小的等价性

$$(1) u \sim \sin u \sim \arcsin u \sim \tan u \sim \arctan u \sim \ln(1+u) \sim e^u - 1;$$

$$(2) (1+u)^\lambda - 1 \sim \lambda u \quad (\lambda \in \mathbf{R});$$

$$(3) 1 - \cos u \sim \frac{1}{2}u^2.$$

7) * 四则运算法则

综合运用初等变形, 变量代换, 四则运算法则, 两个准则, 两个重要极限, 等价无穷小因子替换等各种方法求极限.

在下面的章节中, 还有运用导数定义, 洛必达法则, 泰勒展式, 定积分定义, 级数性质等求极限的方法.

例题与试题解析

例 1.2.1 用定义证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n} = 0.$$

证 因为

$$\left| \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n} - 0 \right| = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n} < \frac{1}{1 + n \frac{1}{\sqrt{n}}} < \frac{1}{\sqrt{n}},$$

$\forall \varepsilon > 0$, 要使 $\left| \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n} - 0 \right| < \varepsilon$, 我们用上式让 $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, 所以 $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$, 故取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \right]$ 时有

下列叙述:

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \right]$, 当 $n > N$ 时有 $\left| \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n} - 0 \right| < \varepsilon$. 原式得证.

例 1.2.2 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2^3} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \quad (x \neq 0)$.

解 因为

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2^3} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \cdot 2^n \sin \frac{x}{2^n} = \sin x,$$

于是

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^n \cdot \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}.$$

评注 本例用到初等变形、等价无穷小因子 $\sin u \sim u \quad (u \rightarrow 0)$ 替换等求极限的方法.

例 1.2.3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x} - 4}{\sqrt{4-x^2} - 2}$.

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x} - 4)(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x} + 4)}{2 \left[\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} - 1 \right] (\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{16-x^2} - 8)}{2 \cdot \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{4} \right) \cdot 8} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \left[\sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2} - 1 \right]}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{16} \right)}{-x^2} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

评注 本例用到四则运算法则、等价无穷小因子 $(1+u)^a - 1 \sim \lambda u \quad (u \rightarrow 0)$ 替换等求极限的方法.

例 1.2.4 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1998}}{n^\alpha - (n-1)^\alpha} = \beta,$$

这里 α, β 皆为异于 0 的实数, 求 α, β 的值.

解

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1998}}{n^\alpha - (n-1)^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1998}}{n^\alpha \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\alpha \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1998-\alpha}}{\alpha \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} n^{1999-\alpha},$$

这里用到 $u \rightarrow 0$ 时 $(1+u)^\alpha - 1 \sim \alpha u$. 欲使上式右端有非 0 极限存在 $\Leftrightarrow 1999 - \alpha = 0$, 故 $\alpha =$

$$1999, \beta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{1999}.$$

例 1.2.5 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})}$.

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})}{x(1 - \cos \sqrt{x})(1 + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{2x(1 - \cos \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{2x \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

评注 本例用到四则运算法则、等价无穷小因子 $1 - \cos u \sim \frac{1}{2}u^2 (u \rightarrow 0)$ 替换等求极限的方法.

例 1.2.6 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(1 - \sin x)}{\sin^4(\cos x)}$.

解 当 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时, $1 - \sin x \rightarrow 0$, 故 $1 - \cos(1 - \sin x) \sim \frac{1}{2}(1 - \sin x)^2$, 又 $\cos x \rightarrow 0$, 所以 $\sin^4(\cos x) \sim \cos^4 x$. 故

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}(1 - \sin x)^2}{\cos^4 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)^2}{2(1 - \sin x)^2(1 + \sin x)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{2(1 + \sin x)^2} = \frac{1}{8}.$$

例 1.2.7 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$.

$$\text{解 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x}(e^{x - \sin x} - 1)}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot (x - \sin x)}{x - \sin x} = 1.$$

评注 本例用到初等变形和等价无穷小因子 $e^{x - \sin x} - 1 \sim x - \sin x (x \rightarrow 0)$ 替换等求极限的方法, 计算比较简单. 若改用洛必达法则求极限就麻烦得多.

例 1.2.8 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}) (a > 0)$.

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a^{\frac{1}{n+1}}(a^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot (a^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot (e^{\frac{\ln a}{n(n+1)}} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \frac{\ln a}{n(n+1)} = \ln a. \end{aligned}$$

评注 这里用到 $n \rightarrow \infty$ 时 $u = \frac{\ln a}{n(n+1)} \rightarrow 0$ 与 $e^u - 1 \sim u (u \rightarrow 0)$.

例 1.2.9 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x + \cos x - 1}{\ln(1 - 2x) + 1 - e^{x^2}}$.

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{\tan x}{x} + \frac{\cos x - 1}{x}}{\frac{\ln(1 - 2x)}{x} + \frac{1 - e^{x^2}}{x}} = \frac{2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 2x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}} \\ &= \frac{2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x}} = \frac{2 - 0}{-2 - 0} = -1. \end{aligned}$$

评注 本例若用下列求法是错误的:

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \frac{1}{2}x^2}{-2x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \frac{1}{2}x}{-2 - x} = -1,$$

由读者自己找出处。

例 1.2.10 求 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

解 $x \rightarrow -\infty$ 时, $3^x \rightarrow 0$, 所以 $\ln(1+3^x) \sim 3^x$, 同理 $\ln(1+2^x) \sim 2^x$, 故

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x}{2^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^x = 0; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 3^x (1+3^{-x})}{\ln 2^x (1+2^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln 3 + \ln(1+3^{-x})}{x \ln 2 + \ln(1+2^{-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 3 + \frac{1}{x} \ln(1+3^{-x})}{\ln 2 + \frac{1}{x} \ln(1+2^{-x})} = \frac{\ln 3}{\ln 2}. \end{aligned}$$

评注 本例的第二个极限, 在进行到第二步时, 若用下列求法是错误的:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln 3 + \ln(1+3^{-x})}{x \ln 2 + \ln(1+2^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln 3 + 0}{x \ln 2 + 0} = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

由读者自己找出处。

例 1.2.11 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[n]{\cos nx}}{x^2} \quad (n \in \mathbb{N})$.

