[西德] H. 马可 著

系统理论方法

——频谱变换及其应用

冯锡钰 译

人民教育出版社

系 统 理 论 方 法

——频谱变换及其应用

[西德] H·马可 著
冯锡钰 译

人民教育出版社

内 容 简 介

本书是根据西德 Hans Marko 著 Methoden der Systemtheorie 1977 年版译出的。原书是作者多年在慕尼黑工业大学等校讲课的讲稿的基础上写成的。

本书前五章介绍了信号的频谱表示，频谱变换在线性时不变系统中的应用，频谱变换的定律及其在通信系统中的应用和物理意义。书中首次提出"广义频谱变换"的概念，把付氏变换和拉氏变换都包括进来，从而扩大了频谱表示的范围。接着讨论了希尔伯特变换及其在因果信号和解析信号中的应用。后四章介绍了离散系统分析的基本理论，即抽样理论、z 变换和有限信号的表示。还介绍了在考虑到初始状态情况下求解微分方程和差分方程方法的应用。第十章是附录，汇总了一些数学基础及详细的公式和表格。

本书可作为大专院校从事信息传输和信息处理教学和研究及有关科技人员的基础参考书。

系统理论方法

——频谱变换及其应用

［西德］H·马可 著

冯锡钰 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 11.5 字数 260,000

1981 年 12 月第 1 版 1982 年 12 月第 1 次印刷

印数 00,001—6,800

书号 15012·0383 定价 1.30 元

译 者 序

这本奉献给读者的《系统理论方法》一书是由西德慕尼黑工业大学通信技术教研室主任H·马可教授根据他多年讲课的讲稿写成的。我在他这里进修期间听了他讲授的"系统理论"课并阅读了他的这本书。这本书抓住了频谱变换这条主线，对系统理论的主要问题做了深入细致的阐述。对某些问题的阐述有其独到之处，例如，在本书中第一次提出了"广义频谱变换"的概念，它把付里叶变换和拉普拉斯变换统一起来。这本书确实是一本很有价值的教科书和参考书。这本书在西德是作为由马可教授主编的"通信技术"丛书的第一卷出版的，在西德流传很广。正因为如此，促使我决心把它翻译成了中文。

在马可教授的支持、关怀和大力帮助下，使这本书的翻译工作得以顺利地进行，并使这个中译本对于原书存在的一些错误和不当之处作了校正和修改。在此特向马可教授表示衷心的感谢。

在翻译过程中还一再得到周围的西德同事和朋友们的热心帮助，特别是与I·荷夫-阿勒菲斯先生(马可教授的助教)多次的讨论，对于本书的翻译提供了许多有价值的帮助，在此一并表示感谢。还要感谢我的朋友U·聂凝先生在我的翻译过程中经常给予德语知识方面的帮助和指导。

因此可以说，这个中译本是中德友谊的结晶。愿它能成为建造中德友谊大桥的一粒砂石。

由于本人的知识水平和德语能力所限，在翻译中难免有谬误之处，敬请广大读者提出批评指正。

承蒙何希哲同志对本书译稿做了认真仔细的校阅，并提出了宝贵的意见，特致以衷心的谢意。

译者

一九八一年一月于慕尼黑

为中译本写的序言

《系统理论方法》一书自从1977年出版以来，不仅在我们大学的通信技术专业的大学生们中间，而且还在外界有着令人喜悦的流传。现在，在我教研室的访问学者冯锡钰先生又把这本书译成中文。对此辛勤的工作谨向他表示感谢。

乘此翻译的机会我们对原书校正了一些错误和作了一些修订，对此我要感谢荷夫-阿勒菲斯先生和我的学生们所给予的建议。

我祝愿这本书在中国能受到欢迎。

H·马可

一九八一年一月于慕尼黑

敬献给

系统理论的创建者

——名誉博士K·屈浦缪勒教授

为“通信技术”丛书写的序言*

通信技术,或叫做信息技术,近几十年来一直在不断地发展,往往甚至是突飞猛进,而这种发展又是没有止境的。工艺的进步以及理论方法的改进，不仅扩展了已有的应用领域和更加适应于不断变化的要求,而且还开拓了新的应用领域。

