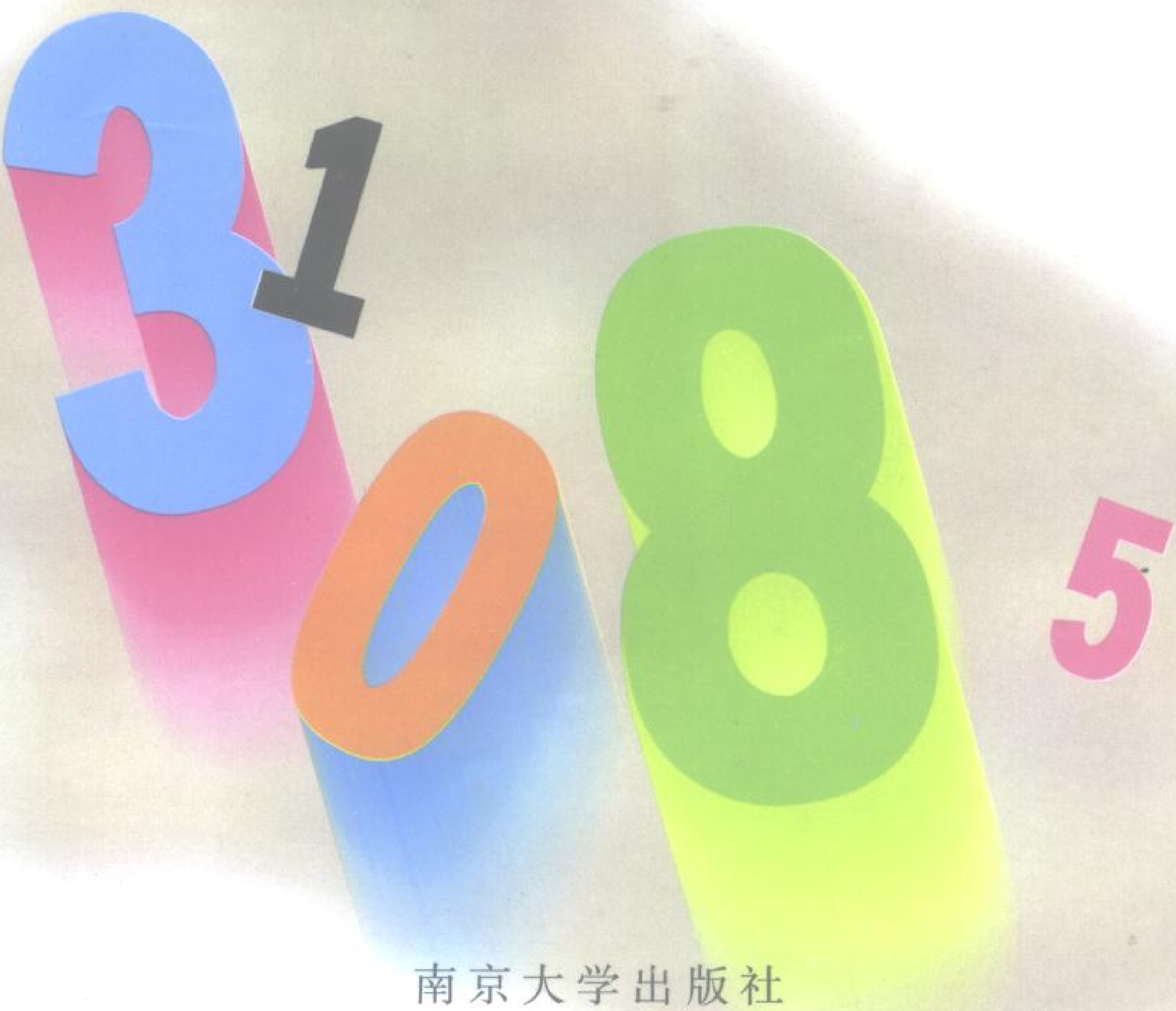
大学数学复习指导与试题解析

主　编　陈　仲
副主编　姜东平　陈华钧



南京大学出版社

C 3-44
C 65-2
(2)
442034

大学数学复习与试题解析

主　编　陈　仲
副主编　姜东平　陈华钧

00442034
★哈尔滨船舶工程学院★ 图书馆 中文藏书
013-44
C65-2
(2)

