短期天气預报的流体力学方法引论

И. А. 基别尔 著

科 学 出 版 社

短期天气預报的流体力学方法引论

И. А. 基別尔著
王宗皓 仇永炎 周曉平
金汉良 紀立人 張玉玲譯
曾鄰生 顧鈞禧 顧震潮
顧震潮 周曉平校

科学出版社

И. А. КИБЕЛЬ
ВВЕДЕНИЕ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ КРАТКОСРОЧНОГО ПРОГНОЗА ПОГОДЫ
Гостехиздат Москва
1957

内 容 提 要

本書是目前全面总結用流体力学方法通过数値計算来作天气預报(数値天气預报)的这种新技术的唯一專著. 本書虽称为短期天气預报,但在原理、方法上以及对輻射等考虑方面有許多对長期天气預报也是适用的.

本書是数値天气預报工作者,天气預报工作者,气象研究及气象数学工作者很有价値的参考書.

短期天气預报的
流体力学方法引论

И. А. 基别尔著
顧震潮等譯

*

科学出版社出版(北京朝陽門大街117号)
北京市書刊出版業營業許可証出字第061号
中国科学院印刷厂印刷　新華書店總經售

*

1959年6月第一版　書号:1757　字數:305,000
1959年6月第一次印刷　开本:850×1168 1/32
(京)0001—4,000　印張:11 3/4　插頁:1

定價 (10) 2.00元

序　言

編写本書的基本材料是我1956年上半年在国立莫斯科大学数学力学系講課时所用的講义。

流体力学方法的天气預报在科学中是一个历史很短但發展很快的部門，它是介于气象学、流体力学和計算数学之間的一門边界学科。因此，不論数学家或物理学家对它都很感兴趣。另一方面，这种情况也使得闡述問題比較困难。例如，本書必須詳尽地导出輻射热通量的方程，而这一点在一般的流体动力学教程中很少做到，同时，本書也必須詳細地闡述适用于电子計算机的某些偏微分方程解的近似方法，而到目前为止，各种气象学教程还沒有涉及到这方面的問題。

关于流体力学方法应用于气象要素預报的問題，目前已發表了很多的論文；本書不可能包括非常全面。在我国的文献方面，本書作者首先力圖闡述苏联水文气象总局中央預报研究所（莫斯科）动力气象組近几年来所得到的結果，在外国的研究方面，作者主要只討論那些已用电子計算机加以檢驗的結果。

本書共分为十二章。

第一章包括流体力学和热力学的基本方程，并提出行星边界層發生的概念；同时指出估計輻射热通量的方法（一般的流体力学教程对这一問題的闡述是不够充分的）。

第二章叙述技术性的問題，对边界層以外的流体力学方程提出了各种不同的概念；在本書以下各章中还会应用到这些概念。

第三章討論天气預报問題中的气象量的量級問題；同时指出用流体力学方程建立預报关系式的初步方法。

第四章提出預报問題，然后討論風向地轉風調整这一重要問題。本章內所列出的計算（数据），同时还可以說明下面几章所牽涉到的其他一些問題，因此这些計算在本章內都有詳細介紹。

第五章导出平均層上的預报方程，并給出預报气压和流函数的綫性問題的解.

第六章介紹整个三度空間中运动准无輻散性的概念，并給出求对应的綫性化方程介答的方法；特別叙述了海平面上压力場預报的操作模式.

如果說第五，六两章所討論的是綫性化問題，那么，第七章以及以下各章所討論的就是一般的非綫性問題.

第七章导出大气准地轉模式的基本預报方程，并解决确定位势高度对时間的第一次导数的問題，以及通过位势高度对坐标的导数来确定一系列其他函数的問題. 本章所得出的結果在書中还将多次利用到.

第八章的篇幅最大，它闡述了解决平均層上非綫性預报問題的近代方法；同时討論了苏联和外国学者制訂的用快速电子計算机求解的方法.

第九章介紹利用电子計算机解决非綫性三度空間問題的近代方法. 这里提到三部分工作：第一部分以利用影响函数为基础，第二部分以預报方程的数值解为基础，第三部分以利用大气准多元性的情况为基础.

第十章对准地轉近似作了一些推广. 这里討論了鋒区和鋒的情形，以及大气平均層模式中运动的无輻散性.