信息处理已加入到信息传输和信息交换的典型任务的行列中，它以越来越大的规模改变着许多行业活动以及家庭生活的范畴。宇宙航行的需要和可能性也开辟了以不同方案实现宽带通信网的新的前景。除了模拟传输技术外又出现了数字传输技术,除了典型的文字、语言和图像的传输外又出现了数据传输。电子时分复用交换技术补充了空间多路信息交换。人造卫星和玻璃纤维技术提供了新的传输媒介。电子计算机的应用和数字电路技术使得通信技术的电路和系统的实现得到了重大的改进和扩展。

“通信技术”丛书应适应这种发展状况，并适时介绍通信技术中最重要的课题。这套丛书的每一卷都是由在相应领域中具有声望的专家撰写的。每本书应当介绍一定的领域，说明现代主要著名的成果，并建立起为进一步了解专业文献的桥梁。因此它不仅适合于大学生在各该领域入门学习中使用，而且还可作为从事工作的工程师或物理学者的基本读物或参考书。这套丛书的每一卷都是自成体系的，但又是互相补充的，因此一定的交叉是不可避免的，甚至是必需的。

这套丛书的现时计划将涉及到从方法理论,如网络理论、系统理论、调制、编码、信息论、逻辑电路、计算机辅助设计方法、模拟等等,直到各种应用领域,如遥控技术、语言传输、图像传输、数据传输、信息交换、光信息传输、数据处理、过程计算技术等等。当然，要实现这个计划是要花费一定的时间的。

我希望,这套丛书的计划,即以有声望的各位专家所写的专题论述的形式对通信技术的全部领域加以符合现实科学水平的介绍,将得到很多在大学、高等院校以及工业部门工作的朋友们的支持。对于这方面的建议随时都会受到欢迎。

在此感谢施普林格出版社在形成这套丛书中所给予的协助及对第一卷的悦目的装璜。

H·马可

一九七七年春于慕尼黑

* “通信技术”是由H·马可教授主编的一套通信技术丛书,本书是这套丛书的第一卷。——译者注

前 言

当今系统理论已成了在自然科学和工程技术中描述复杂因果关系的最重要的方法。它应用在通常可用线性常微分方程或偏微分方程描述的线性系统中。这种系统存在于大多数的应用场合中。或则，实际状况可以至少近似地归于这种线性系统。例如，在小信号控制下的一般的非线性系统可以近似为线性系统(小信号方法)。而在大信号控制时(大信号方法)，常常可以把总的系统用线性的局部系统和简单的非线性曲线加以近似。因此线性方法以及系统理论具有非常普遍的意义：它不只局限于通信技术(当然，通信技术一如既往是这种系统理论的主要应用领域)，而且还用于那些采用通信技术方法的有关学科，如测量技术、调整技术或者广义的控制论。

"系统理论"的概念是由 K·屈浦缪勒在 1949 年提出来的。这本奉献给他的书试图对从那时起发展起来的并且目前仍然通用的那些系统理论方法给出一个统一的形式。

这种系统理论方法的出发点是藉助于频谱变换，也就是用付里叶变换或拉普拉斯变换来运算地描述因果关系。这样可使系统不必考虑其特殊的内部结构，而用一个唯一的函数，即系统函数(频率特性)完全地描述出来。藉助于此函数可以处理任意的时间过程，诸如瞬变过程或平衡过程。由此可看出这种方法的适宜性和广泛的应用。算子运算法虽然早在 1894 年就由 O·海维赛德提出，并在 1909 年由 K·W·瓦格纳加以发展，但是只有由于频谱变换及其法则的不断应用，才使这种方法获得像今天这样普遍的意义。

因此本书主要是讨论频谱变换及其应用。它应使读者通晓各种当今通用的系统理论方法。为此，首先是藉助于频谱表示信号，也就是导致付里叶变换或拉普拉斯变换的谐波分析。然而付里叶变换和拉普拉斯变换都有一定的局限性和不同的应用范围。因此在这里第一次采用了广义频谱变换的概念，它包括了付里叶变换和拉普拉斯变换这两种方法，因而提供了扩充频谱表示的可能性。由于在系统理论应用中使用了电子计算机，采用离散时间信号描述是必要的。为此，本书接着介绍 z 变换、离散付里叶变换和有限信号描述的计算。所有这些变换的规律性的描述及其为解决信号传输、信号处理等问题的应用的可能性都应由系统理论加以说明。公式汇总及各种变换对的汇表都应便于应用所介绍的方法。

