工程電磁問題詳解

W. H. 海特 Jr.　原著
陳珉宏　譯著

曉園出版社
世界图书出版公司

工程電磁問題詳解

W. H. 海特 Jr.　原著
陳珉宏　譯著

曉園出版社
世界图书出版公司

工程电磁问题详解

W.H. 海特 Jr. 原著
陈 宏 译著

*

晓园出版社出版
世界图书出版公司北京公司重印
北京朝阳门内大街 137 号
北京中西印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1994 年 11 月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1994 年 11 月第一次印刷 印张：14.75
印数：0001—550 字数：37万字

ISBN: 7-5062-1927-1/TN·29

定价：23.50元 (WB9403/8)

前　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉著習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與舖路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精徹的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉著這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

Hayt 工程電磁問題詳解

（目　　錄）

第一章　向量分析

練習題

D1.1 已知三點A（2，−3，1），B（−4，−2，6），（1，5，−3）試找出

(a)從A到C的向量。　(b)從B到A向量的單位向量。

(c)從B到C的距離。　(d)A到B、C線段中點的向量。

解

(a) $\overrightarrow{AC} = (1-2)\mathbf{a}_x + [5-(-3)]\mathbf{a}_y + (-3-1)\mathbf{a}_z$

$= -\mathbf{a}_x + 8\mathbf{a}_y - 4\mathbf{a}_z$

(b) $\overrightarrow{BA} = [2-(-4)]\mathbf{a}_x + [-3-(-2)]\mathbf{a}_y + [1-6]\mathbf{a}_z$

$= 6\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y - 5\mathbf{a}_z$

$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{6^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = 7.874$

$\therefore \mathbf{a}_{BA} = \dfrac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|} = \dfrac{6}{7.874}\mathbf{a}_x - \dfrac{1}{7.874}\mathbf{a}_y - \dfrac{5}{7.874}\mathbf{a}_z$

$= 0.762\mathbf{a}_x - 0.127\mathbf{a}_y - 0.635\mathbf{a}_z$

(c) $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{[1-(-4)]^2 + [5-(-2)]^2 + (-3-6)^2}$

$= 12.45$

(d) $\overrightarrow{BC}$ 中點M爲 $\left((-4+1)/2, (-2+5)/2, (6-3)/2\right)$

$= \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

$\therefore \quad \overrightarrow{AM} = \left(-\dfrac{3}{2} - 2\right)\mathbf{a}_x + \left[\dfrac{3}{2} - (-3)\right]\mathbf{a}_y +$

$\left(\dfrac{3}{2} - 1\right)\mathbf{a}_z$

$= -3.5\mathbf{a}_x + 4.5\mathbf{a}_y + 0.5\mathbf{a}_z$

D1.2 已知一向量場為$\mathbf{W}=4x^2y\mathbf{a}_x-(7x+2z)\mathbf{a}_y+(4xy+2z^2)\mathbf{a}_z$。

(a)在點P(2，−3，4)時，場的大小若干？

(b)給予一單位向量，表示在P點時場的方向。

(c)在z軸的那幾點上，W的大小等於1？

解 (a)在P點時，

$$\mathbf{W}=4\times2^2\times(-3)\mathbf{a}_x-(7\times2+2\times4)\mathbf{a}_y+[4\times2\times(-3)+2\times4^2]\mathbf{a}_z$$

$$=-48\mathbf{a}_x-22\mathbf{a}_y+8\mathbf{a}_z$$

$\therefore |\mathbf{W}|=53.4$

(b)$$\frac{\mathbf{W}}{|\mathbf{W}|}=\frac{-48}{53.4}\mathbf{a}_x-\frac{22}{53.4}\mathbf{a}_y+\frac{8}{53.4}\mathbf{a}_z$$

