PURE AND APPLIED LOGIC

数理和应用逻辑文集

PROCEEDINGS OF CHINESE CONFERENCE ON PURE AND APPLIED LOGIC BEIJING, 1992

张锦文 主编
EDITED BY ZHANG JINWEN

数理和应用逻辑文集 PURE AND APPLIED LOGIC

PURE AND APPLIED LOGIC

数理和应用逻辑文集

PROCEEDINGS OF CHINESE CONFERENCE
ON PURE AND APPLIED LOGIC
BEIJING, 1992

张锦文 主编

Edited by **Zhang Jinwen**

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

新登字(京)159号

数理和应用逻辑文集
张锦文　主编
责任编辑:邱淑清
*
北京大学出版社出版
(北京大学校内)
北京大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
787×1092毫米　16开本　11印张　296千字
1992年5月第一版　1992年5月第一次印刷
印数:0001—1100册
ISBN 7-301-01891-6/O·288
定价:16.80元

《中国数理应用逻辑年刊》编委会
Chinese Annals of Pure and Applied Logic
EDITORIAL COMMITTEE

内 容 简 介

本文集汇集了数理逻辑、应用逻辑及其在计算机科学领域中应用的研究论文和综述报告共24篇，其中包括胡世华先生近几年的主要工作，即递归结构理论的建立以及在数论未解决问题可证性研究中的应用；莫绍揆先生关于序数的新观点；王世强先生关于模型论在代数中应用的介绍；周巢尘先生关于电路设计的逻辑模型的研究，是应用逻辑研究的一个范例；张锦文先生对集合论研究的综述；以及我国中青年逻辑工作者在各主要分支的研究新成果。为促进海峡两岸数理逻辑学者的学术交流，本文集还收有台湾中原大学董世平教授关于判定性理论的一篇论文。

本文集反映了我国数理逻辑和应用逻辑在近几年中的一些重要研究新成果与发展方向，它对促进我国计算机科学理论、人工智能等方面的研究工作具有重要的学术价值；也是高等院校数学、计算机科学、人工智能和哲学等有关专业的教师、研究生，以及研究人员的一本很有价值的参考书。

前　　言

全国数理逻辑及应用逻辑研讨会是我国数理逻辑工作者的学术论坛. 自 1989 年 10 月在扬州举行首届会议以来, 国际国内的数理逻辑和应用逻辑又有长足进步. 为此, 我们组织这次第二届研讨会, 为广大数理逻辑工作者提供一个学习交流的机会. 会议筹备工作受到我国著名数理逻辑学家的鼓励和积极支持. 莫绍揆教授、王世强教授、张锦文教授、李祥教授等都为我们寄来了他们的研究论文和综合报告, 台湾中原大学董世平教授也提交了论文. 会议共收到近 50 篇稿件. 限于篇幅, 我们从中选出 21 篇论文收入本文集.

今年欣逢我国数理逻辑界的老前辈、学部委员胡世华先生 80 寿辰. 在中国数学会, 中国科学院软件研究所的支持下, 我们将这次研讨会同时作为祝贺胡先生 80 寿辰的论文报告会. 胡先生从事数理逻辑研究和教育辛勤耕耘五十多年, 培养出一大批正活跃在数理逻辑和计算机科学界的人才, 为我国数理逻辑和应用逻辑的发展作出了巨大贡献. 本文集收录的"递归结构理论"一文就是胡先生近几年的精心研究成果. 杨东屏研究员撰写的"胡世华先生的学术成就"一文为胡先生至今为止的学术贡献做了全面概括.

本文集的出版得到中国数学会, 中国科学院软件研究所, 北京大学出版社等单位以及广大作者的大力支持, 在此我们谨向他们表示衷心的感谢.

祝贺胡世华先生 80 寿辰
暨第二届全国数理逻辑与应用逻辑研讨会
会务组
一九九二年五月

目　　录

递归结构理论

胡 世 华

(中国科学院软件研究所)

序

Hilbert 说，判定问题是"数理逻辑中的基本问题". 在 ML(数理逻辑)中对可判定性和不可判定性的研究都有很多成果. 但是在可判定性研究成果中却没有包括公开的尚未解决的数学问题. 这样就显得，这种 ML 研究似乎对于数学"没有多大意义".

本文第一章将提出一类代数结构称为 RS, 即递归结构(Recursive Structure). 提出 RS 是算法理论发展的需要，也是本文第二章研究可解决性问题的需要.

