泛函分析

王振鹏 编

吉林大学出版社

泛 函 分 析

王振鹏 编

吉林大学出版社

泛 函 分 析

王振鹏 编

责任编辑：崔晓光　　封面设计：张沭沉

吉林大学出版社出版　　吉林省新华书店发行
（长春市东中华路29号）　　吉林大学印刷厂印刷

开本：850×1168毫米 1/32　　1990年12月第1版
印张：9.3125　　1990年12月第1次印刷
字数：230千字　　印数：1－700册

ISBN 7－5601—0760—5/O·99　　定价：2.45元

序　言

本书是作者近几年为吉林大学数学系研究生所开的泛函分析课的讲义。此课是本科《泛函分析》的继续，因之要求读者已学过一些泛函分析，例如，已学过复旦大学夏道行等编的《实变函数论与泛函分析》下册第四章、第五章与第六章的§1～§6，或者学过南京大学郑维行等编的《实变函数与泛函分析概要》之相应章节。

据说，美国威斯康辛大学数学系对博士的要求是，要知道"something about everytiing and everything about something"。作者很欣赏这个提法。那么，对于硕士，关于泛函分析，这个"something"应该是什么呢？

我是按照"重要而又较难"的原则来选材的。举例说明如下：对于Hilbert 空间$\mathscr{H}$上之酉算子U，令P是到$\{x\in\mathscr{H}:Ux=x\}$上之射影，则von Nenmann 平均遍历定理说，$\frac{1}{N}\sum\limits_{0}^{N-1}U^n\to P$（强）。这是个十分重要的定理。一位本科毕业生在查到这条定理后，可以不读其证明而能较快地理解并应用此定理。但是，对于自伴算子的Borel 函数演算甚至连续函数演算，却未必能象方才那样顺利。又如，攻读微分方程或计算数学的研究生即使未学过广义函数论，自己去读广义函数论基础知识，应无任何较大的困难；但若为了弄清楚基本空间上的拓扑结构而去读($\mathscr{L}\mathscr{F}$)空间的基础知识，则要花些力气才行。按我的选材原则，我不讲平均遍历定理而讲自伴算子的函数演算，不讲广义函数而讲严格归纳极限。

本书把重点放在算子理论上（主要是自伴算子，其次是紧算子），兼顾空间结构。具体地说，本书内容分两部分：第一部分是关于空间结构的——紧 Hausdorff 空间上的 Stone-Weierstrass 定理与 Riesz-Markov 定理、Banach 空间上的弱拓扑、局部凸空间（对偶理论与严格归纳极限）。考虑到有的专业的本科毕业生未学过一般拓扑，所以在讲解上述内容之前先介绍了关于拓扑空间的基本概念与基本知识。限于时间，Тихонов 乘积定理，Riesz-Markov 定理与Eberlein-Шмульян 定理未予证明。这些就是第二章与第三章的内容。本书第二部分是关于算子理论的——一般有界算子的 Riesz-Dunfford 演算、自伴算子谱理论、迹类算子与 Hilbert-Schmidt 类算子（包含对偶理论）、无界算子简介。这些就是第四～七章的内容。

为教学方便，在第四章中把本科《泛函分析》中已学过的关于一般有界算子与紧算子的主要结果开列出来。但关于紧算子的 Fredholm 择一定理与 Riesz-Schauder 定理等不再重复给出证明。在此基础上介绍关于紧自伴算子的Hiebert-Schmidt定理与紧算子标准形定理。

第五章完全用来讲述一般的自伴算子的谱理论。考虑到本课是为数学系基础数学、计算数学、应用数学与概率统计等专业的研究生开设的共修基础课，所以没有用关于一般的交换的 C^*- 代数的 Гельфанд-Наймарк 定理来讲自伴算子的谱定理，而是从自伴算子的连续函数演算与 Borel 函数演算出发来讲述谱表示与谱定理。然后又扼要介绍了谱重数理论大意、正规算子谱论与自伴算子的 Cayley 变换。