南京大学出版社

书　　名　**大学数学复习指导与试题解析**
著　　者　主编　陈仲　副主编　姜东平　陈华钧
出 版 者　南京大学出版社
　　　　　（南京汉口路22号　南京大学校内　邮编210093）
印刷　常熟市印刷二厂
发行　江苏省新华书店　全国各地新华书店经售
开本　787×1092　1/16　印张　31.375　字数　783千
1999年5月第2版　1999年5月第5次印刷
印数　20 001—25 000
定价　34.00元
ISBN　7-305-02062-1/O·109

声明:(1) 版权所有,侵权必究.
(2) 本版书若有印装质量问题,与经销者联系
发行部订购、联系电话:(025)3592317

编 者 的 话

《高等数学》是大学理科、工科和部分文科专业学生必修的基础课，也是硕士研究生入学考试的一门必试科目．为了帮助大学生们学好并强化《高等数学》，我们根据原国家教委1989年审定的“高等数学课程教学基本要求”，这次又根据教育部1998年制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的要求，融学习指导与考研为一体，编写了这本书．内容包括高等数学、线性代数、概率统计三大部分，每一部分又分为若干章节，每一节又包含三部分：一是“内容提要与重点”，列出基本概念、重要定理和主要内容，并对其中重要内容作简要的叙述；二是“例题与试题解析”，我们从历年研究生入学考试试题和有关书籍中精选精编了有代表性的例题共870多条，逐题详细解答或证明，介绍了各种题型的解题方法和技巧，这些例题述及内容广、类型多、技巧性强，是本书的核心部分，旨在提高分析能力，掌握基本概念和解题技巧；三是“习题”，题目主要选自各种试题，在书末有习题答案与提示．

本书的“高等数学”部分（“级数”一章除外）由陈仲编写，“线性代数”部分和“级数”一章由姜东平编写，“概率论与数理统计”部分由陈华钧编写，全书由陈仲统稿．

由于编者水平所限，书中缺点和不足难免，诚恳期待同行与读者赐教．

目 录

高 等 数 学

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

线 性 代 数

概 率 论 数 理 统 计

高 等 数 学

1 函数 极限 连续性

1.1 一元函数基本概念

内容提要与重点

1）一元函数概念

设 $I\subseteq\mathbf{R}$，则称映射

$$f: I\to\mathbf{R}$$

为定义在 I 上的一元函数.称 I 为 f 的定义域，记为 $D(f)$.全体函数值 $f(x)$ 的集合称为 f 的值域.

*利用已知条件求函数的表示式.*利用函数的解析表达式求函数的定义域.[①]

2）函数的初等性质(奇偶性，有界性，周期性)

3）反函数，*复合函数，隐函数概念

4）*基本初等函数

幂函数 $y=x^{\lambda}$，指数函数 $y=a^x\ (a>0,a\neq1)$，对数函数 $y=\log_a x\ (a>0,a\neq1)$，三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$，反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arc\,cot} x$ 的性质及其简图.

5）初等函数与分段函数

例题与试题解析

例 1.1.1 设 $f(x)=\cos x$，$f(\varphi(x))=2-x^2$，求函数 $\varphi(x)$ 及其定义域.

解 由 $f(x)=\cos x$ 得 $f(u)=\cos u$，令 $u=\varphi(x)$ 代入得 $f(\varphi(x))=\cos\varphi(x)=2-x^2$，故

$$\varphi(x)=\arccos(2-x^2).$$

其定义域由解不等式 $|2-x^2|\leqslant1$ 可得

$$D(\varphi)=\{x\mid -\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1 \text{ 或 } 1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}\}.$$

例 1.1.2 设函数 $f(x)$ 满足等式

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=c\ln x,$$

① 本书中标“*”的内容为考研重点.

其中 a,b,c 为常数，$a\neq b$，求 $f(x)$.

解 令 $x=\dfrac{1}{t}$ 代入原式得

$$af\left(\frac{1}{t}\right)+bf(t)=-c\ \ln t,$$

将此式中的 t 改为 x，并与原式联立得

$$\begin{cases}af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=c\ \ln x,\\ bf(x)+af\left(\dfrac{1}{x}\right)=-c\ \ln x,\end{cases}$$

解此关于 $f(x)$ 与 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的方程组得

$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\begin{vmatrix}c\ \ln x & b\\ -c\ \ln x & a\end{vmatrix}=\frac{c}{a-b}\ln x.$$

例 1.1.3 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0;\\ x^2+x, & x>0.\end{cases}$ 求 $f(-x)$.