在第二章中将研究 RS 理论的形式化即建立 RS 理论的形式系统. 在这样的形式系统中，可以表达 Goedel [1931]所说的那种存在着不可判定语句的协调系统. 我们将证明，可以把这种系统的语句集分为不相交的两个集，一个包括这系统中所有可判定的语句，另一个包括所有不可判定的语句. 证明的定理给出属于可判定和不可判定语句集的充分必要条件.

在第三章中，将把第二章中证明的定理应用于一些尚未解决(或尚未完全解决)的数学问题. 从第二章的内容可知，这种方法可以应用于 Goedel [1931]所说的那样的形式系统中的其他语句，用以证明这种语句是可判定还是不可判定的.

本文的总的目的是对于数学(包括计算机科学)研究可供广泛使用的方法. 至于目的是否能够达到或已经达到了，衷心地希望读者有以教我.

目 录

第一章　可解决性理论

在§1－§2中我们引入原始递归函数(记为PRF)和递归结构(简写为RS)的基本定义，以及递归可数代数结构中的显定义；给出递归结构中的一些原始递归函数的定义，如符号的并以及符号上的基本运算；在§4－§6中，将给出不同秩的递归结构及其算术性质；在§8－§9中讨论各种的秩递归结构之间的关系.

§1. 可数代数结构中的显定义

本文考虑一种可数代数结构A. A可以表作一个3元组

$$\mathrm{A}=\langle A,\{f_i\}_{i\in I},\{a_j\}_{j\in J}\rangle=\langle A,F,C\rangle,$$

其中A是一可数无穷集，称为A的论域(domain). F是一函数集，称为A的原始函数集：任何$f\in F$都是一$n\in N^+$(非0自然数集，即$N-\{0\}$)元函数

$$f:\ A^n\to A,$$

即，每一$f_i\in F$都是一固定的$n_i\in N^+$元的函数

$$f^n:\ A^{n_i}\to A.$$

$C\subset A$是A的一个固定的常元集. 一般可以假定$I\subseteq N$，$J\subseteq N$，J不空.

涉及的形式语言是带等词的，等词写作"$\equiv$"，把"$=$"用以表示直观的相等.

"显定义"一词可能引起混淆，今使用形式化方法对之作严格的定义. 设一结构A中有原始的或在其中定义出的全函数f_1，…，f_m和常元集a_1，…，$a_n\in A$给定. 对这给定函数和常元

$$\{f_1,\ \cdots,\ f_m;a_1,\ \cdots,\ a_n\},$$

令

$$\pounds=\{f_1^L,\ \cdots,\ f_m^L;a_1^L,\ \cdots,\ a_n^L\}$$

是这样一个语言，函数词f_i^L以给定的函数$f_i(i=1,\ \cdots,\ m)$为预定解释，$a_i^L(i=1,\ \cdots,\ n)$是常个体词以给定的$a_i(i=1,\ \cdots,\ n)$为预定解释. 令$t=t(v_1,\ \cdots,\ v_k)$是语言$\pounds$中的项$t\in Term(\pounds)$，v_1，…，v_k是互异的$k(k\in N^+)$个自由变元符，所有在t中出现的自由变元符不超出这k个(可以不全在以至全不在t中出现). 设f^L是不在$\pounds$中的函数词，f是满足以下语句中f^L的预定解释的A的论域上的k元函数，

$$\forall x_1\cdots\ x_k[f^L(x_1,\ \cdots,\ x_k)\equiv t(x_1,\ \cdots,\ x_k)],$$

其中x_i是约束变元符(自由变元符和约束变元符采用两种不同符号). 当f和f_1，…，$f_m;a_1$，…，a_n满足上述条件时，称f是由f_1，…，$f_m;a_1$，…，a_n在A中经显定义(explicit definition)而得. 当$m=0$时，给定的函数集$\{f_1,\ \cdots,\ f_m\}$空，$n=0$时常元集$\{a_1,\ \cdots,\ a_n\}$空，$m=n=0$时，$\pounds$即空(语言$\pounds$的非L符号集空)，许可$\pounds$空.