$$=-0.899\mathbf{a}_x-0.412\mathbf{a}_y+0.150\mathbf{a}_z$$

(c)在z軸上：$x=y=0$ 時

$$\therefore \mathbf{W}=-2z\ \mathbf{a}_y+2z^2\mathbf{a}_z$$

$$\because |\mathbf{W}|=\sqrt{4z^2+4z^4}=1$$

$$\therefore\ 4z^4+4z^2=+1$$

解得 $z=\pm0.455$

D1.3 已知$\mathbf{F}=2\mathbf{a}_x-5\mathbf{a}_y-4\mathbf{a}_z$及$\mathbf{G}=3\mathbf{a}_x+5\mathbf{a}_y+2\mathbf{a}_z$試找出 (a)$\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}$；(b)F、G之間之夾角；(c)F在G上的投影長；(d)在G上F的向量投影．

解 (a)$\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}=(2\times3)+5(-5)+2(-4)=-27$

(b)$\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}=|\mathbf{F}||\mathbf{G}|\cos\theta$

$$-27=\sqrt{2^2+(-5)^2+(-4)^2}\times\sqrt{3^2+5^2+2^2}\ \cos\theta$$

$$-27=\sqrt{45}\times\sqrt{38}\cos\theta$$

$$\cos\theta = -0.653$$

$$\therefore \quad \theta = 130.8^\circ$$

(c) F在G上的投影長爲 $|\mathbf{F}||\cos\theta| = 4.38$

(d)先求 $\mathbf{a}_G = \dfrac{1}{\sqrt{38}}(3\,\mathbf{a}_x + 5\,\mathbf{a}_y + 2\,\mathbf{a}_z)$

F在G上的投影向量爲：

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{a}_G = -2.13\,\mathbf{a}_x - 3.55\,\mathbf{a}_y - 1.42\,\mathbf{a}_z$$

D1.4 若 $\mathbf{F} = -45\mathbf{a}_x + 70\mathbf{a}_y + 25\mathbf{a}_z$ 及 $\mathbf{G} = 4\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$，找出 (a) $\mathbf{F}\times\mathbf{G}$；(b) $\mathbf{a}_x\times(\mathbf{a}_y\times\mathbf{F})$；(c) $(\mathbf{a}_x\times\mathbf{a}_y)\times\mathbf{F}$；(d) 垂直F及G的單位向量．

解 (a)

$$\mathbf{F}\times\mathbf{G} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ -45 & 70 & 25 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= [70\times2 - 25(-3)]\,\mathbf{a}_x + [25\times4 - (-45)\times2]\,\mathbf{a}_y + [(-45)(-3) - 4\times70]\,\mathbf{a}_z$$

$$= 215\mathbf{a}_x + 190\mathbf{a}_y - 145\mathbf{a}_z$$

(b)

$$\mathbf{a}_x\times(\mathbf{a}_y\times\mathbf{F}) = \mathbf{a}_x\times[\mathbf{a}_y\times(-45\mathbf{a}_x + 70\mathbf{a}_y + 25\mathbf{a}_z)]$$

$$= \mathbf{a}_x\times[-45(-\mathbf{a}_z) + 0 + 25\mathbf{a}_x]$$

$$= \mathbf{a}_x\times[25\mathbf{a}_x + 45\mathbf{a}_z]$$

$$= 0 + 45(-\mathbf{a}_y)$$

$$= -45\mathbf{a}_y$$

(c)

$$(\mathbf{a}_x\times\mathbf{a}_y)\times\mathbf{F} = \mathbf{a}_z\times\mathbf{F} = \mathbf{a}_z\times(-45\mathbf{a}_x + 70\mathbf{a}_y + 25\mathbf{a}_z)$$

$$= -45(\mathbf{a}_y) + 70(-\mathbf{a}_x)$$

$$= -70\mathbf{a}_x - 45\mathbf{a}_y$$

(d) $\mathbf{F}\times\mathbf{G}$爲垂直$\mathbf{F}$，$\mathbf{G}$之一向量

$$\therefore \text{單位向量可爲} \pm\frac{\mathbf{F}\times\mathbf{G}}{|\mathbf{F}\times\mathbf{G}|} = \pm\frac{215\mathbf{a}_x+190\mathbf{a}_y-145\,\mathbf{a}_z}{\sqrt{(215^2+190^2+(-145)^2}}$$