解 因为 $f(u)=\begin{cases}u^2, & u\leqslant 0;\\ u^2+u, & u>0.\end{cases}$ 令 $u=-x$ 代入得

$$f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant 0;\\ (-x)^2+(-x), & -x>0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0;\\ x^2-x, & x<0.\end{cases}$$

例 1.1.4 已知

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0;\\ -x, & x\geqslant 0.\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0;\\ 2+x, & x>0.\end{cases}$$

试求复合函数 $f(g(x))$ 与 $g(f(x))$.

解 因为

$$f(u)=\begin{cases}u^2, & u<0;\\ -u, & u\geqslant 0.\end{cases}$$

令 $u=g(x)$ 代入得

$$f(g(x))=\begin{cases}g^2(x), & g(x)<0;\\ -g(x), & g(x)\geqslant 0.\end{cases}$$

因 $\forall x\in\mathbf{R}, g(x)>0$. 故

$$f(g(x))=-g(x)=\begin{cases}x-2, & x\leqslant 0;\\ -x-2, & x>0.\end{cases}$$

因为

$$g(u)=\begin{cases}2-u, & u\leqslant 0;\\ 2+u, & u>0.\end{cases}$$

令 $u=f(x)$ 代入得

$$g(f(x))=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0;\\ 2+f(x), & f(x)>0.\end{cases}$$

而 $f(x)\leqslant 0\Leftrightarrow f(x)=-x, x\geqslant 0$；$f(x)>0\Leftrightarrow f(x)=x^2, x<0$. 所以

$$g(f(x))=\begin{cases}2-(-x)=2+x, & x\geqslant 0;\\ 2+x^2, & x<0.\end{cases}$$

例 1.1.5 求函数

$$f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1;\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2;\\ 12x-16, & x>2\end{cases}$$

的反函数.

解 由 $y=1-2x^2, x<-1$ 可得 $x=-\sqrt{\frac{1-y}{2}}, y<-1$；由 $y=x^3, -1\leqslant x\leqslant 2$ 可得 $x=\sqrt[3]{y}, -1\leqslant y\leqslant 8$；由 $y=12x-16, x>2$ 可得 $x=\frac{1}{12}(16+y), y>8$. 所以所求反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{\frac{1-x}{2}}, & x<-1;\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8;\\ \frac{1}{12}(16+x), & x>8.\end{cases}$$

1.2 求极限的各种方法

内容提要与重点

1）数列与函数极限的定义

(1) 若 $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时恒有

$$|x_n-A|<\varepsilon,$$

其中 $A\in\mathbf{R}$，则称 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，或称 $\{x_n\}$ 收敛于 A.

(2) 若 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

其中 $A\in\mathbf{R}$，则称 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，或称 $x\to a$ 时 $f(x)$ 有有限极限 A.

(3) 若 $\forall\varepsilon>0, \exists M>0$，当 $x>M$ 时恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

其中 $A\in\mathbf{R}$，则称 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，或称 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 有有限极限 A.

关于其它极限过程(如 $x\to-\infty, x\to\infty$)极限的定义可类似地写出，这里从略.

2）函数在 $x=a$ 的左、右极限的定义

(1) 若 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，当 $0<a-x<\delta$ 时恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

其中 $A\in\mathbf{R}$，则称 $f(a-)=\lim\limits_{x\to a-}f(x)=A$ (左极限为 A).

(2) 若 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，当 $0<x-a<\delta$ 时恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

其中 $A\in\mathbf{R}$，则称 $f(a+)=\lim\limits_{x\to a+}f(x)=A$（右极限为 A）.

3）判定极限存在的夹逼准则

若函数 $f(x),g(x),h(x)$ 皆在 $x=a$ 的某去心邻域 I 内定义，且 $\forall x\in I$ 有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),$$

若

$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}h(x)=A\ (\text{或}\pm\infty),$$

则

$$\lim_{x\to a}f(x)=A\ (\text{或}\pm\infty).$$

这里的极限过程改为 $x\to+\infty$，或 $x\to-\infty$，上述结论仍成立.