例1. 设g，h是某一代数结构中的4元，5元函数，a，b，c是这结构中的常元，f是3元函数，对于讨论中的结构的论域中的任何元x，y，z恒有

$$f(x,\ y,\ z)=g(h(a,\ b,\ g,\ x,\ x),\ x,\ b,\ h(x,\ z,\ x,\ c,\ a)),$$

则据定义，f是由g，h和常元a，b，c经显定义而得.

例2. (1) $f(x,\ y)=a$,

(2) $f(x,\ y,\ z)=z$的f都是在所讨论的结构中可以经显定义而得(1)中的f(2元的)，据以显定义的函数是一个常元a，(2)中的f(3元的)据以显定义的函数和常元集是空集.

作如下约定：如在例1或例2中(1), (2)那样写出一个等式就表示任何x，y，z，…∈讨论中结构的论域，等式恒成立. 这就是说"论域中任何x，y，…"那样的措词省略. 换言之，"x"，"y"，"z"等直观符号在元语言中表示结构论域的自由变元.

"显定义"不一定要用上面的"形式化方法"给出定义.

§ 2.　原始递归函数和递归结构

称一可数代数结构A为一秩(rank)为α的*递归结构*(RS)(recursive structure)是说它满足以下三条件:

第一、　对A而言α给定，$\alpha\in N^+\bigcup\{\omega\}$.

第二、　A的常元集中恰好有一个元称为A的*初始元*(initial element)，如$C=\{0\}$. 初始元可随论域A的不同而使用不同的直观符号来表示. 例如, 取自然数集N为论域则可写初始元为0，N^+为论域时则可写为1，取一个字母表的字集为论域则以表示空字的符号来表示初始元(如⦿)是妥当的. 一般，将写初始元为0.

第三、　A的原始函数集F可以表作两个函数集的L和，$F=S\bigcup PR$. S和PR两函数集应满足的条件分别陈述如下.

$S=\{\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_k\}$,　　当$\alpha=k\in N^+$时;

$S=\{\ \sigma_i\,|i\in N^+\}$,　　当$\alpha=\omega$时,

各σ_i都是1元函数，称S为A的*后继函数集*. 当给定的秩$\alpha=1$时, 可记唯一的后继函数σ_1为σ. 可以表A为以下形式

$$\mathrm{A}=\langle A,\ S\bigcup PR,\ 0\rangle \text{ 或 } \mathrm{A}=\langle A_\alpha,\ S_\alpha\bigcup PR_\alpha,\ 0\rangle.$$

关于$F=S\bigcup PR$中S部分，在给定秩α的前提下施后继函数的运算于初始元0上恰好无重复地遍历A中所有元. 换言之，A中任何元a必有σ_{i_1}，$\cdots$，$\sigma_{i_m}\in S$,使$a=\sigma_{i_1}\cdots\sigma_{i_m}0$，如另有$\sigma_{j_1}$，$\cdots$，$\sigma_{j_n}\in S$使$a=\sigma_{j_1}\cdots\sigma_{j_n}0$则必

$$m=n,\ i_1=j_1,\ \cdots,\ i_m=j_m.$$

例如，当$\alpha=2$时, A中元恰好就是以下序列中的元:

$$0,\ \sigma_1 0,\ \sigma_2 0,\ \sigma_1\sigma_1 0,\ \sigma_2\sigma_1 0,\ \sigma_1\sigma_2 0,$$
$$\sigma_2\sigma_2 0,\ \sigma_1\sigma_1\sigma_1 0,\ \sigma_2\sigma_1\sigma_1 0,\ \sigma_1\sigma_2\sigma_1 0,\ \cdots.$$

为了说明F 中PR (PR_α)部分所满足的条件，先作以下定义. 设g是$n-1$元的h_1，$\cdots$，h_k(当$\alpha=k\in N^+$时)，h_1，h_2，$\cdots$(当$\alpha=\omega$时)是$n+1$元的由给定的函数和常元集

$$S\bigcup\{0\}\bigcup\{f_1,\ \cdots,\ f_m\}$$

的有穷子集经显定义而得. 当f是满足以下条件的n元函数，任何x_1，$\cdots$，$x_n\in A$恒有

$$(P_\alpha)\quad\begin{cases} f(0,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=g(x_2,\ \cdots,\ x_n), & \text{当}n=1\text{时为常元,}\\ f(\sigma_i x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=h_i(f(x_1,\ \cdots,\ x_n),\ x_1,\ \cdots,\ x_n), & \end{cases}$$