在第一章里讨论谐波分析的数学基础，即付里叶级数、付里叶积分、付里叶变换和拉普拉斯变换。第二章介绍新提出的广义频谱变换，这种变换建立了上述各方法之间的联系。通过应用正、负时段的两个复频率变量(p 和 q)使付里叶积分的表示范围大大扩展，以至使付里叶变换及拉普拉斯变换都包括在内。付里叶变换的频谱分布可以用这两个频率变量的有理函数表示，因此可以用函数论的方法来处理。

频谱变换在线性时不变系统中的应用是第三章的主题。在本章中研究系统的特性——作为频谱函数的系统函数(例如传输因数或复阻抗)和作为时间函数的冲激响应与阶跃响应。第四章

给出频谱变换的定律并同时讨论它们在通信系统中的应用和物理意义。在第五章中讨论希尔伯特变换及其在因果信号和解析信号中的应用。第六章的抽样理论及第七章的 z 变换是离散的信号表示的基础。最后，第八章将介绍有限的（离散时间和离散频率）信号表示，并指出矩阵计算的应用。

作为例子，在第九章中将介绍在考虑到初始状态情况下求解微分方程和差分方程方法的应用。作为附录的第十章包括了一些数学基础（分布理论和函数论）以及详细的公式和表格的汇编。这将使各种单独的方法之间能很容易地互相转换。

本书不仅适用于工科院校的大学生，而且也适用于从事这方面工作的专业人员。这本书是根据作者在卡尔斯鲁厄工业大学、斯图加特工业大学以及慕尼黑工业大学讲课的讲义写成的。阅读本书只需具有一定的数学基础知识，例如复数计算，微分和积分。在用到函数论或分布理论的结果时，这可在附录中查到。为了使读者更好地理解，在本书中用小字体附有例题和注释。本书着重于综合的描述，因此本书也可作为参考书，并且与公式和变换对汇编一起可作为今后工作的基础资料。

非常感谢我的助教W·沃夫工学士先生在完成本书的过程中始终不渝的合作以及多方面的编辑上的帮助，还应感谢I·阿斯曼夫人对手稿的誊写。感谢斯普林格出版社在整个过程中大大促进了这“通信技术”新丛书的第一卷的问世，并在有关排字、印刷和插图等方面也给予了卓有成效的关心。

H·马可

一九七七年夏于慕尼黑

符 号 表

t	连续时间变量
$t_0, T, \tau, \Delta t$	时间参量
$u(t)$	一般时间函数
$u_+(t), u_-(t)$	正时域及负时域的单边时间函数
$u_p(t), u_d(t), u_f(t)$	周期时间函数，离散时间函数，有限时间函数
$\{u(k\Delta t)\}$	就 z 变换而言的抽样时间函数
$\{u_k\}_N$	有限时间函数的基本序列
f, ω	实数连续频率变量
$f_0, \omega_0, \Delta f$	实频率参量
p, q, λ	复频率变量
z, z_p, z_q, z_i	z 变换的复变量
$U(f), U(p), U(\lambda)$	频谱函数
$U_F(f)$	付里叶频谱
$U_L(p)$	拉普拉斯频谱
$U(p, q), U(\lambda, \lambda)$	广义频谱
$U_+(p), U_-(q)$	广义频谱的部分频谱
	z 变换
$U_p(f), U_d(f), U_f(f)$	周期时间函数的频谱，离散时间函数的频谱，有限时间函数的频谱
$\{U_i\}_N$	有限频谱的基本序列
u, U, x, X, y, Y, s, S	向量（只在第 7, 8, 9 章中应用）
$a(\omega)$	衰减函数
$b(\omega)$	相移函数
$s(t)$	冲激响应
$\sigma(t)$	阶跃响应
$S(f), S(p), S(p, q), S(\lambda, \lambda)$	系统函数
$\mathscr{F}, \mathscr{F}^{-1}$	付里叶变换算符
$\mathscr{L}, \mathscr{L}^{-1}$	拉普拉斯变换算符
$\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$, $\circ\overset{F}{-\!\!-}\bullet$, $\circ\overset{L}{-\!\!-}\bullet$	变换对符号
F, F^{-1}	矩阵形式的离散付里叶变换
$f(x) * g(x)$	卷积
S^*	S 的共轭复变函数
Re, Im	实部、虚部
A, B	复数参量（只在第 1 章中应用）
$j=\sqrt{-1}$	虚数单位
$[f(p)]_{p=a}$	边界转换
$\delta(x), \delta'(x), \delta^{(n)}(x)$	狄拉克冲激函数及其导数
$\gamma(x)$	单位阶跃函数
$\mathrm{sgn}(x)$	周期变极函数 (Signum)