4）判定极限存在的单调有界准则

若数列 $\{x_n\}$ 单调增有上界，或单调减有下界，则数列 $\{x_n\}$ 必收敛，即 $\exists A\in\mathbf{R}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A.$$

5）* 两个重要极限

若 $x\to a$（或 $x\to a+,x\to a-,x\to+\infty,x\to-\infty,x\to\infty$）时 $u(x)\to 0$，则

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1;\quad \lim_{x\to a}(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}=\mathrm{e}.$$

6）* 等价无穷小因子替换求极限

若 $x\to a$（或其它极限过程）时 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小（$\alpha(x)\sim\beta(x)$），$\gamma(x)$ 与 $\delta(x)$ 为等价无穷小（$\gamma(x)\sim\delta(x)$），则有

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)f(x)}{\gamma(x)g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)f(x)}{\delta(x)g(x)},$$

当右端极限为 A 时，左端也为 A；或右端极限不存在时，左端也不存在.

当 $u\to 0$ 时，有下列无穷小的等价性

(1) $u\sim\sin u\sim\arcsin u\sim\tan u\sim\arctan u\sim\ln(1+u)\sim\mathrm{e}^u-1$；

(2) $(1+u)^\lambda-1\sim\lambda u\ (\lambda\in\mathbf{R})$；

(3) $1-\cos u\sim\dfrac{1}{2}u^2$.

7）* 四则运算法则

综合运用初等变形，变量代换，四则运算法则，两个准则，两个重要极限，等价无穷小因子替换等各种方法求极限.

在下面的章节中，还有运用导数定义，洛必达法则，泰勒展式，定积分定义，级数性质等求极限的方法.

例题与试题解析

例 1.2.1 用定义证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}=0.$$

证 因为

$$\left|\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}-0\right|=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}<\frac{1}{1+n\frac{1}{\sqrt{n}}}<\frac{1}{\sqrt{n}},$$

$\forall\varepsilon>0$,要使$\left|\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}-0\right|<\varepsilon$,我们用上式让$\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$,所以$n>\frac{1}{\varepsilon^2}$,故取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]$时有下列叙述:

$\forall\varepsilon>0$,取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]$,当$n>N$时有$\left|\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}-0\right|<\varepsilon$. 原式得证.

例 1.2.2 求$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$ $(x\neq 0)$.

解 因为

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot 2^n\sin\frac{x}{2^n}=\sin x,$$

于是

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\cdot\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

评注 本例用到初等变形、等价无穷小因子$\sin u\sim u$ $(u\to 0)$替换等求极限的方法.

例 1.2.3 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}-4}{\sqrt{4-x^2}-2}$.

解 $$原式=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}-4)(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}+4)}{2\left(\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}-1\right)(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}+4)}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{16-x^2}-8)}{2\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{4}\right)\cdot 8}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\left(\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}-1\right)}{-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{16}\right)}{-x^2}=\frac{1}{8}.$$

评注 本例用到四则运算法则、等价无穷小因子$(1+u)^\lambda-1\sim\lambda u$ $(u\to 0)$替换等求极限的方法.

例 1.2.4 设

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1998}}{n^\alpha-(n-1)^\alpha}=\beta,$$

这里α,β皆为异于0的实数,求α,β的值.

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1998}}{n^\alpha-(n-1)^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1998}}{n^\alpha\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^\alpha\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1998-\alpha}}{\alpha\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha}n^{1999-\alpha},$$

这里用到$u\to 0$时$(1+u)^\alpha-1\sim\alpha u$. 欲使上式右端有非0极限存在$\Leftrightarrow 1999-\alpha=0$,故$\alpha=1999$,$\beta=\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{1999}$.

例 1.2.5 求 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{(1-\sqrt{\cos x})(1+\sqrt{\cos x})}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1-\cos x}{2x(1-\cos\sqrt{x})}$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}=\frac{1}{2}.$$

评注 本例用到四则运算法则、等价无穷小因子 $1-\cos u\sim\dfrac{1}{2}u^2(u\to 0)$ 替换等求极限的方法.