其中$i=1$，$\cdots$，k，当$\alpha=k\in N^+$时; $i\in N^+$，当$\alpha=\omega$时. 称f为由$\{f_1^L,\ \cdots,\ f_m^L\}$(此集许可空)经*原始递归定义模式*($P_\alpha$)而得的函数. 现在陈述$F$中$PR(PR_\alpha)$部分所满足的条件. PR_α是满足以下两条件的最小的函数集P: (1) 所有由空函数集经原始递归模式(P_α)而得的$f\in P$，(2)　P封闭于经模式(P_α)而得的函数，即，如果

$$f_1,\ \cdots,\ f_m\in P,$$

则由$\{f_1,\ \cdots,\ f_m\}$经(P_α)而得的$f\in P$. 当$F=S\bigcup PR(S_\alpha\bigcup PR_\alpha)$时记$F$为$PRF(PRF_\alpha)$，由之记A为

$$\mathrm{A}=\langle A,\ PRF,\ 0\rangle,$$

可记秩为 α 的 RS A为 A_α，并记

$$\mathrm{A}_\alpha = \langle A_\alpha, PRF_\alpha, 0\rangle.$$

称一结构A为一 RS，当且仅当，它是一秩为$\alpha\in N^+\bigcup\{\omega\}$的 RS.

称$PRF(PRF_\alpha)$为 RS A的原始递归函数集. 今后写"PRF"表示A中的这个函数集，又"作为原始递归函数"的简写. $PR_\alpha(PR)$是A_α中藉(P_α)定义而得的函数集. "PR"既用以表示这集，又用以代替措词"原始递归". 从上下文可以分清同一措词的不同的表示.

从上面对 RS A的定义看，当论域 A 和后继函数集 $S=S_\alpha$ 一经给定，$PR=PR_\alpha$就确定了，从而$PRF=PRF_\alpha$和$\mathrm{A}=\mathrm{A}_\alpha$就确定了. 当然，初始元，后继函数集是和$A$一起给定的.

以上的定义可以写作与一般 ML 文献中的PRF的定义比较接近的形式，即通过以下五个定义模式以代(P_α)来作出. 这样五个模式是自然数域上的PRF的定义模式的一种推广. 如 Kleene[1953], § 43 所用(I), …, (V)显然与下面所列模式很相似. 常数 α(除了表示所讨论的结构的秩)表示(I_α)中给出了 α 个函数，(V_α)中包括 $1+\alpha$ 个等式(当 $\alpha=k\in N^+$ 时(V_α)中包括$1+k$个等式). 不同的是给定了一个可数无穷集A，给出其中一个初始元 0 和A上的一个函数集S_α(满足前面所讲条件)，由之定义出一个A上的PRF集.

(I_α) $f(x)=\sigma_i(x)$,

其中$i=1, \cdots, k$当$\alpha=k\in N^+$，$i\in N^+$当 $\alpha=\omega$;

(Ⅱ) $f(x_1, \cdots, x_n)=a$, $a\in A$;

(Ⅲ) $f(x_1, \cdots, x_n)=x_i$, $1\leqslant i\leqslant n$;

(Ⅳ) $f(x_1, \cdots, x_n)=g(h_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, h_m(x_1, \cdots, x_n))$;

(V_α) 当 f 为 1 元时:

$$\begin{cases} f(0)=a, \ a\in A, \\ f(\sigma_i(x))=h_i(f(x), s), \end{cases}$$

其中$i=1, \cdots, k$，当$\alpha=k$; $i\in N^+$,当 $\alpha=\omega$.

当 f 为$n\geqslant 2$元时:

$$\begin{cases} f(0, x_2, \cdots, x_n)=g(x_2, \cdots, x_n), \\ f(\sigma_i(x_1), x_2, \cdots, x_n)=h_i(f(x_1, \cdots, x_n), x_1, \cdots, x_n), \end{cases}$$

其中$i=1, \cdots, k$当 $\alpha=k$; $i\in N^+$，当 $\alpha=\omega$. 用这里的(I_α), (Ⅱ), (Ⅲ), (Ⅳ), (V_α)来定义秩为 α 的PRF集PRF_α和前面用(P_α)来定义是等价的.