目　　录

符号表

1　时间函数和频谱……1

1.1　简谐振荡……1

1.2　付里叶级数……3

1.3　付里叶积分……9

1.4　付里叶变换……11

1.5　拉普拉斯变换……18

2　广义频谱变换……26

2.1　变换方程……27

2.2　反变换方法……32

2.3　信号的分类及其频谱的转换……39

2.4　按特征函数的展开定理……41

3　线性时不变系统……43

3.1　系统函数 $S(f)$……43

3.2　冲激响应 $s(t)$……46

3.3　阶跃响应 $\sigma(t)$……48

3.4　因果系统的例子……49

3.5　用集总时间定常的元件组成可实现的稳定线性传输系统的系统函数特性……51

3.6　非因果系统的例子……56

4　频谱变换的定律……58

4.1　加法定理……58

4.2　带有常因子的乘法……59

4.3　相似性定理……59

4.4　共轭复变函数定理……60

4.5　配置定理……61

4.6　交换定理……65

4.7　移动定理……66

4.8　微分定理……69

4.9　积分定理……72

4.10　卷积定理……74

4.11　帕色伐尔等式……84

4.12　持续时间与带宽互为倒数定律……85

5　希尔伯特变换……88

5.1　因果信号……88

5.2　最小相移系统和希尔伯特变换……93

5.3　解析信号……96

5.4　一般化的配置定理……98

6　抽样定理……99

6.1　时间函数的抽样定理……99

6.2　频谱函数的抽样定理……105

7　z 变换……107

7.1　离散时间信号和 z 变换……107

7.2　z 变换的变换特性和收敛性……111

7.3　z 反变换……114

7.4　z 变换的变换对和定律……115

7.5　离散冲激响应，z 系统函数及其通过递归或非递归时延滤波器的实现……116

8　有限信号……120

8.1　时间函数和频谱的离散表示……120

8.2　有限信号的 z 变换……122

8.3　冲激序列响应和循环卷积……123

8.4　向量表示法……125

9　通过微分方程和差分方程描述系统……130

9.1　常系数线性微分方程的解……130

9.1.1　广义频谱变换(或付里叶变换)的方法……130

9.1.2　拉普拉斯变换的方法……132

9.2　线性差分方程的解……137

10　附录……140

10.1　狄拉克冲激与其导数——分布……140

10.2　约当辅助定理……144

10.3　留数定理……144

10.4　频谱变换公式……146

10.5　希尔伯特变换公式……148

10.6　z 变换公式……149

10.7　有限信号公式……151

10.8　付里叶级数表……152

10.9　拉普拉斯变换和单边 z 变换表……157

10.10　有函数曲线图的拉普拉斯变换、付里叶变换以及希尔伯特变换表……163

参考文献……172

1 时间函数和频谱

谐波分析可以用简谐振荡之和，也就是用频谱来表示任意的时间函数。就系统理论而言，这种时间函数的频谱表示法是线性系统分析和综合的基础。在这第一章里要推导出时间函数与频谱之间的关系。从简谐振荡的角度出发，周期性时间函数的频谱表示是利用付里叶级数来描写的。据此再推导出表示单次过程的频谱的付里叶积分。在此基础上导出拉普拉斯变换和付里叶变换这两个通用的方法，并讨论表示它们的可能性。这两种方法所能表示的函数的范围都在不同程度上受到限制。因此在第二章里将定义和描写一个可以包括这两种方法的广义频谱变换。

在这一章的许多地方，出于表示的原因，复数参量特别用粗体印刷来表示(例如 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{u}(t)$ 等等)。而在本书的以后各章就不这样表示了，只要从公式或定义可看清楚参量的类型(实数或虚数)就行。

以下用小写字母 u 表示时间函数，用 大写字母 U 表示所对应的频谱。u 在这里可以表示电压、电流、声压或其它与时间有关的物理量。

对于频谱的标记方法要注意，作为频率变量可选用频率 f、角频率 $\omega=2\pi f$ 以及在本书后面章节所使用的复频率 $\lambda=\alpha+\mathrm{j}\omega$ 或 $p=\alpha+\mathrm{j}\omega$。在这种代换时，频谱中新的变量是直接给出的，例如已知 $U(f)$，则可直接写为 $U(\omega)$，而不是写成 $U(\omega/2\pi)$。用上述代换，则 $U(f)=U(\omega)=U(\lambda)$，它应理解为被代换的是 $\lambda=\mathrm{j}\omega=\mathrm{j}2\pi f$，而不是——像从形式上得出的——$f=\omega=\lambda$。