$$= \pm(0.669\mathbf{a}_x + 0.591\mathbf{a}_y - 0.451\mathbf{a}_z)$$

D1.5 已知P（$\rho=6$，$\phi=125^\circ$，$z=-3$）及Q（$x=3$，$y=-1$，$z=4$）找出距離從：(a)P到原點；(b)Q垂直地到z軸；(c)P到Q

解 (a) P到原點距離$=\sqrt{\rho^2+z^2}$

$$=\sqrt{6^2+(-3)^2}$$

$$=6.71$$

(b) z軸：（0，0，z）

$$\therefore \text{Q到z軸距離} = \sqrt{3^2+(-1)^2+0^2}$$

$$=\sqrt{10}$$

$$=3.16$$

(c)將P化爲直角座標

$$x=\rho\cos\theta = 6\cos 125^\circ$$

$$=-3.44$$

$$y=\rho\sin\theta = 6\sin 125^\circ$$

$$=4.91$$

$$z=-3$$

$$\therefore PQ\text{距離} = \sqrt{[3-(-3.44)]^2 + [(-1)-(4.91)] + [4-(-3)]^2}$$

$$= 11.20$$

D1.6 (a)用圓柱座標表示溫度場$T = 240 + z^2 - 2xy$

(b)若密度爲$e^{-z^2}(2+\rho^3\cos^2\phi)$，找出在$P(-2,-5,1)$的密度。

解 (a) $T = 240 + z^2 - 2xy$

$$= 240 + z^2 - 2(\rho\cos\phi)(\rho\sin\phi)$$

$$= 240 + z^2 - \rho^2\sin 2\phi$$

(b) $P(-2,-5,1)$

$$\rho = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{-5}{-2} = \tan^{-1} 2.5$$

$$\therefore \text{在P點的密度} = e^{(-1^2)}\left[2 + \left(\sqrt{29}\right)^3\cos^2(\tan^{-1}2.5)\right]$$

$$= \frac{1}{e}(2 + 21.54)$$

$$= 8.66$$

D1.7 (a)以圓柱座標表示向量場$\mathbf{w} = (x-y)\mathbf{a}_y$

(b)若$\mathbf{F} = \rho\cos\phi\,\mathbf{a}_\rho$，以直角座標表示場$\mathbf{F}$.

解 (a)$\mathbf{W} = (x-y)\mathbf{a}_y$

$$= (\rho\cos\phi - \rho\sin\phi)(\sin\phi\,\mathbf{a}_\rho + \cos\phi\,\mathbf{a}_\phi)$$

(b) $\mathbf{F} = \rho \cos\phi \, \mathbf{a}_\rho$

$$= \sqrt{x^2 + y^2} \cos \tan^{-1}\frac{y}{x} (\cos\phi \, \mathbf{a}_x + \sin\phi \, \mathbf{a}_y)$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2} \times \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathbf{a}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 y^2}} \mathbf{a}_y\right)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x \, \mathbf{a}_x + y \, \mathbf{a}_y)$$

D1.8 已知P($r = 6$，$\theta = 110°$，$\phi = 125°$)及Q($x = 3$，$y = -1$，$z = 4$)，找出這距離從：(a) Q到原點；(b) P到 $y = 0$ 的平面；(c) P到Q．