对于给定秩的 RS A可以有无穷个. 以同一类数学对象为论域的 RS 而言，秩为 1 的 RS 可以随论域A，后继函数和初始元的不同而异. 例如令

$$N_n =_{df} \{x\in N \mid x\geqslant n\},$$

则任一$n\in N$可以构造一秩为 1 的 RS A，A的论域A即 N_n，初始元取为 n，$\sigma x=x+1$. 再比如令 p_0, p_1, … 为素数序列，令A的论域$A=\{p_i \mid i\in N\}$，$p_0=2$为初始元，$\sigma p_i=p_{i+1}$，这样的A也是秩为 1 的 RS.

上面定义了可数无穷个数学结构$\mathrm{A}_k(k\in N^+)$和A_ω，称为 RS(递归结构). 这些结构将成为以后引进形式语言和形式理论的预定解释. 定义中对于 RS 没有进一步规定，但是这样构造理论是和我们探讨的问题有关的.

设f是 1 元函数. 写"$f(x)$"和"fx"表示同样的意思. 如果f是 2 元函数，往往写$f(x, y)$为(xfy)或写

作xfy. 如$+(x, y)$即写作$x+y$.

引理 2.1. *RS 的PRF集封闭于经显定义而得的函数. 换言之, 设 $f_1, \cdots, f_m \in PRF$, f是由*

$$S\cup\{0\}\cup\{f_1, \cdots, f_m\}$$

的有穷子集经显定义而得, 肯定$f\in PRF$.

证明从略.

引理 2.2. *设$f_1, \cdots, f_m$(一般可设$m\geqslant 2$)满足以下条件: 任何$x_1, \cdots, x_n\in A$,*

$$\begin{cases} f_1(x_1, \cdots, x_n)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x_1, \cdots, x_n)=0 \end{cases}$$

中恰好有一个等式成立;又设有m个n元的g_i, f与f_i, g_i有以下关系:

$$f(x_1, \cdots, x_n)=\begin{cases} g_1(x_1, \cdots, x_n), & \text{当} f_1(x_1, \cdots, x_n)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_m(x_1, \cdots, x_n), & \text{当} f_m(x_1, \cdots, x_n)=0. \end{cases}$$

肯定: f_i, $g_i(i=1, \cdots, m)\in PRF\Rightarrow f\in PRF$.

证. 令$h\in PR$定义如下:

$$\begin{cases} h(0, y, z)=_{df}y, \\ h(\sigma_i x, y, z)=_{df}z, \end{cases}$$

其中$i=1, \cdots, k$,当$\alpha=k$; $i\in N^+$,当$\alpha=\omega$, 这h可以藉(P_a)定义出. 以下仅就$n=1$的情况写证明. $f_1(x), \cdots, f_m(x)$中有一个且只有一个$f_j(x)=0$, 可于$g_1, \cdots, g_m$中选出唯一的一个$g_j(x)$, 使$f(x)=g_i(x)$. f可以这样显定义之:

$$f(x)=_{df}h(f_1(x), g_1(x), h(\cdots(h(f_m(x), g_m(x), 0))\cdots)).$$

据引理 2.1, $f\in PRF$.

在 RS 中的第一个后继函数为σ_1. 令

$$0_1=_{df}\sigma_1 0.$$

一个n元的函数f, 对任何$x_1, \cdots, x_n f(x_1, \cdots, x_n)$恒于$\{0, 0_1\}$中取值, 则称$f$为一表示函数. 设$R$是一$n$元的关系, 满足条件

$$R(x_1, \cdots, x_n) \Leftrightarrow f(x_1, \cdots, x_n)=0,$$

$$\text{非}R(x_1, \cdots, x_n) \Leftrightarrow f(x_1, \cdots, x_n)=0_1,$$

称f表示R, $f(x_1, \cdots, x_n)$表示$R(x_1, \cdots, x_n)$.

上面所写的PR定义模式(P_a)给出了施PR于第 1 个变元的定义. 对n元函数有施PR于第$j(1\leqslant j\leqslant n)$

个变元的定义模式，可写作

$$(P_\alpha)_{jn}\begin{cases} f(x_1, \cdots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \cdots, x_n)=g(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n), \\ f(x_1, \cdots, x_{j-1}, \sigma_i, x_{j+1}, \cdots, x_n)=h_i(x_1, \cdots, x_{j-1}, f(x_1, \cdots, x_n), x_{j+1}, \cdots, x_n), \end{cases}$$

其中$i=1, \cdots, k$,当$\alpha=k\in N^+$时; $i\in N^+$,当$\alpha=\omega$时. 任何给定的$1\leqslant n$由这里的$(P_\alpha)_{kn}$定义的n元的f不超出原来用(P_α)定义PR_α的范围.