1.1 简谐振荡

简谐振荡是频谱表示法及复数运算的基础，因此我们首先来讨论它。一个具有任意频率、幅度和相位的正弦振荡可以用两种不同的方法来描述，即一种是实数形式

$$\boldsymbol{u}(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t, \tag{1.1}$$

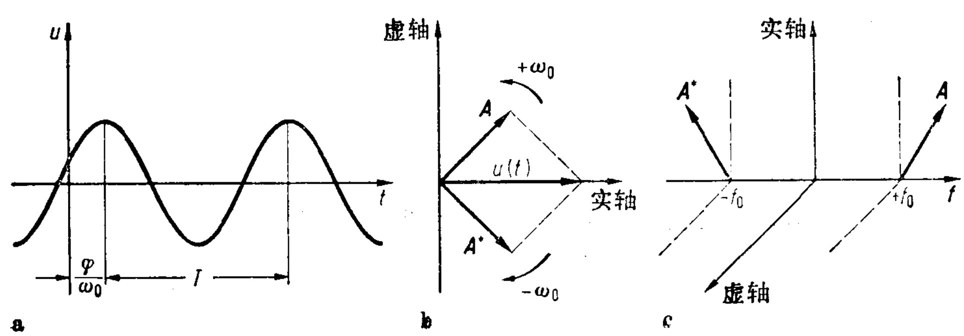

图 1.1 简谐振荡的表示形式。
(a) 实数表示；(b) 复数表示；(c) 频谱表示

$$u(t)=C\cos(\omega_0 t-\varphi) \tag{1.2}$$

另一种是复数形式

$$u(t)=\frac{C}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}+\frac{C}{2}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}. \tag{1.3}$$

首先让我们来研究两个实数表示式(1.1)和(1.2)。图 1.1a 表示出时间过程。角频率 $\omega_0=2\pi f_0=\frac{2\pi}{T}$ 是通过周期 T 给出的，第一个最大值的时间位移 $t_0=\varphi/\omega_0$ 是通过初相位角 φ 给出的。系数 A 和 B 与另一组系数 C 和 φ 可通过三角函数关系很容易互相换算。把式(1.2)按余弦函数的加法定律来展开，则得到

$$u(t)=C\cos\omega_0 t\cos\varphi+C\sin\omega_0 t\sin\varphi.$$

将其与式(1.1)的系数加以比较，可直接得到

$$A=C\cos\varphi, \tag{1.4}$$

$$B=C\sin\varphi. \tag{1.5}$$

然而，如果系数 A 和 B 为已知，则可通过求解式(1.4)和(1.5)来计算出参数 C 和 φ。为此，将这两个等式分别平方后相加，因此得到

$$C=\sqrt{A^2+B^2}. \tag{1.6}$$

如组成(1.5)/(1.4)的关系并求解 φ，则得到

$$\varphi=\arctan\frac{B}{A}. \tag{1.7}$$

就是说两个实数表示式(1.1)和(1.2)是等效的，并且可以通过它们的系数换算相互转换。

借助于欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}ax}=\cos ax+\mathrm{j}\sin ax \tag{1.8}$$

可以获得式(1.3)的复数表示。在这里如用 $-x$ 代替 x，并考虑到三角关系

$$\cos(-ax)=\cos(ax),\quad \sin(-ax)=-\sin(ax),$$

则由式(1.8)导出

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}ax}=\cos ax-\mathrm{j}\sin ax.$$

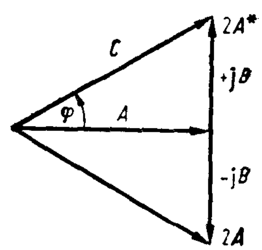

图 1.2 系数的换算

将此式与式(1.8)相加或相减，则得到

$$\cos ax=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}ax}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}ax}), \tag{1.9}$$

$$\sin ax=\frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}ax}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}ax}). \tag{1.10}$$

把式(1.9)代入到式(1.2)可直接得到式(1.3)。现在我们引入复数系数

$$\boldsymbol{A}=\frac{C}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}=\frac{1}{2}(A-\mathrm{j}B), \tag{1.11}$$

$$\boldsymbol{A}^*=\frac{C}{2}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\varphi}=\frac{1}{2}(A+\mathrm{j}B) \tag{1.12}$$