据个人的教学经验，学生在学习谱定理时有两个困难：一是测度论的准备不足。不少学生只学过 Lebesgue 测度，对 Boreel 测度尚且生疏，遑论射影值测度。二是对几种定义或导出自伴算子的谱射影的方法，往往有突兀之感。针对第一个困难，本书第一章提要式地介绍了欧氏空间上的 Borel 测度。限

于课程性质与学时，大都未给出证明；读者可以把它当作索引去读 Rudin〔1〕的有关章节。针对第二个困难，本书尽早引进自伴算子A的标量值谱测度μ与Borel函数演算，然后用以给出A的谱射影：定义$E(s)=\chi^s(A)$。这样大致就可把$E(s)$视为$L^2(\mu)$上乘以χ_s的算子（在A有循环向量时这还是严格的）。由此进而得到（积分形式的）谱定理。这可能是较自然的途径。从实际数学情况来看，效果尚可。很可能已有人用这种讲法，只是作者孤陋寡闻，自以为是"尝试"罢了。

历史上，先有（积分形式的）谱定理，后有（乘法算子形式的）谱表示。谱表示，除了能使我们对自伴算子有较直观的了解之外，还有其它用途，如用它来大致了解谱重数理论的大意。积分形式的谱定理似乎很难派上这种用场。

至于在得到谱定理之后，仍用 Cayley 变换之逆变换重新建立谱定理，其目的有二：一是加深对谱射影与谱定理的理解，二是为建立无界自伴算子的谱定理张本——在有了酉算子的谱定理之后，用 Cayley 变换之逆变换来建立无界自伴算子的谱定理，毕竟是最省篇幅的方法。

本书第六章深入研究两类特殊的紧算子——迹类算子与Hilbert-Schmidt类算子，并介绍了对偶理论。这两类算子是最重要的紧算子。Hilbert-Schmidt类算子构成的代数是Hilbert代数的典型例子。研究此类算子显然有助于加深对以L^2-函数为核的积分算子的了解。对偶理论的整齐与和谐应该给读者以美感。

最后一章——第七章介绍了关于无界算子的基本知识：图形、伴随、自伴算子的谱定理与谱表示。

本书多处参考了江泽坚〔1〕，Rudin〔1〕与〔2〕，Reed-Simon〔1〕；此外，第六章§3还参考了Conway〔1〕。这里一并致谢。

限于作者水平，疏漏之处在所不免，敬请读者批评指正。

王 振 鹏

目 录

第一章　预备知识、补遗与回顾

本章是把一些无甚关联的材料拼凑一起而成的。它包括：抽象测度，欧氏空间上的 Borel 测度，(B)空间的子空间与商空间的拓朴对偶，向量值解析函数和(H)空间上一些初等结果。最后一部分纯属回顾。这些都是本课程后面所需要的。

关于抽象测度与 Borel 测度，我们着重介绍概念与定理的内容，而很少给出证明。限于篇幅与课程性质，我们只能这样做。

§1　抽象测度

定义　称非空集合M的一些子集组成的非空集合类$\mathscr{R}$为σ-**环**，如果

(a) $A_i\in\mathscr{R}(i=1, 2, \cdots)$ 蕴涵 $\bigcup_1^\infty A_i\in\mathscr{R}$，

(b) $A, B\in\mathscr{R}$蕴涵$A\backslash B\in\mathscr{R}$。

如果还有$M\in\mathscr{R}$，则称$\mathscr{R}$为σ-**代数**。

往往用$\mathscr{F}$表示σ-代数。本课中用的都是σ-代数，而非σ-环。

这时，$\langle M, \mathscr{F}\rangle$称为**可测空间**，$\mathscr{F}$之元称为**可测集**。

注意。$\langle M, \mathscr{F}\rangle$上尚无测度。

以$\mathscr{C}E$表E之余集，则由

$$\mathscr{C}B=M\backslash B,\quad \bigcap_1^\infty A_n=\mathscr{C}\bigcup_1^\infty\mathscr{C}A_n$$