RS 的论域A为可数无穷，A中元可以是任何数学对象. 数学结构的论域自然不限于可数无穷. 但从可证明性，可判定性以至一般数学结构的形式化的要求看，RS 够了. RS A的论域A中元都是集合，σ_i满足 ZF 公理系统所表示的条件，则可以据以建立A的形式系统 Φ 与 ZF 系统等价.

§3. RS 中的一些PRF的定义

本节列举一些各不同秩的 RS 在本结构内都可以作出的PR定义. 这些定义不涉及别的秩的 RS. 但是，这些不同秩的 RS 中的PR定义又都有比较一致的形式，可以用同样的直观符号来表示:

$$0_i =_{df} \sigma_i(0),$$

其中$i=1, \cdots, k$，当$\alpha=k\in N^+$；$i=1, 2, \cdots$，当$\alpha=\omega$;

$$\begin{cases} x\oplus_\alpha o =_{df} x, \\ x\oplus_\alpha \sigma_i(y) =_{df} \sigma_i(x\oplus_\alpha y), \end{cases}$$

其中$i=1, \cdots, k(i=1, 2, \cdots)$. 在一定的上下文范围里，于不至于引起误会时可作定义

$$xy =_{df} x\oplus\ y =_{df} x\oplus_\alpha\ y.$$

由于$\oplus_\alpha\in PRF$满足组合律，所以$x(yz)$，$(xy)z$可以写为xyz. xy可读为x与y的并. 按 Church[1944] 并为 juxtaposition，按 Quine[1946]为 concatnation. 写$x\oplus_\alpha y$为xy，就是以并来指称并函数的取值. 按 Church 的用语是 juxtaposition serves to denote juxtaposition.

以下作k个(ω个)PRF $\overline{\delta}_j(j=1, \cdots, k$，当$\alpha=k\in N^+$；$j=1, 2, \cdots$，当$\alpha=\omega)$的$PR$定义.

$$\begin{cases} \overline{\delta}_j(0) =_{df} 0_j, \\ \overline{\delta}_j(\sigma_i x) =_{df} \sigma_i \overline{\delta}_j(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} inv(0) =_{df} 0, \\ inv(\sigma_i x) =_{df} \overline{\delta}_i(inv(x)), \end{cases}$$

其中$i=1, \cdots, k$ $(i=1, 2, \cdots)$，$inv(x)$是x的反元(the inverse of the element x).

关于$\overline{\delta}_i$和 RS 的PR定义模式(P_α)有以下引理.

引理 3.1. 设由g，h_i通过以下模式定义f:

$$(i)\quad \begin{cases} f(0, x_2, \cdots, x_n) =_{df} g(x_2, \cdots, x_n), \\ f(\overline{\delta}_i(x_1), x_2, \cdots, x_n) =_{df} h_i(f(x_1, \cdots, x_n), x_1, \cdots, x_n), \end{cases}$$

其中$i=1, \cdots, k$,当$\alpha=k\in N^+$;$i\in N^+$,当$\alpha=\omega$,那么f相对于g，h_i原始递归;即，g，h_i为PRF时f也是.

证. 以另外方式定义f，并证明其就是(i)中的f. 令

$$\begin{cases} f_0(0, x_2, \cdots, x_n) =_{df} g(x_2, \cdots, x_n), \\ f_0(\sigma_i(x_1), x_2, \cdots, x_n) =_{df} h_i(f_0(x_1, \cdots, x_n), x_1, \cdots, x_n), \end{cases}$$

$$f(x_1, \cdots, x_n) =_{df} f_0(inv(x_1), x_2, \cdots, x_n).$$

由于$inv(\delta_i(x)) = \sigma_i(inv(x))$，故有，

$$\begin{aligned} & f(0, x_2, \cdots, x_n) \\ & = f_0(inv(0), x_2, \cdots, x_n) \\ & = g(x_2, \cdots, x_n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f(\delta_i(x_1), x_2, \cdots, x_n) \\ & = f_0(inv(\delta_i(x_1)), x_2, \cdots, x_n) \\ & = f_0(\sigma_i(inv(x_1)), x_2, \cdots, x_n) \\ & = h_i(f_0(inv(x_1), x_2, \cdots, x_n), x_1, \cdots, x_n) \\ & = h_i(f(x_1, \cdots, x_n), x_1, \cdots, x_n). \end{aligned}$$