以此将式(1.3)简写为

$$u(t)=\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}+\boldsymbol{A}^*\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}. \tag{1.13}$$

如式(1.11)和(1.12)所示,复数系数 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^*$——我们称之为复振幅——互为共轭复数。它们可以由实系数对 A 和 B 或实系数对 C 和 φ 完全确定。由式(1.4)至(1.7),(1.11)和(1.12)所给出的所有系数之间的换算可以由图 1.2 所示的矢量图清楚地表明。如 $B=0$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^*=A/2$ 变为实数,因而在这种情形下只涉及一个纯余弦函数。反之,如 $A=0$,从而 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}^*=-\mathrm{j}B/2$ 变为纯虚数,这时只有一个纯正弦函数。

在式(1.13)中实数的时间函数 $u(t)$ 用两个复数时间函数 $\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$ 和 $\boldsymbol{A}^*\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}$ 的和来描写。每个复数时间函数可用在 $\mathrm{j}\omega$ 复平面上的一个旋转矢量表示,如图 1.1b 所示。矢量 $\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$ 以角速度 $+\omega_0$ 正向旋转,而矢量 $\boldsymbol{A}^*\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}$ 以同样大小、但是以角速度为 $-\omega_0$ 负向旋转。因为这两个矢量在所有的时间值 t 都互相呈共轭复数,所以按式(1.13)它们的和始终都是实数,并等于实数时间函数的瞬时值 $u(t)$。

在复数表示中,角频率 ω_0——因而频率 $f_0=\omega_0/2\pi$ 也同样地——具有角速度的意义,这与在实数表示时频率被定义为周期的倒数不同。相应于式(1.13)的两个相反旋转的矢量,一个正弦振荡具有两个频率:一个是正频率($+f_0$),另一个是负频率($-f_0$),它们的数值是相等的。这表示在图 1.1c 的"频谱"表示中,在这种表示中绘出了两个复振幅 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^*$ 与频率的关系。(为了能用实数值表示复数量,可选择一个三度坐标系统。)因此负频率与正频率同样是有意义的,它表示一个就数学上负的意义而言的复数振荡的旋转。以下的频率概念全应理解为这种意义。

时间函数 $u(t)$ 通过复振幅 $\boldsymbol{A}$ 和频率 f_0 的数据即可完全地描述出来。因此图 1.1 中的三种表示法完全是等效的。现在可能有人会问,为什么要应用复数表示法,因为这种方法与实数表示法相比似乎并无明显的简化。它的用处是适合于复数计算——也称之为符号法。在复数计算中用复数时间函数 $\boldsymbol{u}(t)$ 来代替上述实数函数 $u(t)$,其中

$$\boldsymbol{u}(t)=C\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}=2\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} \tag{1.14}$$

于是由式(1.3)或(1.13)得到

$$u(t)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{u}^*(t))=\mathrm{Re}\,\boldsymbol{u}(t). \tag{1.15}$$

这时用复数时间函数 $\boldsymbol{u}(t)$ 来计算,大多比用原来的实数函数 $u(t)$ 计算来得容易。其原因是指数函数的微分或积分仍是指数函数,因而对这种运算全都是不变的。因为线性网络是由微分和积分的电路元件组成的,因此可以用线性微分方程来描述,所以当网络在一个形式为式(1.14)的强制力作为激励函数的作用下,将出现一个形式相同的响应(即稳态解)。如果知道这个解,就可以得到相应于式(1.13)第二部分的共轭复数函数的解,即简单地用 $-\omega_0$ 来代替 ω_0。因为结果是对第一部分呈共轭复数,并且符合叠加原理,所以式(1.15)的形式对于响应函数也是有效的。因此简单地通过求实部,即可从复数计算函数得到所求的实数时间函数。

1.2 付里叶级数

周期性时间函数可以用正弦振荡和余弦振荡的三角级数之和表示。例如,对于如图 1.3a 所

示的周期性时间函数 $u(t)$，其级数（n 为正整数）为

$$u_R(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos n\omega_0t+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin n\omega_0t. \tag{1.16}$$

