随机微分方程及其应用

（第二卷）

〔美〕A. 弗里德曼 著

科学出版社

随机微分方程及其应用

第 二 卷

〔美〕A. 弗里德曼 著

吴让泉 译

科 学 出 版 社

1 9 8 6

内 容 简 介

本书阐述随机微分方程的理论以及它在概率论、偏微分方程和随机控制问题中的应用.

第二卷共八章. 第十章介绍偏微分方程中的一些辅助结果,第十一、十二章研究随机微分方程解的样本轨道性质,第十三章处理退化椭圆型方程的狄里克莱问题,第十四章研究奇异摄动问题,第十五章论述退化抛物型方程的基本解,第十六章讨论最优停时和随机对策,第十七章处理随机微分对策.

读者对象为高等院校数学系学生、研究生、教师和有关科技工作者.

A. Friedman

STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS AND APPLICATIONS

Volume 2

ACADEMIC PRESS, 1976

随机微分方程及其应用

第 二 卷

〔美〕A. 弗里德曼 著

吴让泉 译

责任编辑 吕 虹 刘嘉善

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1986年11月第 一 版 开本:787×1092 1/32

1986年11月第一次印刷 印张:12 5/8

印数:0001—4,400 字数:287,000

统一书号:13031·3343

本社书号:5002·13—1

定价: 2.95 元

作者为中译本写的序

当我的书的第二卷被译成中文之际，我愿借此机会着重指出，在数学的许多方面，特别是在控制论和非线性偏微分方程中，随机微分方程的作用日益显著．现在，仍有许多随机数学模型尚待提出，这包括具有不完全信息的控制、非线性滤波、随机的动物增殖、生物进化和人口动力学．我希望本卷将为对这一在理论和应用上都有着光辉未来的领域感兴趣的读者提供预备知识。

A. 弗里德曼

序

本卷以偏微分方程中的一些辅助结果（第十章）作为开始，而且这些结果都是后面所需要的．第十一章和十二章中，我们以第九章的精神来研究随机微分方程解的样本轨道的性质．第十一章处理这些轨道是否能以正概率击中给定集合的问题．第十二章涉及给定流形轨道的稳定性和（在二维情况下）关于这个流形轨道的螺旋性．

第十三至十五章涉及对于偏微分方程的应用．第十三章中我们处理关于退化椭圆型方程的狄里克莱问题．在此，第十二章的结果起着重要的作用．在第十四章里我们考虑奇异摄动问题．第十五章论及退化抛物型方程基本解的存在性．

第十六和十七章处理停时问题、随机对策和随机微分对策．

这类材料(除去第十章)均首次以书的形式出现，并且是以新近的研究结果为基础的．我们希望本书将增加和提高读者对这一新的研究领域的兴趣．它包括随机微分方程、偏微分方程和随机控制．

我愿在此感谢斯提维·奥瑞（Steve Orey）对写第十四章所给的一些有益建议．

一 般 记 号

除非特别声明，所有的函数均为实值的。

在第 n 章中，第 m 节的公式与定理分别用 $(m.k)$ 和 $m.k$ 表示。在第 l 章中，当我们涉及这样一个公式 $(m.k)$（或定理 $m.k$）时，如果 $l \neq n$，我们用 $(n.m.k)$（或定理 $n.m.k$）来表示它；如果 $l = n$，用 $(m.k)$（或定理 $m.k$）表示它。

类似地，当参考同一章的 m 节时，我们用 m 表示节。当参考其它章的第 m 节时（比如说第 n 章），我们用 $n.m$ 来表示它。

最后，当我们需要参考条件 (A)，(A_1)，(B) 等时，这些条件通常均在同一章的前部已被陈述。

目　　录

第一卷　目　　录

第十章　偏微分方程中的一些辅助结果

1. 关于椭圆型和抛物型方程的绍德尔估计

在本节和第 3、第 4 节中，我们将论述一些关于椭圆型方程的狄里克莱问题的解和抛物型方程的初边值问题的解的估计．这些估计不依赖相应的边值问题是否具有唯一解；所以称它们为先验估计．这类先验估计给偏微分方程理论提供了一种有力的工具．在以后的几章中需要用到它们．