可知，σ-代数$\mathscr{F}$还封闭于取余集及可数交的运算。

定义 设$\langle M, \mathscr{F}\rangle$是可测空间，$\mu$是定义在$\mathscr{F}$上的非负值函数，而且是可数可加的，即：对于任何一串两两不交的可测集$\{A_n\}_1^\infty$，总有

$$\mu\left(\bigcup_1^\infty A_n\right)=\sum_1^\infty \mu(A_n),$$

则称μ为$\langle M, \mathscr{F}\rangle$上的**正测度**。这时，$\langle M, \mathscr{F}, \mu\rangle$称为**正测度空间**。

今后经常不严格地说"μ是M上的"或"μ是$\mathscr{F}$上的"正测度。好在，这不产生混淆。

我们总是约定，有$A\in\mathscr{F}$使$\mu(A)<+\infty$。由此，$\mu(\phi)=0$。事实上，取$A_1=A$，$A_2=A_3=\cdots=\phi$，则由可数可加性而知$\mu(\phi)=0$。于是，μ还是有限可加的：对于两两不交的A_1，…，$A_n\in\mathscr{F}$，取$A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\phi$，便得到

$$\mu\left(\bigcup_1^n A_i\right)=\sum_1^n \mu(A_i).$$

不发生混淆时，"正测度空间"与"正测度"中之"正"字，予以省略。

例 1 取$M=\{1,2,3,\cdots\}$，$\mathscr{F}$为M之所有子集。令$\mu(A)$等于A之基数，则μ是$\langle M, \mathscr{F}\rangle$上的一个测度。

同一个可测空间上可以有各种不同的测度。

例 2 设f是$[0,1]$上的非负(L)可测函数。于每个(L)可测集$E\subset[0,1]$，定义

$$\mu(E)=\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

则μ是可测空间$\langle[0,1], \mathscr{F}\rangle$上的测度，其中$\mathscr{F}$表示$[0,1]$的全体(L)可测子集组成的$\sigma$-代数。

在例 2 中取$f(x)=\dfrac{1}{x}$，则$\mu([0,1])=\infty$。

定理 1 设$\langle M, \mathscr{F}, \mu\rangle$是正测度空间，$A_n \in \mathscr{F}$。

(a) 若$A_n \uparrow A$（即$A_1 \subset A_2 \subset \cdots$，$\bigcup\limits_1^\infty A_n = A$），则$\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$。

(b) 若$A_n \downarrow A$（即$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$，$\bigcap\limits_1^\infty A_n = A$），而且$\mu(A_1) < \infty$，则$\mu(A_n) \downarrow (\mu(A)$。

证明 (a) 令$E_1 = A_1, E_n = A_n \setminus A_{n-1}$(当$n \geqslant 2$)，则$\{E_n\}_1^\infty$是一串两两不交的可测集，而且$\bigcup\limits_1^n E_i = A_n$，$\bigcup\limits_1^\infty E_i = A$。于是由$\mu$之可数可加性，

$$\mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_1^n E_i\right) = \sum_1^n \mu(E_i) \to \sum_1^\infty \mu(E_i) = \mu(A)$$

(b) 注意，$B_n \stackrel{\triangle}{=} (A_1 \setminus A_n) \uparrow (A_1 \setminus A)$，故

$$\mu(B_n) \uparrow \mu(A_1 \setminus A) = \mu(A_1) - \mu(A)$$

但$\mu(B_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$，故$\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$。证毕。

注记 在“$B_n \triangleq (A_1 / A_n)$”中，“$\triangleq$”表示右端是左端的定义。今后也将这样使用这个记号.又,现在也有很多人用“$:=$”表示同样的意思。

定义 设$\langle M, \mathscr{F}\rangle$是可测空间。$M$上的实函数$f$称为$\mathscr{F}$-**可测的**，如果对任何$(a,b)$，$f^{-1}((a,b))$都是可测集。