第十一章指出預报时如何考虑山脉的影响和地面摩擦的影响.

第十二章討論热力变性和蒸發的問題；同时提出地球边界層和平流層的預报方法.

在結論中还提出了最近即将展开研究的一些动力气象学問題.

我在本書中导出公式时都力求詳尽，在說明問題时都尽量引用具体的預报例子.

И. А. 基別尔

引　言

短期天气預报应用流体力学的历史可分为三个时期.

第一时期在30年代末40年代初結束. 在这个时期內,仅仅是流体动力学和热力学所得到的一些个别的定律,卽个别的动力气象学定律才在天气預报中得到了直接的应用. 在这一时期內,在A. A. Фридман, H. E. Кочин, Л. B. Келлер, E. H. Блинова, C. И. Троицкий, A. A. Дородницын, V. Bjerknes, J. Bjerknes, N. Shaw, F. Exner, C. Rossby, H. Ertel, H. Philipps 以及其他一些学者的著作中,都得出了从动力气象学观点来看是非常重要的結果. 例如,确定了風向随高度的轉变(热成風);以及引导气流的存在;研究了产生于靜止大气中的長波以及緯圈环流的扰动;探討了綫性和非綫性的鋒面振动; 引入了温度平流的概念并研究了它对气压变化的影响;淸楚地了解了研究行星尺度运动的渦度,特别是渦度的輸送;出現了关于流体力学气候理論的著作. 上述一切;以及这一时期內气象学者所研究的其他問題,为解决动力气象学的一个最主要問題——气象要素預报,然后是流体力学方法的天气預报——准备了条件.

天气預报从头到尾应用流体力学方法的問題早在这第一时期卽已提出. 在L Richardson 的書*)里曾为天气預报提出了解流体力学和热力学閉合方程組的具体方法(实际上这是 Euler 的方法). L. Richardson 的意圖是要把形式極其一般的流体力学方程直接加以积分.

L. Richardson 的这个意圖沒有成功, 長期以来, 这是由于两种情况所致,卽当时 (20年代初) 沒有必要的高空測站網, 同时計算工具也不够. 現在我們知道,卽使有了現代的高空測站網和現

*) L. Richardson, Weather prediction by numerical process. Cambridge, 1922.

代計算工具，L. Richardson 所提出的方法也是无效的（如果就天气預报而言），而从数学观点来看，他所选擇的可以代替微分的时間和坐标的步度之比太大．这是由于，L. Richardson 的方法不能从發生在可变連續介質、可压縮流体大气中的过程分出形成天气的那些重要过程．从流体热力学方程組也可得出重力波、慣性重力波、甚至声波的解，但这些解与天气預报几乎或根本沒有任何关系．这些从天气預报的观点来看是“寄生”的解应該被分出去，并加以摈弃（用某些近代学者的术語来說，就是“滤掉气象杂音”）．只是在必須分出上述解的这一原則最終得到明确时，研究用流体动力学方法預报气象要素的問題才有了可能．

这方面所作的工作可列入流体动力学預报方法發展的第二时期，这个时期的开始是在 30 年代末 40 年代初．这个时期的特点是寻找适用于天气預报的流体动力学方程解答的所謂“工作模式”．

在許多国家里都几乎同时出現了討論以流体热力学方程为基础来建立預报关系式的重要著作．解决預报問題的关鍵是把运动方程中以高阶时間导数出現的各未知函数按小参数幂展为級数．其次，由于分出了边界層，所以能够把問題归結为討論理想流体的絕热运动．在这些問題的解中，热通量方程和渦度傳遞方程起过主要作用．研究者們特别注意对流層的平均層（用外国学者的术語来說，就是“正压模式”）．要解决这一問題極其簡單．利用 Фридман 的渦度傳遞方程就特別有效．例如，Е. Н. Блинова (1943) 将上述方程对緯圈环流加以綫性化，从而提出大气平均層預报的有效方法．在解决平均層的非綫性問題方面，Н. И. Булеев(1951)，R. Fjörtoft (1952) 以及后来其他一些学者都提出过近似的圖解方法．在很短的时期內，对于三度空間問題（大气“斜压模式”）也作出了預报方程，选出了边界条件，并弄清了只用位势高度来作为整个空間的初始資料是可能的．这些工作在 Н. И. Булеев 和 Г. И. Марчук，А. М. Обухов 和 А. С. Чаплыгина，М. И. Юдин，J. Charney，A. Eliassen，J. von Neumann，B. Bolin，R. Sutcliffe，

