电子测量仪器

朱晓斌　编

陈其纯　主审

電子工業出版社

内容简介

本书为职业学校实用电子技术类专业系列教材之一。

本教材参考教学总时数为96学时，其中实验课28学时。全书共十章，包括：电子测量的基本知识，万用电表，元件参数测量仪器，电子电压表，信号发生器，电子示波器，频率和时间测量仪器，失真度、调制度及频率特性测量仪器，半导体器件测量仪器，常用电子测量仪器的检修。

本书注重职业教育特点，力求通俗易懂，避免复杂公式推导，突出应用。为便于教学及加强学生技能训练，书中编排了一定量的习题和实验。

本书适用于城市和乡村职业学校的实用电子技术类专业作为专业课教材，也可作为培训军地两用人才及初级职业技术培训班教材使用，对于电子测量爱好者也可作自学读本。

电子测量仪器

朱晓斌　编

陈其纯　主审

责任编辑　王昌喜

*

电子工业出版社出版（北京市万寿路）

电子工业出版社发行　各地新华书店经销

人民卫生出版社印刷厂印刷

*

开本：787×1092毫米1/16　印张：15.375　插页：4　字数：355千字

1991年1月第1版　1991年1月第1次印刷

印数：8000册　定价：6.10元

ISBN7-5053-1121 2/TN·336

序　　言

人类接触电磁现象并开始研究它们至今已有千年以上的历史。但是在很长的一段历史时期内,电与磁被看做为互不相关的独立的物理现象,而且对它们的研究也未超出过定性的范围。对电磁现象进行定量研究、并使它成为一门重要的科学分支——电磁场理论(宏观电动力学) 还只是近一百多年来的事情。在这当中,英国学者麦克斯韦(J. C. Maxwell)做出了杰出的、不可磨灭的贡献。他在总结前人大量研究工作的基础上,创造性地提出位移电流概念,从而建立了宏观电磁场方程组——麦克斯韦方程组与光的电磁波学说。他的成就奠定了电磁场理论的研究基础,也开辟了人类认识电磁波并应用它来为人类服务的新纪元,这一理论意义重大并影响至今。

经过麦克斯韦以后一百年来的研究发展,今日的电磁场理论(电动力学) 已成为一门与自然科学、技术科学的许多分支互相渗透的交叉学科。这些分支的发展不断地向它提出新的研究课题、促进了它的发展; 反过来,电磁场理论的研究进展又不断地促进了这些分支学科的发展。因而电磁场理论已成为世界各国理工科大学生的一门必修基础课程。

在无线电电子学领域内,近代发展起来的新技术如雷达、通信、导航、遥感等无一不与电磁波的产生、辐射、传播、接收有关。电磁场理论作为微波技术与天线技术的理论基础在无线电技术领域内起着极其重要的作用。近代数学物理方法的进展、电子计算机技术的进步也使得这一学科的内容不断丰富和发展。

作为一门大学本科生的基础理论课,其内容的广度与深度都应适当。编者并不要求学完本门课程后就能独立地去解决将来工作中可能碰到的电磁场理论问题,而是为学习后续的有关专业课程打下必要的基础,也是为读者今后自学有关更深入电磁场理论著作提供一些必要的理论准备。

本教材在内容安排上,恒定场与时变场相比,时变场为重点;静电场与恒定磁场相比,静电场为重点。在静电场部分中,我们之所以专门安排了一章——静电场边值问题的解法,是因为这些解法中所介绍的概念、处理问题基本技巧,甚至方法本身对于时变场都是有效的。在电磁场边值问题的数值方法中,由于篇幅所限这里只介绍了有限差分与有限元法的基本概念与方法,作为了解这类方法的一个入门。

本书的一部分内容在目录中以*标注,可作为选修内容,由任课教师根据情况自行选择讲授。

学习本门课程应具备大学物理和高等数学中场论、数学物理方程与复变函数的基础知识。

由于作者水平有限,书中难免存在一些缺点甚至错误,欢迎广大读者与同行专家批评指正。

编　者

1988 年 4 月

目　　录

第一章　矢 量 分 析

本门课程的基本任务是研究电磁场作为一种物质形态的运动规律。众所周知，电磁场本质上是一种矢量场，其基本量 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{D},\boldsymbol{B},\boldsymbol{H}$ 都是矢量函数，研究电磁场运动规律的基本出发点是麦克斯韦方程组，而这一方程组正是矢量函数的微分方程组。因此在本门课程的学习中自始至终都要遇到矢量函数的代数运算、微分运算与积分运算。为了便于本门课程的学习，我们将矢量运算(包括代数运算、微分与积分)的基本规律以及与它密切相关的坐标系问题做一扼要的介绍，作为本门课程学习的前导。