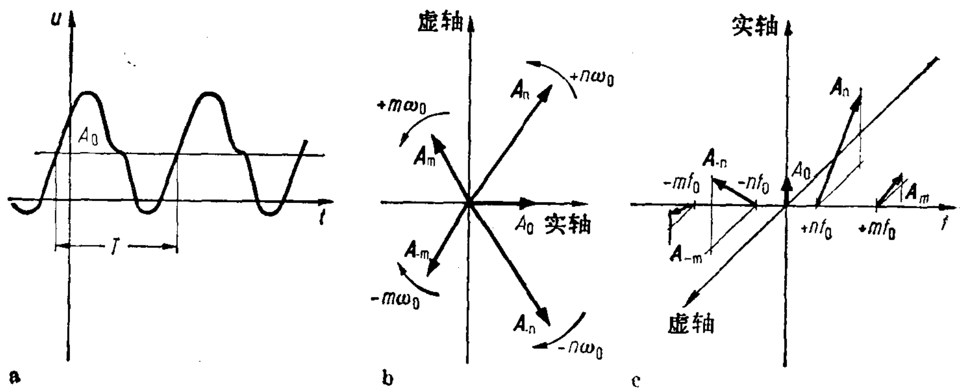

图 1.3　付里叶级数的表示形式。

(a) 实数表示；(b) 复数表示；(c) 频谱表示

这里，基频仍是由时间函数 $u(t)$ 的周期 T 给出，即

$$\omega_0=2\pi f_0=\frac{2\pi}{T}. \tag{1.17}$$

除了由 A_0 给出的直流项和具有系数 A_1 和 B_1 的基频 f_0 项外，现在我们来求基频的全部整数倍项，例如系数为 A_3 和 B_3 的三倍频 $3f_0$ 项。

付里叶级数 $u_R(t)$ 与 $u(t)$ 的均方差——也称为平方误差——为

$$M^2=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}(u(t)-u_R(t))^2\mathrm{d}t.$$

如 A_n 和 B_n 为付里叶系数，则当 $n\to\infty$ 时，M^2 趋于 0，因而 $u_R(t)\to u(t)$。为了由时间函数 $u(t)$ 来计算这些系数，可以利用简谐的正弦函数和余弦函数是"正交函数"的特性，即在正交时两个不相同的函数的"内乘积"为零。内乘积的意义为两个函数乘积在一个周期的定积分。由此可以很容易地得到，

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\cos n\omega_0t\cos m\omega_0t\,\mathrm{d}t=0,$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\cos n\omega_0t\sin m\omega_0t\,\mathrm{d}t=0,$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\sin n\omega_0t\sin m\omega_0t\,\mathrm{d}t=0$$

这里 $m\neq n$，并且 m、n 皆为整数。反之，如果取 $m=n$，则第一个积分值和第三个积分值为 $\frac{1}{2}$（即所谓的组成两个相同函数内乘积的标准），而第二个积分值仍为零。根据这个正交特性可以确定系数 A_n 和 B_n，即用 $\cos n\omega_0t$ 或 $\sin n\omega_0t$ 乘 $u(t)$ 并在一个周期内积分，则得到

$$A_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}u(t)\mathrm{d}t, \tag{1.18}$$

$$A_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}u(t)\cos n\omega_0 t\,\mathrm{d}t, \tag{1.19}$$

$$B_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}u(t)\sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t. \tag{1.20}$$

直流项 A_0 是在一个周期内的时间平均值。[积分式(1.18)至(1.20)中的积分路线必须取一个周期。也可以用一般的积分限 (t_0) 和 (t_0+T) 来代替积分限 $-T/2$ 和 $+T/2$，其中 t_0 可以任意选择。]

为了式(1.18)至(1.20)是可解的，$u(t)$ 在积分范围内必须是逐段连续的，而在不连续处 t_n 的左边和右边的极限值必须是可定义的。付里叶级数的和 $u_{\mathrm{R}}(t)$，在 $u(t)$ 是连续的地方其收敛值为 $u(t)$，而在不连续处 t_n 其收敛值为

$$u_{\mathrm{R}}(t_n)=\frac{u(t_n-0)+u(t_n+0)}{2}.$$

此外，虽然函数 $u_{\mathrm{R}}(t)$ 收敛于原来函数 $u(t)$ 的平均值，在不连续处 t_n 的邻域内却呈现一个绝对偏差，这将在后面的例题中加以讨论。

相应于式(1.2)我们也可以把付里叶级数写成下列形式

$$u_{\mathrm{R}}(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos(n\omega_0 t-\varphi_n) \tag{1.21}$$

每个频率所对应的系数 C_n 和 φ_n 可利用式(1.4)至(1.7) 与系数 A_n 和 B_n 相联系。现在显然可把付里叶级数写为类似于式(1.13)的复数形式。如果把式(1.21)的每一余弦振荡都按式(1.13)表示成复数形式，则得到

$$u_{\mathrm{R}}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{A}_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}. \tag{1.22}$$