解 (a) $\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{26} = 5.10$

(b) P到 $y = 0$ 平面距離 $= 6 \sin\theta \sin\phi$

$$= 6 \times \sin 110° \times \sin 125°$$

$$= 4.62$$

(c) P 化爲直角座標得：

$$x = 6 \sin 110° \cos 125° = -3.23$$

$$y = 6 \sin 110° \sin 125° = 4.62$$

$$z = 6 \cos 110° = -2.05$$

∴ P，Q 距離

$$= \sqrt{[3-(3.23)]^2 + (-1-4.62)^2 + [4-(-2.05)]^2}$$

$$= 10.35$$

D1.9 (a)以球座標表示溫度場 $T = 240 + z^2 - 2xy$

(b)若密度是 $re^{-r/2}(5+\cos\theta+\sin\theta\cos\phi)$，找出P（$-2,-5,1$）的密度．

解 (a) $T=240+z^2-2xy$

$$=240+(r\cos\theta)^2-2(r\sin\theta\cos\phi)(r\sin\theta\sin\phi)$$

$$=240+r^2\cos^2\theta-2r^2\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi$$

$$=240+r^2(\cos^2\theta-\sin 2\phi\sin^2\theta)$$

(b)P（$-2,-5,1$）化爲球座標爲

$$r=\sqrt{(-2)^2+(-5)^2+1^2}=\sqrt{30}$$

$$\theta=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{30}}=1.387\,(\text{rad})$$

$$\phi=\tan^{-1}\frac{-5}{-2}=1.190\,(\text{rad})$$

在P的密度 $=\sqrt{30}\,e^{-\sqrt{30}/2}(5+\cos 1.387+\sin 1.387\cos 1.190)$

$$=\sqrt{30}\times 0.0648\,(5.5477)$$

$$=1.970$$

D1.10 (a)以球座標表示向量場 $\mathbf{W}=(x-y)\mathbf{a}_x$．

(b)若 $\mathbf{F}=r\cos\phi\,\mathbf{a}_r$，以直角座標表示 $\mathbf{F}$．

解 (a) $W_r=\mathbf{W}\cdot\mathbf{a}_r=(x-y)\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_r$

$$=(x-y)\sin\theta\cos\phi$$

$$=r\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)(\sin\theta\cos\phi)$$

$$W_\theta = \mathbf{W}\cdot\mathbf{a}_\theta = (x-y)\,\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\theta$$

$$= r\sin\theta\,(\cos\theta-\sin\theta)\cos\theta\cos\phi$$

$$W_\phi = \mathbf{W}\cdot\mathbf{a}_\phi = (x-y)\,\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{a}_\phi$$

$$= r\sin\theta\,(\cos\theta-\sin\theta)(-\sin\phi)$$

$$\therefore \mathbf{W} = r\sin\theta\,(\cos\phi-\sin\phi)\Big[\cos\phi\,(\sin\theta\,\mathbf{a}_r+\cos\theta\,\mathbf{a}_\theta) - \sin\phi\,\mathbf{a}_\phi\Big]$$

(b) $$F_x = \mathbf{F}\cdot\mathbf{a}_x = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\cos\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)\cdot(\sin\theta\cos\phi)$$

$$= \sqrt{x^2+y^2+z^2}\times\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\times\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\times\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$F_y = \mathbf{F}\cdot\mathbf{a}_y = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\times\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\;\mathbf{a}_r\cdot\mathbf{a}_y$$

$$= \sqrt{x^2+y^2+z^2}\times\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\times\sin\theta\sin\phi$$

$$= \sqrt{x^2+y^2+z^2}\times\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\times\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\times\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$F_z = \mathbf{F}\cdot\mathbf{a}_z = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\times\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\times\mathbf{a}_r\cdot\mathbf{a}_z$$

$$=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\times\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\times\cos\theta$$

$$=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\times\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\times\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$=\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\therefore \mathbf{F}=(x/\sqrt{x^2+y^2})(x\mathbf{a}_x+y\mathbf{a}_y+z\mathbf{a}_z)$$

習 題

1. 已知向量 $\mathbf{A}=-6\,\mathbf{a}_x+2\,\mathbf{a}_y-4\,\mathbf{a}_z$ 及 $\mathbf{B}=4\,\mathbf{a}_x+3\,\mathbf{a}_y-2\,\mathbf{a}_z$ 找出：(a) $\mathbf{A}+2\,\mathbf{B}$ 的單位向量；(b) $\mathbf{A}+2\,\mathbf{B}$ 的大小；(c)一向量 $\mathbf{C}$，使得 $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}=0$.