§ 1.1　矢量及其代数运算

一、矢量与标量

矢量是既有大小又有方向的量，例如力、位移、速度等。在分析运算中常用大写的黑体字母如 $\boldsymbol{A}$ 来表示一个矢量，而它的大小即模则用符号 $|\boldsymbol{A}|$ 或 A 表示。

标量则是只有大小而无方向的量，例如质量、时间、温度等。

二、单位矢量与矢量的分量

单位矢量是长度为 1 的矢量，本书中以上方带有"∧"符号的字母表示，如 $\hat{a}$。显然 $|\hat{a}|=1$。由定义可知

$$\hat{a}=\boldsymbol{A}/A, \quad 或 \quad \boldsymbol{A}=A\hat{a} \tag{1-1}$$

在直角坐标系中有一组基本单位矢量 $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$，它们的方向与右手直角坐标系中 x,y,z 轴方向一致，见图 1-1。当然，也可以定义在其它正交坐标系中的基本单位矢量，这将在下面介绍。

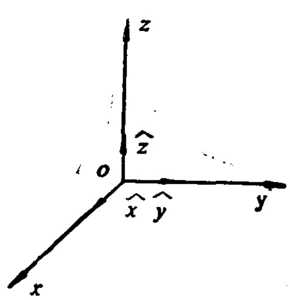

图　1-1

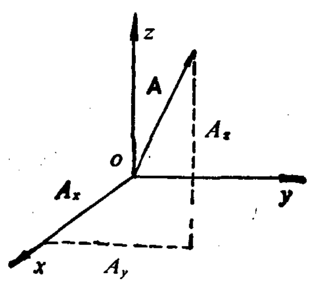

图　1-2

三维空间中任何矢量 $\boldsymbol{A}$ 都可以在一直角坐标系中用起自原点 o 的矢量来表示，见图 1-2。设起点为 o 的矢量 $\boldsymbol{A}$ 的终点坐标是 (A_x, A_y, A_z)，则有

$$A = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z} \tag{1-2}$$

式中 A_x, A_y, A_z 就是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 x, y, z 方向的分量。显然

$$A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} \tag{1-3}$$

三、位置矢量

设空间中有一点 P，它的位置在所选择的坐标系下可以用一从原点出发的矢量 $\boldsymbol{r}$ 来表示，矢量 $\boldsymbol{r}$ 就叫做点 P 的位置矢量，见图 1-3。显然 $\boldsymbol{r}$ 的分量就是点 P 的坐标值 (x, y, z)，即

$$\boldsymbol{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \tag{1-4}$$

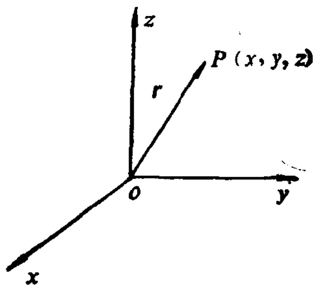

图 1-3

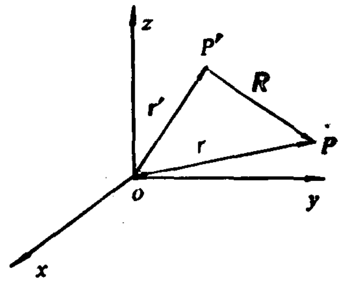

图 1-4

类似地，如另有一点 $P'(x', y', z')$，则它的位置也可用一位置矢量 $\boldsymbol{r}' = x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}$ 来表示。依此推论，点 P 相对于点 P' 的位置也可用从 P' 到 P 点的矢量 $\boldsymbol{R}$ 来表示（见图1-4），矢量 $\boldsymbol{R}$ 称为点 P 相对于点 P' 的相对位置矢量。显然，$\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}$，所以

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' \tag{1-5}$$

或

$$\boldsymbol{R} = (x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z} \tag{1-6}$$

$$R^2 = [(x - x')^2 - (y - y')^2 + (z - z')^2] \tag{1-7}$$

四、矢量函数的代数运算规则

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 都是矢量函数，则有

1) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$ (1-8)

