DAXUESHENGZHIYO

理论力学
解题分析

江苏科学技术出版社

理论力学解题分析

许健民　纪际义

出版：江苏科学技术出版社

发行：江苏省新华书店

印刷：江苏新华印刷厂

开本 787×1092 毫米　1/32　印张 21.875　字数 465,000

1981 年 8 月第 1 版　1981 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—32,600 册

书号：13196·072　　定价：1.81 元

责任编辑　高志一

《大学生之友》丛书出版说明

大学理工科的学生，包括电视大学、职工大学的学生，在学习过程中往往要演算大量的习题，以加深对课程内容的理解和记忆。但在解题时，经常会遇到各种各样的困难。《大学生之友》丛书就是为了帮助他们提高解题能力，熟练演算技巧，牢固地掌握学科知识而出版的。

丛书以解题分析为主。为了便于阅读，每节首先简要介绍有关的概念、定律和公式。然后，用较大的篇幅选择有代表性的例题进行剖析，交代解题的思路，归纳解题的规律，指出必须注意的事项。最后，附以适量的习题，并提供答案或提示。

丛书内容密切配合大学教材，选题以数理化基础课和专业基础课为主，兼顾各专业课。各书的出版时间，也基本上按此顺序安排，逐步配套。

我们的愿望，想使这套丛书成为大学生喜爱的“朋友”。能否如愿，还有待于广大师生的检验。我们诚恳地欢迎读者对每一本书提出宝贵意见，使它们成为名副其实的“大学生之友”。

江苏科学技术出版社

前　言

在理论力学教学中，我们发现学生最感困难的是解题。理论力学习题颇多，类型各异，与普通力学相比要抽象和复杂得多，因此有些学生在解题时往往不知如何下手。针对这种情况，我们利用习题辅导课，把理论力学各种问题进行系统的分类，对每类问题提供解题的基本方法，着重分析解剖典型例题，并指出解题过程中易犯的错误和常遇的难点。实践证明，这样做的效果是好的，学生通过正确解题的训练，提高了综合分析能力、逻辑推理能力和具体演算能力，并透彻地理解了物理概念。有关习题辅导课的讲稿逐年增删修改，积累成册，就是本书的缘起。

本书内容基本上与大学理科各专业及师范物理系的理论力学教程相配，适当照顾到工科的需要。适宜的阅读对象是以上各科学生，也可供有关课程的青年教师以及自修理论力学的同志参考。

感谢江苏师范学院朱正元教授和周孝谦教授在编写过程中给予热情的鼓励和有益的指导。

感谢叶水塘、金进生、陶卫江、黄红、钱鼎等同志为本书编写做了很多细致具体的工作，没有他们的协助是很难如期脱稿的。

南京大学周衍柏，上海师范学院王贤德，上海科技大学李汉忠，江苏师范学院黄玲琍，新疆大学虞承飞，黑龙江大

学俞文光，扬州师范学院斯颂乐，湖南大学靳九成，浙江教育学院谢先闻等同志，分别审阅了全书初稿各章并提出了很多宝贵意见，编者得教益甚多，特此致谢。

全书最后由周孝谦教授审定。

由于编者水平有限，错误一定很多，敬祈指正。

编　者

一九八〇年六月于杭州大学物理系

目　录

第八章　静力学

第九章　虚功原理

第十章　达朗贝尔原理

第十一章　分析动力学

第十二章　解题方法简论

第一章　质点运动学

§1.1　质点运动学内容简介

质点运动学，顾名思义，是对质点的运动状态的研究。其研究的对象是质点，研究的内容只是被研究对象在空间相对位置的变化情况，而不包括引起这种变化的原因。换句话说，在运动学范围内，不研究力与运动的关系，只研究运动的状态。

所谓质点，是对物体的一种抽象。当运动物体的线度和它运动的范围相比可以忽略时，就可以把它当作一个不具有大小的点来看待。这种可以忽略其体积或大小的物体就叫做质点。质点是一个很有用的概念，它不仅使我们在研究一个物体或几个物体的运动时，大大简化问题（如研究人造卫星的轨道问题），而且对于要考虑其大小的物体（如后面要研究的刚体），我们也不妨把它看成由无数质点所组成，推广应用有关质点的运动规律。