解 (a) $\mathbf{A}+2\,\mathbf{B}=(-6+2\times4)\,\mathbf{a}_x+(2+2\times3)\,\mathbf{a}_y+[-4+2\times(-2)]\,\mathbf{a}_z$

$$=2\,\mathbf{a}_x+8\,\mathbf{a}_y-8\,\mathbf{a}_z$$

$$|\mathbf{A}+2\mathbf{B}|=\sqrt{2^2+8^2+(-8)^2}=11.489$$

$\therefore$ 單位向量 $\mathbf{a}_{\overline{A}+2\overline{B}}=0.174\mathbf{a}_x+0.696\mathbf{a}_y-0.696\,\mathbf{a}_z$

(b)由(a)知 $|\mathbf{A}+2\,\mathbf{B}|=\sqrt{2^2+8^2+(-8)^2}=11.489$

(c) $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}=0\ \therefore\ \mathbf{C}=-(\mathbf{A}+\mathbf{B})$

$$=-\left[(-6+4)\,\mathbf{a}_x+(2+3)\,\mathbf{a}_y+(-4-2)\,\mathbf{a}_z\right]$$

$$=2\,\mathbf{a}_x+5\mathbf{a}_y-6\,\mathbf{a}_z$$

2. 三角形的三頂點落在A（−1，2，5），B（−4，−2，3）及C（1，3，−2）.(a)找出此三角形的周長；(b)找出一單位向量，從AB邊的中點指到BC邊的中點；(c)證明此向量乘一常數等於從A到C的向量，因此這單位向量平行AC邊.

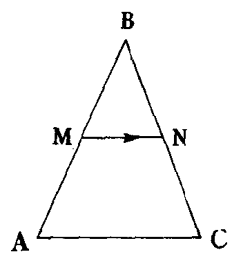
解 (a) AB 長 $=\sqrt{[-4-(-1)]^2+(-2-2)^2+(3-5)^2}=\sqrt{29}$

BC 長 $=\sqrt{[1-(-4)]^2+[3-(-2)]^2+(-2-3)^2}$

$=\sqrt{75}$

AC 長 $=\sqrt{[1-(-1)]^2+(3-2)^2+(-2-5)^2}=\sqrt{54}$

$\therefore$ 周長 $=\sqrt{29}+\sqrt{75}+\sqrt{54}=21.393$



(b) AB 中點M座標為 $\left(\frac{-1-4}{2}, \frac{2-2}{2}, \frac{5+3}{2}\right)$ A

$=(-2.5, 0, 4)$

BC 中點N座標為 $\left(\frac{1-4}{2}, \frac{3-2}{2}, \frac{-2+3}{2}\right)$

$=(-1.5, 0.5, 0.5)$

$\therefore \mathbf{MN}=\left[-1.5-(-2.5)\right]\mathbf{a}_x+(0.5-0)\mathbf{a}_y$

$+(0.5-4)\mathbf{a}_z$

$=\mathbf{a}_x+0.5\mathbf{a}_y-3.5\,\mathbf{a}_z$

$$\mathbf{a}_{MN} = \frac{1}{\sqrt{1^2+(0.5)^2+(-3.5)^2}}(\mathbf{a}_x + 0.5\mathbf{a}_y - 3.5\mathbf{a}_z)$$

$$= 0.272\mathbf{a}_x + 0.136\mathbf{a}_y - 0.953\mathbf{a}_z$$

(c) $\overrightarrow{AC} = [1-(-1)]\,\mathbf{a}_x + (3-2)\,\mathbf{a}_y + (-2-5)\,\mathbf{a}_z$