引理说明，δ_i 可以与(P_α)中的σ_i起着同样的作用.

$$\begin{cases} \neg 0 =_{df} 0_1, \\ \neg \sigma_i x =_{df} 0, \end{cases}$$

$$sg(x) =_{df} \neg\neg x,$$

$$\begin{cases} 0 \cap y =_{df} sg(y), \\ \sigma_i x \cap y =_{df} sg(y), \end{cases}$$

$$x \rightleftharpoons y =_{df} \neg(x \cap \neg y),$$

$$x \cup y =_{df} \neg(\neg x \cap \neg y),$$

$$x \rightleftharpoons y =_{df} (x \rightleftharpoons y) \cap y \rightleftharpoons x),$$

其中$i = 1, \cdots, k(1, 2, \cdots)$.以下给出$k$个($\omega$个)$PRF$记为$let_j$, $j = 1, \cdots, k(j = 1, 2, \cdots)$:

$$\begin{cases} let_j(0) =_{df} 0_1, \\ let_j(\sigma_i x) =_{df} \begin{cases} sg(x), & \text{当} i = j \text{时}, \\ 0_1, & \text{当} i \neq j \text{时}, \end{cases} \end{cases}$$

其中$i = 1, \cdots, k(1, 2, \cdots)$.$let_j(x)$表示$x$是$0_j$.

引理 3.2. 受囿特称和全运算对于PRF的封闭性.

设f: $A^n\to A$，令

(i) $g(x_1, \cdots, x_n)=_{df}\langle\exists y\rangle_{x_j} f(x_1, \cdots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \cdots, x_n)$

$$=_{df}\begin{cases}0,\ \text{当有}y,\ y_1,\ y_2\text{使}x_j=y_1yy_2\text{并且}\\ \qquad f(x_1, \cdots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \cdots, x_n)=0,\ 1\leqslant j\leqslant n,\\ 0_1,\ \text{否则}.\end{cases}$$

(ii) $h(x_1, \cdots, x_n)=_{df}\langle y\rangle_{x_j} f(x_1, \cdots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \cdots, x_n)$

$$=_{df}\begin{cases}0,\ \text{当任何有}y_1,\ y_2\text{使}x_j=y_1yy_2\text{的}y\text{恒有}\\ \qquad f(x_1, \cdots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \cdots, x_n)=0,\ 1\leqslant j\leqslant n,\\ 0_1,\ \text{否则}.\end{cases}$$

肯定: $f\in PRF\Rightarrow g$, $h\in PRF$, g, h相对f PR.

证. 对于给定的f作PR定义g_0如下:

$$\begin{cases}g_0(x_1, \cdots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \cdots, x_n)\\ \qquad =_{df} sg(f(x_1, \cdots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \cdots, x_n)),\\ g_0(x_1,\cdots,x_{j-1},\sigma_i(x_j),x_{j+1},\cdots,x_n)\\ \qquad =_{df} sg(f(x_1, \cdots, x_{j-1}, \tilde{\sigma}_i(x_j), x_{j+1}, \cdots, x_n))\cup g_0(x_1, \cdots, x_n).\end{cases}$$

据关于$\tilde{\sigma}_i$的引理 3.1 和已知的，g_0对f相对原始递归. 这个g_0的取值满足条件：任何x_1, $\cdots$, x_n $\in A$, $g_0(x_1, \cdots, x_n)$恒取值为 0 或0_1, 而且 $g_0(x_1, \cdots, x_n)=0 \Leftrightarrow$ 有 y_1, y 使得$x_j=y_1y$, 且 $f(x_1, \cdots, x_n)=0$. g_0相对f原始递归. 可以用g_0和f来定义(i), (ii)中的g, h. 对给定的$j(1\leqslant j\leqslant n)$作$PR$定义如下:

$$\begin{cases}g(x_1, \cdots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \cdots, x_n)\\ \qquad =_{df} sg(f(x_1, \cdots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \cdots, x_n)),\\ g(x_1, \cdots, x_{j-1}, \sigma_i x_j, x_{j+1}, \cdots, x_n)\\ \qquad =_{df} g(x_1, \cdots, x_n)\cup g_0(x_1, \cdots, x_{j-1}, \sigma_i x_j, x_{j+1}, \cdots, x_n),\end{cases}$$