理论力学的进一步问题，从研究对象来说，将会遇到比质点复杂的质点组、刚体等；从研究内容来说，不仅涉及运动状态的描述，而且还要讨论引起运动状态变化的原因，即力与运动的关系。显而易见，较为简单的质点运动学，是整个理论力学最基础的部分。

如何描写一个质点的运动呢？我们可以作一坐标系

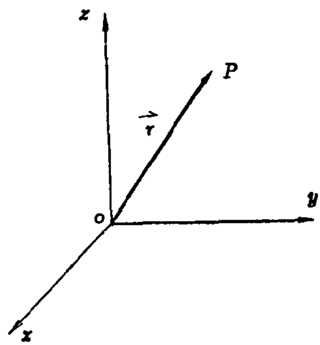

图 1-1

$o\text{-}xyz$，以 P 点代表此质点。如果知道 P 点的位置矢径按时间的变化规律(图 1-1)

$$\vec{r}=\vec{r}(t) \qquad (1\text{-}1)$$

那末，什么时候质点在什么地方就都知道了。

(1-1)式分解为直角坐标的矢量表示式，即

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \qquad (1\text{-}2)$$

质点距原点的距离

$$r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$\vec{r}$ 的方向用它在 $o\text{-}xyz$ 坐标系中的方向余弦表示。

单单知道(1-1)式，运动的另一些特征还不能直接表露出来，为此还定义了速度 $\vec{v}$ 和加速度 $\vec{a}$。

$$\vec{v}\equiv\frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (1\text{-}3)$$

$$\vec{a}\equiv\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (1\text{-}4)$$

速度在直角坐标系的分量表示式分别用 v_x、v_y、v_z 表示，则有

$$v_x=\frac{dx}{dt}, \quad v_y=\frac{dy}{dt}, \quad v_z=\frac{dz}{dt} \qquad (1\text{-}5)$$

速度的大小 $v=|\vec{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z}$， 速度的方向可用 $\vec{v}$ 在 $O\text{-}xyz$ 坐标系中的方向余弦表示。

加速度在直角坐标系中的分量表示式分别以 a_x、a_y、a_z 表示，则有

$$\begin{cases} a_x=\dfrac{dv_x}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ a_y=\dfrac{dv_y}{dt}=\dfrac{d^2y}{dt^2} \\ a_z=\dfrac{dv_z}{dt}=\dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases} \tag{1-6}$$

加速度的大小 $a=|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$， 加速度的方向可用 $\vec{a}$ 在 $o\text{-}xyz$ 坐标系中的方向余弦表示。

另外，有时还需要知道质点在空间运动的轨道（例如人造卫星的轨道）。一般说来它是一空间曲线，可以由如下的式子表达

$$\begin{cases} f_1(x,y,z)=0 \\ f_2(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{1-7}$$

(1-7)的每一式分别表示一空间曲面，两空间曲面的交线就是一空间曲线。如果已知 $\vec{r}=\vec{r}(t)$，则利用(1-2)式，在(1-2)式的三个式子中消去 t，即可以得(1-7)式，所以已知 $\vec{r}=\vec{r}(t)$，轨道是立即可以求出的。

由上述可见，描述质点运动状态的要素，无非就是位置矢径 $\vec{r}$，速度 $\vec{v}$，加速度 $\vec{a}$ 以及轨道。需指出的是：$\vec{r}$、$\vec{v}$、$\vec{a}$ 在一般情况下均是时间 t 的函数，即

$$\vec{r}=\vec{r}(t)$$

$$\vec{v}=\vec{v}(t)$$

$$\vec{a}=\vec{a}(t)$$

只有在特殊情况下，如在匀变速运动中，

$$\vec{r}=\vec{r}(t)$$

$$\vec{v}=\vec{v}(t)$$

$$\vec{a}=\vec{c}=\text{常矢量}$$

在匀速运动中，

$$\vec{r}=\vec{r}(t)$$

$$\vec{v}=\vec{c}_1=\text{常矢量}$$

$$\vec{a}=0$$

静止时，

$$\vec{r}=\vec{c}_2=\text{常矢量}$$

$$\vec{v}=0$$

$$\vec{a}=0$$

为了研究问题方便起见，除了应用直角坐标外，还采取别的坐标，例如平面极坐标、自然坐标、柱面坐标等。正因为 $\vec{r}$、$\vec{v}$、$\vec{a}$ 是矢量，而各种坐标系所规定的单位矢量又不同，也就带来了 $\vec{r}$、$\vec{v}$、$\vec{a}$ 在各种坐标系中不同的表达式。