“$\mathscr{F}$-可测的”简称为“可测的”。

定义 $\langle M, \mathscr{F}\rangle$上的复函数$f = u + iu$称为**可测的**，如果实函数$u$，$v$都是可测的。

不难验证，复函数f可测的充要条件是：对于复平面 C 中之任一开集G，$f^{-1}(G)$都是可测的。

对于M之任一可测分划$\{A_i\}_1^n$(即诸A_i两两不交,$A_i \in \mathscr{F}$,

$\bigcup_{1}^{n} A_i = M$)，简单函数

$$S(x) = \sum_{1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x)$$

是可测的，其中$a_i \in \mathrm{C}$，

$$\chi_{A_i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{当} x \in A_i \\ 0, & \text{当} x \notin A_i \end{cases}$$

是A_i的特征函数。

定义 设$\langle M, \mathscr{F}, \mu \rangle$是正测度空间。对于非负简单函数$S(x) = \sum_{1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x)$，定义

$$\int_M S(x) \mathrm{d}\mu = \sum_{1}^{n} a_i \mu(A_i)$$

称为S（**关于μ**）**的积分**。

对于M上的非负可测函数f，定义

$$\int_M f \mathrm{d}\mu = \sup\left\{\int_M S \mathrm{d}\mu : S \text{ 是非负简单函数且} S \leqslant f\right\}$$

为f关于μ的**积分**；积分有限时就说f是μ-**可积的**，简称为**可积的**。

对于M上的一般的实可测函数$f = f^+ - f^-$，当$\int_M f^+ \mathrm{d}\mu$，$\int_M f^- \mathrm{d}\mu$不全为∞时，定义f（关于μ）的**积分**为

$$\int_M f \mathrm{d}\mu = \int_M f^+ \mathrm{d}\mu - \int_M f^- \mathrm{d}\mu$$

当积分有限时，f称为**可积的**。

对于复可测函数$f = u + \mathrm{i}v$，当u，v皆可积时，定义f的积分为

$$\int_M f \mathrm{d}\mu = \int_M u \mathrm{d}\mu + \mathrm{i}\int_M v \mathrm{d}\mu$$

这时称 f 为可积的。

M 上全体复可积函数之集记作 $L^1(M,\mathscr{F},\mu)$，简记作 $L^1(\mu)$。

我们知道任一非负 (L) 可测函数 f 都是一串非负简单函数的渐升极限，那么不难猜想到，这一结论现在仍然成立。由此，不难理解现在为什么那样定义非负可测函数的积分。

欧氏空间上的(L)积分的初等性质，现在仍然成立。不一一赘述。

下面我们不加证明地开列几条逐项积分定理. 此处$\langle M,\mu\rangle$是正测度空间。

定理 2 (Levi) 设f_n在M上非负可测，而且$f_n(x)\uparrow f(x)$，则

$$\int_M f_n \mathrm{d}\mu \to \int_M f\mathrm{d}\mu$$

定理 3 (Lebesgue)设f_n在M上非负可测，则

$$\int_M \sum_1^\infty f_n \mathrm{d}\mu = \sum_1^\infty \int_M f_n \mathrm{d}\mu$$

定理 4 (Fatou)设f_n在M上非负可测，则

$$\int_M \underline{\lim} f_n \mathrm{d}\mu \leqslant \underline{\lim} \int_M f_n \mathrm{d}\mu$$

定理 5 (Lebesgue控制收敛定理) 设$\{f_n\}_1^\infty$是M上一串复可测函数. $\lim f_n(x)=f(x)$ $[\mu]$ a.e.在 X 上；如果有非负的$F\in L^1(\mu)$，使得

$$|f_n(x)|\leqslant F(x),\ n=1,2,\cdots,x\in M$$

则 $f\in L^1(\mu)$，而且

$$\int_M |f_n - f| \mathrm{d}\mu \to 0$$

命题 6 设$\langle M,\mathscr{F},\mu\rangle$是正测度空间，$f$ 在 M 上非负可测，处处取有限值，则

$$\nu: E \quad \int_E f \mathrm{d}\mu \qquad (E \in \mathscr{F}) \tag{1}$$

也是$\mathscr{F}$上的正测度，而且对于M上的任一非负可测函数g都有

$$\int_M g \,\mathrm{d}\nu = \int_M gf \,\mathrm{d}\mu \tag{2}$$

证明 由逐项积分定理，ν可数可加。故ν为一测度。

当g是某个$E\in\mathscr{F}$的特征函数时，所求证的(2)就是(1)，(1)当然成立。从而对于非负简单函数g，(2)也成立。对于一般的非负可测函数g，取非负简单函数φ_n使$\varphi_n \uparrow g$。已知