例 1.2.6 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\cos(1-\sin x)}{\sin^4(\cos x)}$.

解 当 $x\to\dfrac{\pi}{2}$ 时，$1-\sin x\to 0$，故 $1-\cos(1-\sin x)\sim\dfrac{1}{2}(1-\sin x)^2$，又 $\cos x\to 0$，所以 $\sin^4(\cos x)\sim\cos^4 x$. 故

$$原式=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{2}(1-\sin x)^2}{\cos^4 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)^2}{2(1-\sin x)^2(1+\sin x)^2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2(1+\sin x)^2}=\frac{1}{8}.$$

例 1.2.7 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

解 $$原式=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot(x-\sin x)}{x-\sin x}=1.$$

评注 本例用到初等变形和等价无穷小因子 $e^{x-\sin x}-1\sim x-\sin x\ (x\to 0)$ 替换等求极限的方法，计算比较简单. 若改用洛必达法则求极限就麻烦得多.

例 1.2.8 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})\ (a>0)$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n^2a^{\frac{1}{n+1}}\left(a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\cdot\left(a^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\left(e^{\frac{\ln a}{n(n+1)}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{\ln a}{n(n+1)}=\ln a.$$

评注 这里用到 $n\to\infty$ 时 $u=\dfrac{\ln a}{n(n+1)}\to 0$ 与 $e^u-1\sim u\ (u\to 0)$.

例 1.2.9 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\tan x+\cos x-1}{\ln(1-2x)+1-e^{x^2}}$.

解 $$原式=\lim_{x\to 0}\frac{2\dfrac{\tan x}{x}+\dfrac{\cos x-1}{x}}{\dfrac{\ln(1-2x)}{x}+\dfrac{1-e^{x^2}}{x}}=\frac{2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x}}$$

$$=\frac{2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}}=\frac{2-0}{-2-0}=-1.$$

评注 本例若用下列求法是错误的：

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{1}{2}x^2}{-2x-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2-\frac{1}{2}x}{-2-x}=-1,$$

由读者自己找出错处.

例 1.2.10 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$； $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

解 $x\to-\infty$ 时，$3^x\to0$，所以 $\ln(1+3^x)\sim3^x$，同理 $\ln(1+2^x)\sim2^x$，故

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{2^x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x=0;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln3^x(1+3^{-x})}{\ln2^x(1+2^{-x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln3+\ln(1+3^{-x})}{x\ln2+\ln(1+2^{-x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln3+\frac{1}{x}\ln(1+3^{-x})}{\ln x+\frac{1}{x}\ln(1+2^{-x})}=\frac{\ln3}{\ln2}.$$

评注 本例的第二个极限，在进行到第二步时，若用下列求法是错误的：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln3+\ln(1+3^{-x})}{x\ln2+\ln(1+2^{-x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln3+0}{x\ln2+0}=\frac{\ln3}{\ln2}.$$

由读者自己找出错处.

例 1.2.11 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$ $(n\in\mathbf{N})$.

解法 1 令 $\sqrt[n]{\cos nx}=t$，则 $t\to1$，

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{(1-t)(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1})}{x^2(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1})}\quad(t\to1)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-t^n}{nx^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos nx}{nx^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(nx)^2}{nx^2}=\frac{n}{2}.$$

解法 2 $x\to0$ 时

$$1-\sqrt[n]{\cos nx}=1-\sqrt[n]{1+(\cos nx-1)}\sim-\frac{1}{n}(\cos nx-1)\sim\frac{1}{2n}(nx)^2=\frac{1}{2}nx^2.$$

于是

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}nx^2}{x^2}=\frac{n}{2}.$$

例 1.2.12 求

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-\sqrt{\cos x})(1-\sqrt[3]{\cos x})\cdots(1-\sqrt[n]{\cos x})}{(1-\cos x)^{n-1}}.$$

解 当 $x\to0$ 时 $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，且

$$1-\sqrt{\cos x}=1-\sqrt{1+(\cos x-1)}\sim-\frac{1}{2}(\cos x-1)\sim\frac{1}{4}x^2,$$

$$1-\sqrt[3]{\cos x}=1-\sqrt[3]{1+(\cos x-1)}\sim-\frac{1}{3}(\cos x-1)\sim\frac{1}{6}x^2,$$

……

$$1-\sqrt[n]{\cos x}=1-\sqrt[n]{1+(\cos x-1)}\sim-\frac{1}{n}(\cos x-1)\sim\frac{1}{2n}x^2,$$

应用等价无穷小因子替换法得

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{6}\cdots\dfrac{1}{2n}x^{2(n-1)}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}x^{2(n-1)}}=\frac{1}{n!}.$$

例 1.2.13 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$.