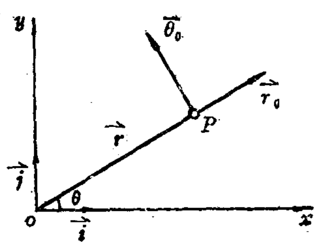

图 1-2

在平面极坐标中（见图 1-2，用以解决平面运动，即二维问题）

$$\vec{r}=r\vec{r}_0 \tag{1-8}$$

其中$\vec{r_0}$是矢径方向的单位矢量.

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}(r\vec{r_0})=\frac{dr}{dt}\vec{r_0}+r\frac{d\vec{r_0}}{dt}$$

$$=\frac{dr}{dt}\vec{r_0}+r\frac{d\theta}{dt}\vec{\theta_0}$$

$$\therefore \quad \vec{v}=\dot{r}\,\vec{r_0}+r\dot{\theta}\,\vec{\theta_0} \tag{1-9}$$

其中r、θ上面的"·"即表示d/dt，$\vec{\theta_0}$为横向的单位矢量. 式(1-9)右边第一项称径向速度，第二项称横向速度，其大小分别以v_r、v_θ表示，则

$$\begin{cases} v_r=\dot{r} \\ v_\theta=r\dot{\theta} \end{cases} \tag{1-10}$$

速度大小$v=|\vec{v}|=\sqrt{v_r^2+v_\theta^2}$

这里为什么会出现两项速度呢？因为$\frac{d\vec{r_0}}{dt}$是单位矢量$\vec{r_0}$对时间的微商，在质点运动的过程中，$\vec{r_0}$的大小不变，但方向是要改变的，故$\frac{d\vec{r_0}}{dt}=\dot{\theta}\,\vec{\theta_0}\neq 0$，在这里它和平面直角坐标$o$-$xy$的单位矢量$\vec{i}$、$\vec{j}$不同($\vec{i}$、$\vec{j}$分别表示$x$、$y$方向的单位矢量). 如果我们是以$o$-$xy$坐标系作为研究运动的参考，即把它看成是不动的，那末质点在运动时，只有质点的坐标x、y在变，而和坐标系联系在一起的单位矢量$\vec{i}$、$\vec{j}$的方向不变，故

$$\frac{d\vec{i}}{dt}=0,\quad \frac{d\vec{j}}{dt}=0$$

加速度$\vec{a}$在极坐标中的表达式为：

$$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{r_0}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\vec{\theta_0} \qquad (1-11)$$

等式右边第一项为径向加速度，第二项为横向加速度，它们的大小分别以a_r及a_θ表示，则

$$\begin{cases} a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta} \end{cases} \qquad (1-12)$$

加速度大小$a=|\vec{a}|=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2}$。(与$\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$一样，$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}$也有单位矢量的微商问题。初学者往往会忘去$a_r$、$a_\theta$中的第二项，是因为在记忆时，总把$\dfrac{d\vec{r_0}}{dt}$，$\dfrac{d\vec{\theta_0}}{dt}$即单位矢量微商当作零的原因，建议按$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}$具体推导一下，同时弄清每一项的物理意义。)

在自然坐标中，速度

$$\vec{v}=v\vec{\tau_0} \qquad (1-13)$$

其中$\vec{\tau_0}$为质点沿轨道切线，并指向运动方向的单位矢量，如图 1-3 所示。

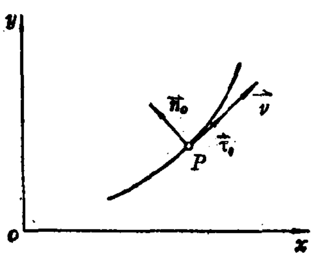

图 1-3

速度的大小

$$v=\frac{ds}{dt} \qquad (1-14)$$

其中ds是在dt时间内质点所走过的路程，对应于轨道某点算起的曲线长度的增量。加速度

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}_0 + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}_0 \qquad (1\text{-}15)$$