F. Bushby, J. Sawyer 以及其他一些学者的著作中都有介紹.

但是,由于預报方程非常复杂(三級偏微商的非綫性方程),所以在解时不能采取一般的方法. 由于这个緣故,出現了一些近似的預报方法,这些方法不是利用圖解法来解方程,就是只用"一个时間步度"来解方程. 不久以后,就發現了为建立圖表法和类似方法(用手进行計算的方法)創造可能性而作的那些簡化非常过分,因而經常歪曲了現象的物理本質. 因此,尽管理論在不断繼續發展,但理論在实踐中的应用却前进很慢;进行精确的計算需要大量的計算人員,因而不可能实現.

这种情况一直繼續到50年代初,这时出現了快速电子計算机. 利用这种机器来作預报,这是流体力学应用于气象学的历史中第三时期的开始,在这一时期内,天气預报經历了一次眞正的轉变.

利用电子計算机所作的开始几次預报是对流層的平均層高度的預报. 这些預报在美国是用 ENIAC 計算机作的,在瑞典是用 BESK 計算机作的,在苏联是用 БЭСМ 計算机作的.

作大气不同層次預报的計算机在美国有 IBM 701, 在苏联有"箭牌"(Стрела)和 БЭСМ, 在英国有 MARK II. 用流体力学方法来进行預报气象要素并逐步扩大預报范圍,这种可能性已变成現实;因为已經建立了專門的預报計算中心. 分析高空圖与天气圖同样也可以用計算机. 目前大量的新科学家,主要是青年人,都投入了这个工作.

到目前为止,所作的工作我們可以称为天气預报流体力学方法的序幕. 在动力气象学才开始研究降水与云量預报的定量理論,关于局地特点(地形)对天气的影响研究得还很少,而对基本流体力学要素預报的一般理論也还远远沒有完全研究成功.

但是有許多結果我們現在就可以認为是完善的,而把这些結果用一本專書加以闡述,这对于願意参加建立流体力学天气預报方法的人們是有帮助的.

目 录

第一章

大气边界層

§1.1. 流体力学和热力学的方程

天气預报是与气象要素的預报密切相联系的. 温度、風、湿度、云的特性和高度、降水性質和降水量、能見度——这些就是主要的气象因素，把它們預报出来，就叫做天气預报. 这一方面，还应加入气压和垂直气流的預报，这些要素虽未列在正式發布的天气預报文告中，但是对預报有重大的意义：因为气压場常常直接决定天气的特性，而垂直气流又紧密地与降水有关.

本書所研究的是关于应用动力气象学的方法編制各气象要素短期的定量預报問題. 为了討論气象过程，我們将广泛地应用可压縮流体的运动学方程，而大气就是这种流体. 这些方程是根据下述三个定律而制定的：动量增加定律、質量守恒定律和热力学第一定律. 从第一个定律推导出与三个坐标軸分别相应的三个运动方程；第二个定律推导出連續方程；而第三个定律得出热通量方程.

我們总是应用与轉动的地球相联系的坐标系，因而在本質上，我們把空气运动速度取成相对于跟着地球一起轉动的观测者的"相对"速度. 于是，运动方程可以写成下式：

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p-2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}+\boldsymbol{F}+\boldsymbol{D}. \tag{1.1}$$

上式中 $\boldsymbol{V}$ 是速度向量，t 是时間，$\frac{d}{dt}$ 是时間个别导数的符号，p 是气压，ρ 是密度，$\boldsymbol{\omega}$ 是地轉角速度的向量，$\boldsymbol{F}$ 是外力的向量，而 $\boldsymbol{D}$ 是耗散力的向量.

在外力方面，我們总是認为只有重力一項：

$$\boldsymbol{F}=-\operatorname{grad} U, \tag{1.2}$$

这里 U 是重力的位势. 耗散力主要与湍流有关. 关于这种力，我們以后会詳細的講.