我们从在一个有界区域 D 中对椭圆型算子

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i \cdot x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_x + c(x)u \quad (1.1)$$

的绍德尔估计开始．

用 d_x 表 D 中一点 x 到 D 的边界 ∂D 的距离，令 $d_{xy} = \min(d_x, d_y)$．定义

$$H_\alpha(d^k u) = \underset{x,y\in D}{\text{l. u. b.}}\ d_{xy}^{k+\alpha} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

$$|d^k u|_0 = \underset{x\in D}{\text{l. u. b.}} |d_x^k u(x)|,$$

$$|u|_m = \sum_{j=0}^{m} \sum |d^j D^j u|.$$

这里 $D^j u$ 是向量，它的分量是 u 的所有的 j 阶导数，右边的内和号是对 $D^j u$ 的所有分量求和．此外，定义

$$|u|_{m+\alpha} = |u|_m + \sum H_\alpha(d^m D^m u) \qquad (0 < \alpha \leqslant 1),$$

这里 $H_\alpha(d^m D^m u)$ 是以 $H_\alpha(d^m w_i)$ 为分量的向量，w_i 在 $D^m u$ 的

分量上变化，并且求和是取遍所有的 $H_\alpha(d^m D^m u)$ 的分量。

如果函数 u 在 D 中有 m 阶连续导数，则称 u 属于 $C^m(D)$. 如果 u 的 m 阶导数在 D 的紧子集中是一致霍尔德连续的(指数 α)，则称 u 属于 $C^{m+\alpha}(D)$.

定理 1.1 (绍德尔内估计) 假定

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant K_1|\xi|^2,\ \text{如果}\ x\in D,\ \xi\in R^n$$

$$(K_1>0), \tag{1.2}$$

$$|a_{ij}|_\alpha \leqslant K_2, \quad |db_i|_\alpha \leqslant K_2, \quad |d^2C|_\alpha \leqslant K_2. \tag{1.3}$$

如果在 D 中 $Lu=f(x)$ 并且 $|d^2f|_\alpha<\infty$, $u\in C^{2+\alpha}(D)$ 和 $|u|_0<\infty$，则

$$|u|_{2+\alpha}\leqslant K(|u|_0+|d^2f|_\alpha), \tag{1.4}$$

这里 K 是一个仅仅依赖于 K_1, K_2, n 和 α 的常数.

下面定义

$$\overline{H}_\alpha(u)=\underset{x,y\in D}{\mathrm{l.\,u.\,b.}}\ \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

$$\overline{|u|}_m=\sum_{j=0}^{m}\sum|D^j u|_0,\ \text{这里}\ |v_0|=\underset{x\in D}{\mathrm{l.\,u.\,b.}}\ |v(x)|,$$

$$\overline{|u|}_{m+\alpha}=\overline{|u|}_m+\sum\overline{H}_\alpha(D^m u) \qquad (0<\alpha\leqslant 1).$$

现在我们假定 ∂D 属于 $C^{2+\alpha}$，即 ∂D 对某个 i 可以局部地写成

$$x_i=h(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n), \tag{1.5}$$

这里 h 在某一区域中是属于 $C^{2+\alpha}$. 在 ∂D 上定义的函数 ϕ 称为属于 $C^{2+\alpha}(\partial D)$，如果借助于 ∂D 的局部 $C^{2+\alpha}$ 表达式(1.5)这个函数 ϕ 是属于 $C^{2+\alpha}$ 的。

不难看出，当 ∂D 属于 $C^{2+\alpha}$ 时，函数 ϕ 属于 $C^{2+\alpha}(\partial D)$ 的充要条件是存在一个函数 Ψ 满足 $\overline{|\Psi|}_{2+\alpha}<\infty$，使得在 ∂D 上 $\Psi=\phi$。我们定义 $\overline{|\phi|}^*_{2+\alpha}=\mathrm{l.\,u.\,b.}\,\overline{|\Psi|}_{2+\alpha}$，这里"l. u. b"是对上