$$\int_M \varphi_n \mathrm{d}\nu = \int_M \varphi_n f \mathrm{d}\mu$$

再利用Levi定理进行逐项积分即得(2)式。证毕。

我们有时把(2)式写成

$$\mathrm{d}\nu = f\mathrm{d}\mu \tag{2$'$}$$

其中$\mathrm{d}\nu$，$\mathrm{d}\mu$并无独立的意义。(2)$'$只是表示(2)对于所有非负可测函数g都成立。

又，当$g = g^+ - g^- \in L^1(\nu)$时(2)也成立。

定义 设μ, ν都是σ-代数$\mathscr{F}$上的正测度。如果$\mu(E)=0$蕴涵$\nu(E)=0$，则说ν**关于**μ**绝对连续**，记作$\nu \ll \mu$。

命题6中的ν与μ就满足$\nu \ll \mu$。反之如何？在一个很一般的附加条件之下，命题2之逆也成立。

定义 σ-代数$\mathscr{F}$上的测度μ称为σ-**有限的**，如果有$A_i \in \mathscr{F}$使$M = \bigcup\limits_1^\infty A_i$，$\mu(A_i) < \infty$，$i = 1, 2, \cdots$。

当然可以要求这一串$\{A_i\}$是两两不交的。

n维欧氏空间R^n上的Lebesgue测度是σ-有限的。

定理7 (Radon-Nikodym)设μ, ν都是$\langle M, \mathscr{F}\rangle$上的$\sigma$-有限测度，则$\nu \ll \mu$的充要条件是：有$M$上处处有限的非负可测函

数 f,使得

$$\nu(E)=\int_E f\,\mathrm{d}\mu, \text{ 对所有} E\in\mathscr{F} \tag{3}$$

f在μ-几乎处处 相等的意义下是唯一的，称为ν关于μ的**Radon-Nikodym 导数**，简记为(R-N)导数。

证明参见 Rudin[1],p.129。

注记

(a) 在每个μ-测度有限集上，f是μ-可积的。

(b) 当ν是有限测度时，$f\in L^1(\mu)$。

(c) 由命题6，对任何$g\in L^1(\nu)$都有

$$\int_M g\,\mathrm{d}\nu=\int_M gf\,\mathrm{d}\mu$$

在本课中，将来出现的测度本身就是有限的。

下面介绍一个较难掌握的概念。

定义 设μ,ν是$\langle M,\mathscr{F}\rangle$上的两个正测度。如果有 $A\in\mathscr{F}$ 使得

$$\mu(A)=0,\ \nu(\mathscr{C}A)=0,$$

则说μ与ν**相互奇异**，记作$\mu\perp\nu$。

上面的条件是说：μ集中在$\mathscr{C}A$上，而ν集中在A上。

两个测度之间未必有相互奇异或其中一个关于另一个绝对连续的关系。但是，我们有下述的头等重要的定理。

定理 8 (Lebesgue 分解定理) 设 μ,ν 都是$\langle M,\mathscr{F}\rangle$上的 σ-有限的正测度，则存在唯一的一对σ-有限正测度ν_{ac}与 ν_s使得

$$\nu=\nu_{ac}+\nu_s,\ \nu_{ac}\ll\mu,\ \nu_s\perp\mu,\ \nu_{ac}\perp\nu_s$$

证明见Rudin[1], p.129.