連續方程呈下列形式:

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho \operatorname{div} \boldsymbol{V}=0. \tag{1.3}$$

热通量方程可以写成:

$$\rho \frac{ds}{dt}=\frac{1}{T}\mathscr{E}. \tag{1.4}$$

上式中 s 是質点的熵，T 是溫度，$\mathscr{E}$ 是外来热量流入强度的密度(卽在單位时間內流入單位体积的能量).

大气可以認为是理想气体. 因此，熵可用下式来表示:

$$s=c_v \ln \frac{p}{\rho^{\varkappa}}+\text{常数}=c_p \ln \frac{p^{\frac{1}{\varkappa}}}{\rho}+\text{常数}, \tag{1.5}$$

式中 $\varkappa=\frac{c_p}{c_v}$，$c_p$ 是空气的定压比热，而 c_v 是空气的定容比热.

溫度通过 Claperon 方程(卽状态方程)与 p 和 ρ 联系在一起:

$$p=R\rho T, \tag{1.6}$$

式中 R 为气体常数.

热通量 $\mathscr{E}$ 的概念比較复杂一些. 在大气中，基本上可以存在三种形式的热通量. 第一种，我們叫做輻射热通量，用 $\mathscr{E}_1$ 来表示. 空气的每一个質点輻射并且吸收不同波段的長波輻射. 空气質点也吸收从太阳直接射来的和散射而来的短波輻射. 在 $\mathscr{E}_1$ 中須要考慮到每一个質点的輻射的收支情况.

热通量的第二种形式我們叫做湍流热傳导 $\mathscr{E}_2$. 这个量在方程(1.4)中的情形和耗散力在方程(1.1)中的情形相像.

最后，热通量的第三种形式就是凝結、融解或昇华等潜热的效应，它用 $\mathscr{E}_3$ 来表示.

热通量的前两种形式随时随地都存在着，而第三种形式当然只是局地产生的，而且只是在能使大气中的水分从一种聚集态轉变为另一种聚集态的条件下才存在.

这里所說的运动方程特别是热通量方程都是屬于大气下部的．正是这个垂直厚度量級为 15—25 公里的大气下層要在短期天气預报中加以考慮．我們不討論發生在平流層上部乃至游离層中的各种过程，假使我們想要研究这些層次，我們最好討論一下能量流入的新形式以及其它問題．

在預报中考虑空气湿度是有重大作用的．比湿 q 可以满足湿度傳遞方程：

$$\frac{dq}{dt}=Q, \tag{1.7}$$

式中 Q 表示水分的湍流扩散和由于降水所造成的水分减少．

現在来談一下各方程的書写問題．方程(1.1)和(1.3)是写成向量形式的．最自然的坐标系是以地球的極为極点的球面坐标系．在这种坐标系中，向量方程(1.1)可以写成下列形式：

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{v_\psi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \psi}-\frac{v_\theta^2+v_\psi^2}{r}=$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+F_r+D_r-2\omega\sin\theta v_\psi,$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+\frac{v_r}{r}\frac{\partial r v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_\psi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \psi}-\frac{v_\psi^2\operatorname{ctg}\theta}{r}=$$

$$=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+F_\theta+D_\theta+2\omega\cos\theta v_\psi,$$

$$\frac{\partial v_\psi}{\partial t}+\frac{v_r}{r}\frac{\partial r v_\psi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\psi}{\partial \theta}+\frac{v_\psi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\psi}{\partial \psi}+\frac{v_\theta v_\psi\operatorname{ctg}\theta}{r}=$$

$$=-\frac{1}{r\rho\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \psi}+F_\psi+D_\psi-2\omega\cos\theta v_\theta+2\omega\sin\theta v_r.$$

这里 r 是离开地心的距离，ψ 是当地經度，向东的是正值，θ 为緯度 φ 的余角，即 $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$，$v_\theta$ 是沿經綫的分速（向南为正），v_ψ 是沿緯圈的分速（向东为正），F_r, D_r, F_θ, D_θ, F_ψ, D_ψ 各是外力向量和耗散力向量的投影，$\omega=7.29\times10^{-5}$1/秒是地轉角速度的值．

在球面坐标系中，連續方程(1.3)是：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+v_r\frac{\partial \rho}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial \rho}{\partial \theta}+\frac{v_\psi}{r\sin\theta}\frac{\partial \rho}{\partial \psi}+$$

$$+\rho\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_\theta \operatorname{ctg}\theta}{r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\psi}{\partial \psi}\right)=0.$$