述的所有Ψ取的。

定理 1.2（绍德尔边界估计） 假定(1.2)成立，同时

$$\overline{|a_{ij}|}_\alpha \leqslant \bar{K}_2, \quad \overline{|b_i|}_\alpha \leqslant \bar{K}_2, \quad \overline{|c|}_\alpha \leqslant \bar{K}_2. \tag{1.6}$$

再假定 ∂D 属于 $C^{2+\alpha}$，$\phi \in C^{2+\alpha}(\partial D)$ 同时 $\overline{|f|}_\alpha < \infty$。如果 u 在 D 中是 $Lu = f$ 的一个解，在 ∂D 上 $u = \phi$ 且 $\overline{|u|}_{2+\alpha} < \infty$，则

$$\overline{|u|}_{2+\alpha} \leqslant \bar{K}(\overline{|\phi|}^*_{2+\alpha} + |u|_0 + \overline{|f|}_\alpha), \tag{1.7}$$

这里 $\bar{K}$ 是一个仅仅依赖于 K_1, $\bar{K}_2$, α 和 D 的常数。

关于定理 1.1，1.2 的证明，读者可参看艾格蒙（Agmon）等人的[1]。

下面考虑系数定义在一个有界区域 Q 中的抛物型算子

$$Lu - \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{1.8}$$

我们假定 Q 被在 $t=0$ 上的一个区域 B 的闭包，在 $t=T$ 上的一个区域 B_T 的闭包和在带 $0<t<T$ 中的一个流形 S 所界。

令 $S_\tau = S \cap \{t \leqslant \tau\}$。引进距离函数

$$d(P, \bar{P}) = \{|x-\bar{x}|^2 + |t-\bar{t}|\}^{1/2}, \tag{1.9}$$

这里 $P=(x,t)$，$\bar{P}=(\bar{x},\bar{t})$。如果 $R=(\xi,\tau)$ 属于 Q，我们用 d_R 表由 R 到 $B \cup S_\tau$ 的距离，即

$$d_R = \inf_{P \in B \cup S_\tau} d(R, P).$$

若 R，P 是 Q 中的任意两个点，我们定义 $d_{RP} = \min(d_R, d_P)$。

对任意 $0<\alpha\leqslant 1$, 定义

$$H_\alpha(d^m u)=\underset{P,R\in Q}{\mathrm{l.\,u.\,b.}}\, d_{PR}^{m+\alpha}\frac{|u(P)-u(R)|}{d(P,R)^\alpha},$$

$$|d^m u|_0=\underset{P\in Q}{\mathrm{l.\,u.\,b.}}\,|d_P^m u(P)|,$$

$$|d^m u|_\alpha=|d^m u|_0+H_\alpha(d^m u),$$

$$|u|_{2+\alpha}=|u|_\alpha+\sum|dD_x u|_\alpha+\sum|d^2D_x^2u|_\alpha$$
$$+|d^2D_t u|_\alpha,$$

这里 $D_x u$ 为向量 $(\partial u/\partial x_1,\cdots,\partial u/\partial x_n)$, 同时求和是对 $D_x u$ 和 $D_x^2 u$ 的所有分量的.

现在论述关于抛物型方程的绍德尔内估计.

定理 1.3 假定

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\geqslant K_1|\xi|^2,\ \text{如果}\ (x,t)\in Q,$$

$$\xi\in R^n\qquad(K_1>0),\tag{1.10}$$

$$|a_{ij}|_\alpha\leqslant K_2,\quad |db_i|_\alpha\leqslant K_2,\quad |d^2c|_\alpha\leqslant K_2.\tag{1.11}$$

如果在 Q 中 $Lu-\dfrac{\partial u}{\partial t}=f(x,t)$ 同时 $|d^2f|_\alpha<\infty$, $|u|_0<\infty$ 并且 u, $D_x u$, $D_x^2 u$, $D_t u$ 关于距离(1.9)在 Q 的紧子集中为霍尔德连续(指数 α), 则

$$|u|_{2+\alpha}\leqslant K(|u|_0+|d^2f|_\alpha),\tag{1.12}$$

这里 K 是一个仅仅依赖于 K_1, K_2, n 和 α 的常数.