解 因为 $x\to 0$ 时 $\sin^2 x\sim x^2$，又

$$\cos x-\sqrt{\cos x}=\cos x-1-\sqrt{1+\cos x-1}+1,$$

其中 $\cos x-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$，$\sqrt{1+\cos x-1}-1\sim\dfrac{1}{2}(\cos x-1)\sim-\dfrac{1}{4}x^2$，所以

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\cos x-1}-1}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{2}x^2}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{4}x^2}{x^2}\\&=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

例 1.2.14 求 $\lim\limits_{x\to 0+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{2}{x}}$.

解

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 0+}(1+\cos\sqrt{x}-1)^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}\cdot\frac{2(\cos\sqrt{x}-1)}{x}}\\&=\exp\left[\lim_{x\to 0+}\frac{2(\cos\sqrt{x}-1)}{x}\right]\\&=\exp\left[\lim_{x\to 0+}\frac{-2\cdot\dfrac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{x}\right]=\frac{1}{e}.\end{aligned}$$

评注 本例用到初等变形、第二个重要极限和等价无穷小因子 $1-\cos u\sim\dfrac{1}{2}u^2(u\to 0)$ 替换等求极限的方法.

例 1.2.15 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$.

解

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\tan\dfrac{2}{n}}{1-\tan\dfrac{2}{n}}\right)^n\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2\tan\dfrac{2}{n}}{1-\tan\dfrac{2}{n}}\right)^{\frac{1-\tan\frac{2}{n}}{2\tan\frac{2}{n}}\cdot\frac{2n\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}}\\&=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n\tan\dfrac{2}{n}}{1-\tan\dfrac{2}{n}}\right)\end{aligned}$$

$$=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{2n\cdot\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right\}=e^4.$$

评注 本例用到初等变形、第二个重要极限和等价无穷小因子 $\tan u\sim u\ (u\to 0)$替换等求极限的方法.

例 1.2.16 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

解 令 $x=\frac{1}{t}$,则 $t\to 0+$,

$$原式=\lim_{t\to 0+}\frac{\sin\ln(1+3t)-\sin\ln(1+t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{2\cos\frac{\ln(1+3t)+\ln(1+t)}{2}\sin\frac{\ln(1+3t)-\ln(1+t)}{2}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{2\cdot 1\cdot\frac{\ln(1+3t)-\ln(1+t)}{2}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\ln\left(1+\frac{2t}{1+t}\right)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{2t}{t(1+t)}$$

$$=2.$$

评注 本例用到变量变换、初等变形、等价无穷小因子 $\sin u\sim u$,$\ln(1+u)\sim u\ (u\to 0)$ 替换等求极限的方法.

例 1.2.17 试求 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}\right)$.

解 令 $\arctan\frac{1}{n}=A$,$\arctan\frac{1}{n+1}=B$,则

$$\frac{1}{n}=\tan A,\quad \frac{1}{n+1}=\tan B,$$

因 $\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}=\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n(n+1)}}=\frac{1}{1+n(n+1)}$,所以

$$\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}=A-B=\arctan\frac{1}{1+n(n+1)},$$

$$原式=\lim_{n\to\infty}n^2\arctan\frac{1}{1+n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+n(n+1)}=1.$$

例 1.2.18 求 $\lim\limits_{n\to\infty}|\sin(\pi\sqrt{n^2+n})|$.

解

$$原式=\lim_{n\to\infty}|\sin\pi(n+\sqrt{n^2+n}-n)|$$

$$=\lim_{n\to\infty}|\cos n\pi\cdot\sin\pi(\sqrt{n^2+n}-n)|$$

$$=\lim_{n\to\infty}|\sin\pi(\sqrt{n^2+n}-n)|$$

$$=\left|\lim_{n\to\infty}\sin\pi(\sqrt{n^2+n}-n)\right|$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com