解法 1 令 $\sqrt[n]{\cos nx} = t$, 则 $t \rightarrow 1$,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-t)(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1})}{x^2(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1})} \quad (t \rightarrow 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-t^n}{nx^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos nx}{nx^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(nx)^2}{nx^2} = \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

解法 2 $x \rightarrow 0$ 时

$$1 - \sqrt[n]{\cos nx} = 1 - \sqrt[n]{1 + (\cos nx - 1)} \sim -\frac{1}{n}(\cos nx - 1) \sim \frac{1}{2n}(nx)^2 = \frac{1}{2}nx^2.$$

于是

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}nx^2}{x^2} = \frac{n}{2}.$$

例 1.2.12 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos x})(1 - \sqrt[3]{\cos x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{\cos x})}{(1 - \cos x)^{n-1}}.$$

解 当 $x \rightarrow 0$ 时 $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, 且

$$1 - \sqrt{\cos x} = 1 - \sqrt{1 + (\cos x - 1)} \sim -\frac{1}{2}(\cos x - 1) \sim \frac{1}{4}x^2,$$

$$1 - \sqrt[3]{\cos x} = 1 - \sqrt[3]{1 + (\cos x - 1)} \sim -\frac{1}{3}(\cos x - 1) \sim \frac{1}{6}x^2,$$

.....

$$1 - \sqrt[n]{\cos x} = 1 - \sqrt[n]{1 + (\cos x - 1)} \sim -\frac{1}{n}(\cos x - 1) \sim \frac{1}{2n}x^2,$$

应用等价无穷小因子替换法得

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdots \frac{1}{2n} x^{2(n-1)}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} x^{2(n-1)}} = \frac{1}{n!}.$$

例 1.2.13 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$.

解 因为 $x \rightarrow 0$ 时 $\sin^2 x \sim x^2$, 又

$$\cos x - \sqrt{\cos x} = \cos x - 1 - \sqrt{1 + \cos x - 1} + 1,$$

其中 $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$, $\sqrt{1 + \cos x - 1} - 1 \sim \frac{1}{2}(\cos x - 1) \sim -\frac{1}{4}x^2$,
所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \cos x - 1} - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}x^2}{x^2} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

例 1.2.14 求 $\lim_{x \rightarrow 0+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{2}{x}}$.

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0+} (1 + \cos \sqrt{x} - 1)^{\frac{1}{\cos \sqrt{x} - 1} \cdot \frac{2(\cos \sqrt{x} - 1)}{x}} \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2(\cos \sqrt{x} - 1)}{x} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-2 \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{x} \right) = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

评注 本例用到初等变形、第二个重要极限和等价无穷小因子 $1 - \cos u \sim \frac{1}{2}u^2 (u \rightarrow 0)$ 替换等求极限的方法.

例 1.2.15 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right)$.

解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \tan \frac{2}{n}}{1 - \tan \frac{2}{n}} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2 \tan \frac{2}{n}}{1 - \tan \frac{2}{n}} \right)^{\frac{1 - \tan \frac{2}{n}}{2 \tan \frac{2}{n}} \cdot \frac{2n \tan \frac{2}{n}}{1 - \tan \frac{2}{n}}} \\ &= \exp \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \tan \frac{2}{n}}{1 - \tan \frac{2}{n}} \right) \end{aligned}$$

$$= \exp \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \cdot \frac{2}{n}}{1 - \tan \frac{2}{n}} \right] = e^4.$$

评注 本例用到初等变形、第二个重要极限和等价无穷小因子 $\tan u \sim u$ ($u \rightarrow 0$) 替换等求极限的方法.

例 1.2.16 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\sin \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) - \sin \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$.

解 令 $x = \frac{1}{t}$, 则 $t \rightarrow 0+$,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin \ln(1+3t) - \sin \ln(1+t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2 \cos \frac{\ln(1+3t) + \ln(1+t)}{2} \sin \frac{\ln(1+3t) - \ln(1+t)}{2}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2 \cdot 1 \cdot \frac{\ln(1+3t) - \ln(1+t)}{2}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln \left(1 + \frac{2t}{1+t} \right)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2t}{t(1+t)} \\ &= 2. \end{aligned}$$

评注 本例用到变量变换、初等变形、等价无穷小因子 $\sin u \sim u, \ln(1+u) \sim u$ ($u \rightarrow 0$) 替换等求极限的方法.

例 1.2.17 试求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n+1} \right)$.

解 令 $\arctan \frac{1}{n} = A, \arctan \frac{1}{n+1} = B$, 则

$$\frac{1}{n} = \tan A, \quad \frac{1}{n+1} = \tan B,$$

$$\text{因 } \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n(n+1)}} = \frac{1}{1+n(n+1)}, \text{ 所以}$$

$$\arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n+1} = A - B = \arctan \frac{1}{1+n(n+1)},$$

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \arctan \frac{1}{1+n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1+n(n+1)} = 1.$$

例 1.2.18 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} |\sin(\pi \sqrt{n^2+n})|$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} |\sin \pi(n + \sqrt{n^2+n} - n)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |\cos n\pi \cdot \sin \pi(\sqrt{n^2+n} - n)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |\sin \pi(\sqrt{n^2+n} - n)| \\ &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \pi(\sqrt{n^2+n} - n) \right| \end{aligned}$$