下面定义

$$\overline{H}_\alpha(u)=\underset{R,P\in Q}{\mathrm{l.\,u.\,b.}}\frac{|u(P)-u(R)|}{d(P,R)^\alpha},$$

$$\overline{|u|}_\alpha=|u|_0+\overline{H}_\alpha(u),$$

$$\overline{|u|}_{2+\alpha}=\overline{|u|}_\alpha+\sum\overline{|D_x u|}_\alpha+\sum\overline{|D_x^2u|}_\alpha+\overline{|D_t u|}_\alpha.$$

在 $B\cup\bar{S}$ 上定义的函数 ϕ 称为属于 $C^{2+\alpha}(B\cup\bar{S})$，如果存在一个在 $\bar{Q}$ 上定义的函数 Ψ，使得 $\overline{|\Psi|}_{2+\alpha}<\infty$，并且在 $B\cup\bar{S}$ 上 $\Psi=\phi$. 定义 $\overline{|\phi|}^*_{2+\alpha}=\text{l. u. b.}\,\overline{|\Psi|}_{2+\alpha}$，这里"l. u. b."是对所有这样的 Ψ 取的.

区域 Q 称为具有性质 (E)，如果对于在 $\bar{S}$ 上的每一点 P，存在一个邻域 V，使得 $V\cap\bar{S}$ 对某个 $1\leqslant i\leqslant n$ 能表示为

$$x_i=h(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n,t),$$

并且 h, D_xh, D_x^2h 和 D_th 关于距离(1.9)是霍尔德连续的（指数 α）.

现在我们可以论述关于抛物型方程的绍德尔边界估计.

定理 1.4 假定(1.10)成立，同时

$$\overline{|a_{ij}|}_\alpha\leqslant\bar{K}_2,\ \overline{|b_i|}_\alpha\leqslant\bar{K}_2,\ \overline{|c|}_\alpha\leqslant K_2. \tag{1.13}$$

再假定 Q 具有性质 (E)，$\phi\in C^{2+\alpha}(B\cup\bar{S})$ 和 $\overline{|f|}_\alpha<\infty$. 如果在 Q 中 u 是 $Lu-\partial u/\partial t=f(x,t)$ 的一个解，在 $B\cup\bar{S}$ 上 $u=\phi$ 同时 $\overline{|u|}_{2+\alpha}<\infty$，则

$$\overline{|u|}_{2+\alpha}\leqslant\bar{K}(\overline{|\phi|}^*_{2+\alpha}+\overline{|f|}_\alpha), \tag{1.14}$$

这里 $\bar{K}$ 是一个仅仅依赖于 K_1, K_2, α 和 Q 的常数.

关于定理 1.3 和 1.4 的证明读者可以参看弗里德曼[1].

注 1 定理 1.1 可以推广到 d_x 是由 x 到 ∂D 的子集 Γ 的距离的情况. 定理 1.3 可以推广到 d_P 是由 $P=(x,t)$ 到集 $\Gamma\cap\{s: s\leqslant t\}$ 的距离的情况(按距离(1.9))，这里 Γ 是正规边界的一个子集；请参看弗里德曼[1].

注 2 定理 1.4 可用于证明第一初边值问题的解 u ($\overline{|u|}_{2+\alpha}<\infty$)的存在性. 于是，如果 L, Q, ϕ, f 均如定理 1.4 中所设，同时对于 $x\in\partial B$，$L\phi-\partial\phi/\partial t=f$，则在 Q 中 $Lu-\dfrac{\partial u}{\partial t}=f$，在 $B\cup\bar{S}$ 上 $u=\phi$，存在唯一解 u，同时 $\overline{|u|}_{2+\alpha}<\infty$；在 $(y,0)$ 点 $(y\in\partial B)$ 函数 $L\phi-\partial\phi/\partial t$ 的计

算可通过先取一个ϕ到Ω的扩展Ψ(满足$|\Psi|_{2+\alpha} < \infty$)，再计算当$x \to y$，$t \downarrow 0$时的$\lim(L\Psi - \partial\Psi/\partial t)(x, t)$来得到。关于这个结论的证明可参看弗里德曼[1]。