在热通量方程和水分輸送方程中,对时間的个别导数的符号可用下式来表示:

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}+\frac{v_\psi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \psi}.$$

通常我們引用离地面高度 z 代替 r 作为变数:

$$z=r-a_0,$$

这里 a_0 是地球半徑. 这时,显然 $\frac{\partial}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial z}$, $v_r=v_z$. 因为对我們有兴趣的只是对地球半徑来講很薄的一層,那末 a_0 可以代替 r(在作为系数出現时),并且認为:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r v_\theta}{\partial r}\approx\frac{\partial v_\theta}{\partial z},$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r v_\psi}{\partial r}\approx\frac{\partial v_\psi}{\partial z},$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 v_r}{\partial r}\approx\frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

于是运动方程采取下列形式:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{v_\theta}{a_0}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+\frac{v_\psi}{a_0\sin\theta}\frac{\partial v_z}{\partial \psi}-\frac{v_\theta^2+v_\psi^2}{a_0}=$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+F_z+D_z-2\omega\sin\theta v_\psi, \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{v_\theta}{a_0}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_\psi}{a_0\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \psi}-\frac{v_\psi^2\operatorname{ctg}\theta}{a_0}=$$

$$=-\frac{1}{\rho a_0}\frac{\partial \rho}{\partial \theta}+F_\theta+D_\theta+2\omega\cos\theta v_\psi, \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial v_\psi}{\partial t}+v_z\frac{\partial v_\psi}{\partial z}+\frac{v_\theta}{a_0}\frac{\partial v_\psi}{\partial \theta}+\frac{v_\psi}{a_0\sin\theta}\frac{\partial v_\psi}{\partial \psi}+\frac{v_\theta v_\psi\operatorname{ctg}\theta}{a_0}=$$

$$=-\frac{1}{\rho a_0\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \psi}+F_\psi+D_\psi+$$

$$+2\omega\sin\theta v_z-2\omega\cos\theta v_\theta. \tag{1.10}$$

而連續方程可写成：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_z\frac{\partial\rho}{\partial z}+\frac{v_\theta}{a_0}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}+\frac{v_\psi}{a_0\sin\theta}\frac{\partial\rho}{\partial\psi}+$$

$$+\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{1}{a}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{a_0\sin\theta}\frac{\partial v_\psi}{\partial\psi}+\frac{v_\theta\operatorname{ctg}\theta}{a_0}\right)=0. \quad (1.11)$$

这时，应用于标量的符号 $\frac{d}{dt}$ 則呈下式：

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+v_z\frac{\partial}{\partial z}+\frac{v_\theta}{a_0}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{v_\psi}{a_0\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\psi}. \quad (1.12)$$

假使 $\mathscr{E}$, D, Q 用我們的基本函数 v_θ, v_ψ, v_z, ρ, T, P, q 表示成已知的形式，那末(1.4)，(1.6)—(1.11)这七个方程的方程組正好包含了同样数量的未知函数．至于 $\mathscr{E}$, D 和 Q 如何用上述函数表示出来，我們將在下面講到．但是我們必須先弄清楚大范圍內或者严格地說，与短期天气預报問題相应的范圍內，气象过程的一个重要特性．現在就来談談所謂“准靜力”現象．

§1.2. 准靜力关系式

天气形成过程最主要的大气运动常常集中在厚度約为15—25公里的这一層內．而大气过程的水平范圍却可有極大的不同；水平范圍的大小則从几百或几千公尺(如海陆風型的局地風，流过孤立山岭等过程)起到几百甚至几千公里(气旋、反气旋、季風环流等)．气象业务实踐指出，能够形成广大空間天气的运动是在数量級1000公里的区域里进行的．甚至就是取200公里的尺度作为現象的水平尺度，那末我們感兴趣的現象的水平范圍至少要比它的垂直尺度大十倍．而在这种情况下，在預告天气时，可以采用在流体力学所广泛流行的長波法．这种方法是用于重力作用下所形成的波．我們这里是在垂直軸的运动方程中，把垂直加速度的各項略去，因为这些項都比重力加速度要小．H. E. Кочин[1]曾詳細的論証了長波法在动力气象学許多問題上的应用．这一問題大体

1) 例如可参閱 H. E. Кочин 和 Б. И. Извеков (主編)：动力气象学，第二部分，水文气象出版社，1937.