本课程还要遇到实测度与复测度。

定义 设 μ 是 σ-代数$\mathscr{F}$上之实值可数可加函数，$+\infty$与$-\infty$中最多只有一个被取到，则称 μ 为**实测度**。

实测度没有单调性，这带来很多麻烦。

定义 σ-代数$\mathscr{F}$上的只取有限复数的可数可加函数μ称为**复测度**。

这意味着，若$E=\bigcup\limits_{1}^{\infty}E_n$是$E$之可测分划，则

$$\mu(E)=\sum_{1}^{\infty}\mu(E_n)$$

把$\{E_n\}_1^\infty$重排，上式右端仍收敛到$\mu(E)$，故它是绝对收敛的。

定义 于复测度（包括只取有限实数的实测度）μ，对每个$E\in\mathscr{F}$，定义

$$|\mu|(E)=\sup\left\{\sum_{1}^{\infty}|\mu(E_n)|:\{E_n\}_1^\infty\text{是}E\text{之可测分划}\right\}$$

称$|\mu|$为μ之**全变差测度**。

定理 9 设μ是$\langle M,\mathscr{F}\rangle$上的复测度，则

(a) $|\mu|$是正测度。

(b) $|\mu|(E)\geqslant|\mu(E)|$，对所有$E\in\mathscr{F}$。

(c) $|\mu|(M)<\infty$。

证明 (a) 只须证$|\mu|$是可数可加的。对于$E\in\mathscr{F}$之分划$\{E_i\}_1^\infty$及$\varepsilon>0$，有E_i之分划$\{A_{ij}\}_{j=1}^\infty$使得

$$|\mu|(E_i)-\frac{\varepsilon}{2^i}\leqslant\sum_{j}|\mu(A_{ij})|,\quad i=1,2,\cdots$$

因为$\{A_{ij}:i,j=1,2,\cdots\}$是$E$之分划，故

$$\sum_{i}|\mu|(E_i)-\varepsilon\leqslant\sum_{i,j}|\mu(A_{ij})|\leqslant|\mu|(E).$$

由$\varepsilon>0$之任意性，

$$\sum_{i}|\mu|(E_i)\leqslant|\mu|(E)$$

再证反过来的不等式。设$\{A_j\}_1^\infty$是E之任一分划。取定j，$\{A_j\cap E_i\}_{i=1}^\infty$是$A_j$的分划；取定$i$，$\{A_j\cap E_i\}_{j=1}^\infty$是$E_i$的分

划。于是，

$$\sum_j |\mu(A_j)| = \sum_j \left|\sum_i \mu(A_j \cap E_i)\right|$$

$$\leqslant \sum_j \sum_i |\mu(A_j \cap E_i)| = \sum_i \sum_j |\mu(A_j \cap E_i)|$$

$$\leqslant \sum_i |\mu|(E_i)$$

(b) 由$|\mu|$之定义即知所求证者为真。

(c) 令$\mu_1(E) = \mathrm{Re}\mu(E)$，$\mu_2(E) = \mathrm{Im}\mu(E)$，则$\mu = \mu_1 + i\mu_2$,其中$\mu_1, \mu_2$都是只取有限实数的实测度。易见

$$|\mu| \leqslant |\mu_1| + |\mu_2|$$

若$|\mu|(M) = +\infty$,则$|\mu_1|(M) = +\infty$或$|\mu_2|(M) = +\infty$。于是不妨设μ本身就是只取有限实数的实测度。

首先，于实数$a_1, \cdots, a_n$，必有$S \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$使

$$\left|\sum_{i \in S} a_i\right| \geqslant \frac{1}{2} \sum_1^n |a_i|$$

事实上，取S为$\{i: a_i \geqslant 0\}$或$\{i: a_i < 0\}$即可。

(一) 现在证明：若$|\mu|(E) = \infty$，则有E之分划$\{A, B\}$使得

$$|\mu(A)| > 1, \quad |\mu|(B) = \infty \tag{4}$$

事实上，有E之分划$\{E_i\}_1^\infty$使得

$$\sum_1^\infty |\mu(E_i)| > t \overset{\triangle}{=} 2(1 + |\mu(E)|)$$

取定充分大的n使

$$w \overset{\triangle}{=} \sum_1^n |\mu(E_i)| > t.$$

取$S \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$使

$$\left|\sum_{i \in S} \mu(E_i)\right| \geqslant \frac{1}{2} w \left(> \frac{t}{2} = 1 + |\mu(E)| \geqslant 1 \right)$$