其中 ρ 为质点所在处的轨道的曲率半径，$\vec{n}_0$ 为沿质点所在处曲线的法线，并指向凹的一方的单位矢量．上式右边第一项称切向加速度$\vec{a}_\tau$，第二项称法向加速度$\vec{a}_n$，则

$$\begin{cases} a_\tau = \dfrac{dv}{dt} \\ a_n = \dfrac{v^2}{\rho} \end{cases} \qquad (1\text{-}16)$$

加速度的大小

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

在上面的自然坐标中，我们只讨论质点作平面运动的情况，至于质点作空间运动的情况，可参考有关书籍（例：КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ А. И. НЕКРАСОВ）．

在柱面坐标中（用以解决三维问题），如图 1-4 所示，引入单位矢量 $\vec{r}_0$、$\vec{\theta}_0$、$\vec{k}_0$ 则

$$\vec{r} = r\vec{r}_0 + z\vec{k}_0 \qquad (1\text{-}17)$$

应用单位矢量的微商可以得到速度

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{r}_0 + r\dot{\theta}\,\vec{\theta}_0 + \dot{z}\,\vec{k}_0 \qquad (1\text{-}18)$$

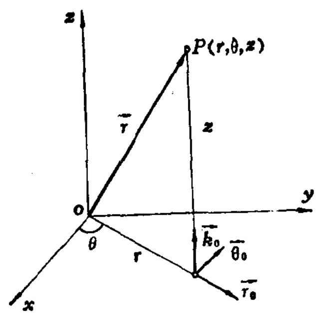

图 1-4

$\vec{v}$ 在 $\vec{r}_0$、$\vec{\theta}_0$、$\vec{k}_0$ 方向分量分别为

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \\ v_z = \dot{z} \end{cases} \tag{1-19}$$

速度的大小 $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2}$。

同样可求得加速度

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{r_0} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{\theta_0} + \ddot{z}\vec{k_0} \tag{1-20}$$

$\vec{a}$ 在 $\vec{r_0}$、$\vec{\theta_0}$、$\vec{k_0}$ 方向的分量分别为

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases} \tag{1-21}$$

加速度的大小

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_z^2}$$

§1.2 质点运动学问题的解

上节就如何描述质点的运动状态，定义了 $\vec{r}$，$\vec{v}$，$\vec{a}$ 以及轨道的表示式。如已知其中某量，根据上述定义的关系，求出其余各量，就是对质点运动学问题的解。对于常见的质点运动学问题，我们可以把它们分成以下几种类型：

第一种类型 已知 $\vec{r} = \vec{r}(t)$，求 $\vec{v}$ 及 $\vec{a}$。

这一类问题，基本上就是按前所述的速度，加速度在各种坐标系中的表示式直接计算。运算方法是对 t 求导，没有什么特别的困难，但有时可能稍有一些变化。

(1) 不直接给出 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 的函数式，而只告诉质点具体

的运动情况.(例如是某种运动机构上的一点)这就需要按题意把$\vec{r}=\vec{r}(t)$的函数式先找出来.

(2) 给出$\vec{r}=\vec{r}(t)$在某一种坐标系中的表示式，要求$\vec{v}$，$\vec{a}$在另一种坐标系中的表示式. 例如已知$x=x(t)$，$y=y(t)$,要求质点的切向加速度和法向加速度.

第二种类型 已知$\vec{a}=\vec{a}(t)$或$\vec{a}=\vec{a}(\vec{v})$或$\vec{a}=\vec{a}(\vec{r})$，求$\vec{v}=\vec{v}(t)$及$\vec{r}=\vec{r}(t)$。

这一类问题基本运算方法是积分，有时也要解一些简单的微分方程. 对于已知$\vec{a}=\vec{a}(t)$，那只要用普通的积分就是. 至于已知后两种情况,有时也可以通过变换而后积分.今举一维的情况加以说明.

(1) 如已知 $a=f(v)$

$$\because \quad a=\frac{dv}{dt}$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dt}=f(v)$$

即

$$\frac{dv}{f(v)}=dt$$

两边积分

$$\int\frac{dv}{f(v)}=\int dt$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{f(v)}=t-t_0$$

从上式即可解出$v=v(t)$,从而进一步得到

$$x=x(t)$$

(2) 如已知 $a=f(x)$