上描述如下。

从連續方程(1.11)出發，可以得出这样的結論：如果特征垂直尺度 H 比特征水平尺度 L 小多少倍，則特征垂直速度——我們称它为 w——也就至少比特征水平速度——我們称它为 u——小这么多倍：

$$\frac{w}{u} \approx \frac{H}{L}$$

(L 自然必須理解为沿緯圈或沿經圈的距离)。

还要指明，比値 $\frac{w}{u}$ 的大小已估計得太高，这在下面的一章內就可証明。事实上，这个估計值是根据 $\frac{\partial v_z}{\partial z}$ 項个別地与 $\frac{1}{a_0 \sin\theta} \times \frac{\partial v_\theta \cos\theta}{\partial\theta}$ 或 $\frac{1}{a_0 \sin\theta} \frac{\partial v_\psi}{\partial\psi}$ 型的各項比較而得出的；而这两項的总和在很大的程度上是互相抵消的。

現在来写出 z 軸的运动方程，即方程(1.8)，其中 F_z 用 $-g$ 来代替，此处的 g 是重力加速度：

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_\theta}{a_0} \frac{\partial v_z}{\partial\theta} + \frac{v_\psi}{a_0 \sin\theta} \frac{\partial v_z}{\partial\psi} - \frac{v_\theta^2 + v_\psi^2}{a_0} =$$
$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + D_z - 2\omega \sin\theta v_\psi. \tag{1.13}$$

取 t_1 作为特征时間：

$$t = \frac{L}{u},$$

或者，同样地，

$$t_1 = \frac{H}{w}.$$

这就是說，我們認为現象傳播的速度与空气运动速度具有同样的大小，这也就是說，我們把傳播速度大大超过質点移动速度的过程，如在声学中所發生的現象，不予考虑。于是很容易証明，在方程(1.13)左边前四項的每一項都有同样小的数量級：

$$\frac{u^2 H}{L^2}.$$

左边第五項的数量級是：

$$\frac{u^2}{a_0}.$$

右边各項則有不同的数量級. 在形式上 D_z 項与左边各項相近,因为它表明垂直方向的不規則对流效应. 含有 ω 的項的数量級是 ωu. 重力加速度的数値,在低于 20 公里內可以認为是一个常数,它的数量級是: $g\approx 10$ 米/秒^2.假使采取 u 的特征值:$u\approx 10$ 米/秒,那末 ωu 値将为:

$$\omega u\approx 10^{-3}\ 米/秒^2,$$

这就是說, ωu 比 g 小 10^4 倍. 假若进一步取 $\frac{H}{L}=\frac{1}{10}$,而H取成几公里,那末 $\frac{u^2H}{L^2}$ 項至少比 g 小 10^3 倍. 最后,假使考虑到 $a_0=6.37\times 10^6$ 米,那末 $\frac{u^2}{a_0}$ 的数量級是:

$$\frac{u^2}{a_0}\approx 10^{-5}\ 米/秒^2,$$

这就是說,它比 g 小 10^6 倍.

这样一来,方程(1.13)总是可以由下列簡單的关系式来代替,并具有充分的准确性:

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g. \tag{1.14}$$

假使 $\boldsymbol{V}=0$, 卽在靜止的情形下, 方程(1.13)就可准确地化为方程(1.14). 对我們有兴趣的尺度的任何大气运动, 我們可以看到都能以較高的准确度来滿足方程(1.14). 方程(1.14)叫做"准靜力关系式". 須要指明,假使垂直尺度和水平尺度有同样的数量級时,准靜力关系式,甚至是近似地,也不能滿足. 因为假如 $\frac{H}{L}=1$ 而 $H=10$ 米,那末在 $u=10$ 米/秒时,

$$\frac{u^2H}{L^2}=10米/秒^2,$$

也就是它和 g 有着同样的数量級.

局地天气的某些問題只有用完全的方程(1.13)才能作詳細的研究. 屬于这方面的,譬如說有在山岭背風坡形成的駐波、以及許