因为在式(1.22)中的参数 n 可以是全部的正、负整数，所以在这个表示方法中负频率也被考虑进来了。在这里相同(正的和负的)频率的复振幅必须是共轭复数的：

$$\boldsymbol{A}_{-n}=\boldsymbol{A}_n^*. \tag{1.23}$$

当 $n=0$ 时得到(实数的)直流项 A_0。此外，换算式(1.11)和(1.12)适用于系数 A_n、B_n 和 C_n、φ_n 之间的关系。据此，当 $n>0$ 时则

$$\boldsymbol{A}_n=\frac{1}{2}(A_n-\mathrm{j}B_n),\ \boldsymbol{A}_{-n}=\frac{1}{2}(A_n+\mathrm{j}B_n). \tag{1.24}$$

如果把系数公式(1.19)和(1.20)代入上式，则得到

$$\boldsymbol{A}_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}u(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t \tag{1.25}$$

利用欧拉公式(1.8)可知，对每一频率此式包括了余弦项和正弦项。式(1.25)适用于$n\gtreqless 0$的情况，也适用于$n=0$的情况，因此包括了式(1.18)。

这样，根据式(1.22)和(1.25)写的付里叶级数的复数形式是最简短的表示方法。对应于图1.1b，图1.3b在复平面上表示出式(1.22)的"旋转矢量"。现在这里有很多旋转矢量，其角速度是ω_0的整数倍。每两个矢量具有方向相反的大小相等的角速度和共轭的复振幅，所以它们的和始终是实数。

凭借这种表示法，我们可以很容易用图解说明系数公式(1.25)的作用方式。$u(t)$和$e^{-jn\omega_0 t}$相乘即相应于图1.3b中所有的矢量附加角速度$(-n\omega_0)$作旋转。在这里唯一具有角频率$(+n\omega_0)$的矢量处于静止，而所有其它的矢量继续旋转，尽管其角速度已改变了。因此对一个周期的积分只由具有振幅A_n的矢量来确定，因为其它的矢量在积分区间可以取全部可能的相位值，因而积分值为零。最后，图1.3c示出了时间函数的频谱表示，其复数系数A_n绘于频率f上。它们出现在基频f_0的正、负倍频上。图1.3中的三种表示法仍是等效的，它们完全地描述了所要表示的时间函数。

复数形式的付里叶级数也可归于具有升幂和降幂的幂级数，即所谓的罗朗级数。这就是

$$y(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n x^n,$$

其中n为整数。级数的系数A_n是由在$y(x)$的收敛域内对闭合积分路线的积分来计算的：

$$A_n=\frac{1}{2\pi j}\oint\frac{y(x)}{x^{n+1}}dx.$$

利用代换

$$x=e^{j\omega_0 t},\quad \frac{dx}{x^{n+1}}=\frac{e^{j\omega_0 t}j\omega_0 dt}{e^{j\omega_0 t(n+1)}}=j\omega_0 e^{-jn\omega_0 t}dt$$

由式(1.22)得到复数形式的付里叶级数并由式(1.25)得到其系数：

$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{jn\omega_0 t},$$

$$A_n=\frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} y(t)e^{-jn\omega_0 t}dt.$$

如果事先选定闭合积分路线为单位圆，则$\omega_0 t$必须为，例如从$-\pi$一直增到$+\pi$。这就是说，积分界限为$-\pi/\omega_0$和$+\pi/\omega_0$值所代替。在考虑到式(1.17)时，这仍相当于时间界限$-T/2$和$+T/2$。

图1.4表示出付里叶级数的几个特别的性质。如果$u(t)$是时间偶函数，即$u(t)=u(-t)$，则在实数表示式中的正弦项必为零，因为正弦函数是奇函数。这样一来，付里叶级数只包含有偶数的余弦函数项。同样，对于时间奇函数，即$u(t)=-u(-t)$，相应的付里叶级数就只包含有正弦项。还有一个特别的情况，就是时间函数呈现对称性质，即$u(t)=-u(t+T/2)$。这时付里叶级数只包含有基频的奇次谐波项。

如前面所提及的，不连续的时间函数也可利用付里叶级数来表示。作为例子，将在下面讨论矩形振荡展开为付里叶级数。还有其它一些常用的时间函数的例子收集在第十章里。