$= 2\,\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 7\,\mathbf{a}_z$

觀察 $\mathbf{a}_{MN}$ 及 $\overrightarrow{AC}$，可知 $2\sqrt{13.5} \times \mathbf{a}_{MN} = \overrightarrow{AC}$

$\therefore$ $\mathbf{a}_{MN}$ 平行 $\overrightarrow{AC}$

3. 向量 $\mathbf{A} = 4\,\mathbf{a}_x + 5\,\mathbf{a}_y - 2\,\mathbf{a}_z$ 及 $\mathbf{B} = 2\,\mathbf{a}_x + 8\,\mathbf{a}_y + 3\,\mathbf{a}_z$ 被表示成從原點向外延伸的具方向性線段：(a)他們的頂點距離；(b)找出 $\mathbf{A}$ 方向的單位向量；(c)找出一向量 $\mathbf{C}$ 平行 $\mathbf{A}$ 且等於 $\mathbf{B}$ 的長度．

解 (a) $\sqrt{(2-4)^2+(8-5)^2+[3-(-2)]^2} = \sqrt{38} = 6.164$

(b) $\mathbf{a}_A = \dfrac{1}{\sqrt{4^2+5^2+(-2)^2}}(4\,\mathbf{a}_x + 5\,\mathbf{a}_y - 2\,\mathbf{a}_z)$

$= 0.596\mathbf{a}_x + 0.745\mathbf{a}_y - 0.298\mathbf{a}_z$

(c) $|\mathbf{B}| = \sqrt{2^2+8^2+3^2} = \sqrt{77}$

$\therefore \mathbf{C} = \sqrt{77}\mathbf{a}_A = 5.230\,\mathbf{a}_x + 6.537\mathbf{a}_y - 2.615$

4. (a)找出 $\mathbf{B}$ 的分量

若 $|\mathbf{B}| = 2$ 及 $\mathbf{a}_B = 0.5\mathbf{a}_x - 0.4\mathbf{a}_y + n\,\mathbf{a}_z$，$\mathbf{a}_B$ 是 $\mathbf{B}$ 的單位向量，n 是大於 0 的純量．

(b)若 $\mathbf{C} = 8\,\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + C_z\,\mathbf{a}_z$ 決定 C_z 使得 $|\,C - \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z|$ 最小．

解 (a) $0.5^2+(-0.4)^2+n^2=1$

$\therefore n^2=0.59$

$n\ =0.769$

$\therefore B\ =2\ (\ 0.5a_x-0.4a_y+0.768a_z\ )$

$=a_x-0.8a_y+1.536a_z$

(b) $|\ C-a_x-a_y-a_z\ |=|\ 7a_x-4\ a_y+(\ C_z-1\ )a_z\ |$

$=\sqrt{7^2+(-4\ )^2+(\ C_z-1\ )^2}$

$=\sqrt{65+(\ C_z-1\ )^2}$

$\therefore\ C_z=1$ 時最小

5. 空氣的速度場爲 $v=5\ (\ xa_x+y\ a_y+z\ a_z\ )/(x^2+y^2+z^2+2)$ 在點P（－2，3，1），找出：(a)速度的大小；(b)一單位向量描述它的方向；(c)決定表面的方程式在這表面上速度大小等於1。

解 (a)在P點，$v=(\ -2\ a_x+3\ a_y+a_z\ )/\ [(-2\ )^2+3^2+1^2+2]$

$=-0.125a_x+0.1875a_y+0.0625a_z$

$\therefore$ 其大小爲：$\dfrac{\sqrt{(\ -2\ )^2+3^2+1^2}}{16}=0.234$

(b) $a_v=\dfrac{-0.125\,a_x+0.1875a_y+0.0625a_z}{\sqrt{(-0.125)^2+(\ 0.1875)^2+0.0625)^2}}$

$=-\ 0.5345\ a_x+0.8018\ a_y+0.2673a_z$

(c)速度大小等於1，亦即 $\dfrac{5\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2+2}=1$

此即爲它的表面方程式，爲一球方程式

6. 某向量場描述爲