2. 索波列夫 (Sobolev) 不等式

我们重温一下用在标准的偏微分方程理论中的一些事实。

下面的记号将要被用到：$x = (x_1, \cdots, x_n)$ 为在 R^n 中变化的一个点，$D_j = \partial/\partial x_j$，$D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$，这里 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，$\alpha! = \alpha_1!\cdots\alpha_n!$，$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$，$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$。如果$\Omega$是$R^n$中的一个开集，则记$C^m(\Omega)(C^m(\bar{\Omega}))$是在$\Omega$中所有这样的实值函数所成的集合：它们和它们的直至第m阶导数均为连续（一致连续）；$C_0^m(\Omega)$是由$C^m(\Omega)$中具有紧支集的所有函数组成的子集；$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=1}^\infty C^m(\Omega)$和$C_0^\infty$是由在$C^\infty(\Omega)$中具有紧支集的所有函数所构成的集。

如果u，v在Ω中局部可积，而且对于所有$\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega uD^\alpha\phi dx = (-1)^{|\alpha|}\int v\phi dx,$$

则称v为u的α阶弱导数，并记为：$D^\alpha u = v$（在弱的意义下），或$D^\alpha = v$(w. d.)。

定义 设m是非负整数并且$1 \leqslant p < \infty$。空间$W^{m,p}(\Omega)$是由实空间$L^p(\Omega)$中所有$\leqslant m$阶弱导数存在，并属于$L^p(\Omega)$的函数所组成。空间$W^{m,p}(\Omega)$用

$$|u|_{m,p}^\Omega \equiv \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left\{\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx\right\}^{1/p}.$$

来赋范。

易证 $W^{m,p}(\Omega)$ 是一巴拿赫(Banach)空间；如果 $p = 2$，

则它是一个希尔伯特空间.

定理 2.1 设 Ω 是具有 C^2 类边界的有界区域,同时 i 为正整数且 p 为 $\geqslant 1$ 的实数,则存在一个只依赖于 Ω, p 和 i 的正常数 ε_0, 使得对于任意 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$,

$$|u|^{\Omega}_{j-1,p} \leqslant \varepsilon |u|^{\Omega}_{j,p} + C|u|^{\Omega}_{0,p}, \text{ 对于所有 } u \in C^j(\bar{\Omega}), \tag{2.1}$$

这里 C 是一个只依赖于 Ω, p, i 和 ε 的常数.

关于它的证明可参看尼伦贝尔格 (Nirenberg) [1] 或者弗里德曼[2].

我们引进记号

$$\underset{\Omega}{\mathrm{l.\,u.\,b.}}\,[v]_\alpha = \underset{x,y\in\Omega}{\mathrm{l.\,u.\,b.}}\,\frac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

$$|u|_{p,\Omega} = \left\{\int_\Omega |u(x)|^p dx\right\}^{1/p}, \text{如果 } p>0;$$

$$|u|_{p,\Omega} = \underset{\Omega}{\mathrm{l.\,u.\,b.}}\,|D^h u| \equiv \sum_{|\beta|=h} \underset{\Omega}{\mathrm{l.\,u.\,b.}}\,|D^\beta u|,$$

如果 $p<0$; $h=[-n/p]$, $h+n/p=0$;

$$|u|_{p,\Omega} = [D^h u]_{\alpha,h} \equiv \sum_{|\beta|=h} \mathrm{l.\,u.\,b.}\,[D^\beta u]_\alpha.$$

如果 $p<0$; $h=[-n/p]$, $h+n/p<0$, 这里

$$-\alpha = h+n/p.$$

如果 $\Omega = R^n$, 则我们用记号 $|u|_p$ 替代 $|u|_{p,\Omega}$.

在 R^n 中推广的索波列夫不等式结论如下:

定理 2.2 设 q 和 r 为任意满足 $1\leqslant q$, $r\leqslant\infty$ 的数并设 j 和 m 为任意满足 $0\leqslant j<m$ 的整数. 如果 u 是属于 $C_0^m(R^n)$ 的任意函数,则

$$|D^j u|_p \leqslant C|D^m u|_r^a |u|_q^{1-a}, \tag{2.2}$$

这里对所有在区间 $j/m\leqslant a\leqslant 1$ 中的 a,