其中$i=1$, $\cdots$, k (1, 2, $\cdots$), 这里g就是(i)所要求的，而(ii)中的h可以由f显定义而得:

$$\langle y\rangle_{x_j} f(x_1, \cdots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \cdots, x_n)$$
$$=_{df}\neg\langle\exists y\rangle_{x_j}\neg f(x_1, \cdots, x_{j-1}, y, x_{i+1}, \cdots, x_n).$$

为了书写的方便，令

$\langle\exists y_1\cdots y_n\rangle_x$—— $=_{df}\langle\exists y_1\rangle_x\cdots\langle\exists y_n\rangle_x$——,

$\langle y_1, \cdots, y_n\rangle_x$—— $=_{df}\langle y_1\rangle_x\cdots\langle y_n\rangle_x$——.

以下所写出的PRF往往以英语字母拼写的字来表示，这是为了便于思考而对抽象定义的函数对之具象化(concretize)的考虑. 即把秩为k(或 ω)的 RS 的论域A当作以0_1，…，0_k(0_1，0_2，…)为字母的字集来考虑. 例如以下通过(P_ω)定义的$delr\in PRF_\omega$.

$$\begin{cases} delr(0)=_{df}0, \\ delr(\sigma_i x)=_{df}x, \qquad i=1,2,\cdots. \end{cases}$$

$delr(x)$可读为：把x(当作一个字)去掉右边字母(delet theright letter)，如$delr(0_1 0_2 0_1)=0_1 0_2$.

$$\begin{cases} rlet(0)=_{df}0, \\ rlet(\sigma_i x)=_{df}0_i, \end{cases}$$

$rlet(x)$可读为x右边的字母.

$$\begin{cases} 0\simeq y=_{df}sg(y), \\ \sigma_i x\simeq y=_{df}x\simeq delr(y)\cap let_i(rlet(y)). \end{cases}$$

$x\simeq y$表示$x=y$.

$x\not\simeq y=_{df}\neg(x\simeq y)$.

$in(x,y)=_{df}\langle \exists y_1,y_2\rangle_y[yy_1xy_2]$.

以上在各秩 RS 中定义的一些PRF时使用了直观符号$\simeq$，$\rightharpoonup$，$\rightleftharpoons$，$\cap$，$\cup$，$\notin$ (对应于逻辑演算中的等词$\equiv$，连接词$\neg$，$\rightarrow$，$\wedge$，$\vee$，$\leftrightarrow$)称为拟逻辑词项. 表示$\langle \exists y\rangle_x$，$\langle y\rangle_x$的符号使用(symbolism)也是一种拟逻辑词项，称为受囿特称和全称量词. 下一节还将引进另外的受囿量词. RS 的理论中包含着一个二值的L系统. 0 为真值，0_1为假值.

$$let(x)=_{df}x\not\simeq 0\cap\langle y, z\rangle_x[x\simeq yz\rightleftharpoons x\simeq 0\cup y\simeq 0].$$

如果在秩为$k\in N^+$的 RS 中，则let可定义为

$$let(x)=_{df}let_1(x)\cup\cdots\cup let_k(x).$$

§ 4. 有穷秩 RS 中秩为 1 的 RS

本节证明，在有穷秩$k\geqslant 2$的 RS A_k中可定义一个秩为 1 的 RS A_1，使A_1成为A_k的子结构. 我们写

$$\mathrm{A}_k=\langle A_k, S_k\bigcup PR_k, 0\rangle, \ 2\leqslant k-1<\omega,$$
$$\mathrm{A}_1=\langle A_1, S_1\bigcup PR_1, 0\rangle,$$

其中$S_k=\{\sigma_1, \cdots, \sigma_k\}$，$S_1=\{\sigma\}$，$\sigma\notin S_k$，但可于$\mathrm{A}_k$中藉($P_k$)定义$\sigma\in PR_k$(见下定义中之(iv))并证明于$\mathrm{A}_k$中可藉 PR 定义模式($P_1$)定义$\mathrm{A}_1$中的$PRF_1$，，使$PRF_1\subseteq PRF_k$. 从而使$\mathrm{A}_1$成为$\mathrm{A}_k$的子结构(见以下引理 4.1).

定义 于A_k中作以下(i)–(vi)定义:

(i) 设$1\leqslant i<k$，令