2) $\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$ (1-9)

3) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = AB\cos\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ (1-10)

4) $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}$ (1-11)

5) $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = AB\sin\theta\,\hat{u}$ （$\hat{u}$ 是垂直 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 所在平面的单位矢量） (1-12)

6) $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$ (1-13)

7) $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}$ (1-14)

8) 若 $\boldsymbol{A} = A_1\hat{u}_1 + A_2\hat{u}_2 + A_3\hat{u}_3$，　$\boldsymbol{B} = B_1\hat{u}_1 + B_2\hat{u}_2 + B_3\hat{u}_3$，则

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \tag{1-15}$$

9) $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$ (1-16)

10) $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$ (1-17)

11) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\neq(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ (1-18)

12) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ (1-19)

以上的运算规则都已在矢量代数中证明过，这里不再重复。应当指出的是，上述运算规则与坐标系的选择无关，可称它为不变量。在这里扼要列出矢量的代数运算规则并不说明今后要进行很多代数运算，而是因为在引入微分算子"∇"后，矢量函数的许多微分运算规则可以从上面列出的代数运算规则直接导出。

§ 1.2 矢量函数的微分

我们所研究的电磁场在通常情况下是在一定空间内连续变化又随时间而改变的矢量场，因此在讨论中经常要遇到矢量函数对变量求导的问题。

一、矢量函数的偏导数

设矢量 $\boldsymbol{A}$ 是依赖于一个以上变量的矢量函数，如 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(x,\ y,\ z)$，如果下式右端的极限存在，就定义为 $\boldsymbol{A}$ 对于变量 x,y,z 的偏导数

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(x+\Delta x,y,z)-\boldsymbol{A}(x,y,z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(x,y+\Delta y,z)-\boldsymbol{A}(x,y,z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(x,y,z+\Delta z)-\boldsymbol{A}(x,y,z)}{\Delta z}$$

由于

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=A_x(x,y,z)\hat{x}+A_y(x,y,z)\hat{y}+A_z(x,y,z)\hat{z}$$

所以

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}=\frac{\partial A_x}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial A_y}{\partial x}\hat{y}+\frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{z}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y}=\frac{\partial A_x}{\partial y}\hat{x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial A_z}{\partial y}\hat{z}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z}=\frac{\partial A_x}{\partial z}\hat{x}+\frac{\partial A_y}{\partial z}\hat{y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\hat{z}$$

这样，矢量函数 $\boldsymbol{A}$ 的全微分 $d\boldsymbol{A}$ 就是

$$d\boldsymbol{A}=dA_x\hat{x}+dA_y\hat{y}+dA_z\hat{z}$$

而

$$dA_x=\frac{\partial A_x}{\partial x}dx+\frac{\partial A_x}{\partial y}dy+\frac{\partial A_x}{\partial z}dz$$

对 dA_y, dA_z 亦有类似的表达式，代入上式得

$$dA=\left\{\frac{\partial A_x}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial A_y}{\partial x}\hat{y}+\frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{z}\right\}dx+\left\{\frac{\partial A_x}{\partial y}\hat{x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial A_z}{\partial y}\hat{z}\right\}dy+\left\{\frac{\partial A_x}{\partial z}\hat{x}+\frac{\partial A_y}{\partial z}\hat{y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\hat{z}\right\}dz$$

$$=\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}dx+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y}dy+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z}dz \tag{1-20}$$

其形式与一标量函数 f 的全微分

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz \tag{1-21}$$

相类似。

二、梯度

尽管电磁场本质上是一矢量场，但在某些特定条件下亦可定义一标量函数作为辅助量或作为形式参量以简化问题。此时，标量函数 f 也是一多变量函数，它的全微分为

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

上式可以看做是两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $d\boldsymbol{r}$ 的点积，其中

$$\boldsymbol{A}=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{z} \tag{1-22}$$

$$d\boldsymbol{r}=dx\hat{x}+dy\hat{y}+dz\hat{z}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

定义矢量 $\boldsymbol{A}$ 为标量函数 f 的梯度，它的分量就是标量函数 f 随空间坐标方向的变化率，记为

$$\boldsymbol{A}=\mathrm{grad}f \tag{1-23}$$

三、散度

从场论知识可知，一矢量函数的曲面积分称为此矢量场穿过该曲面的通量 ϕ

$$\phi=\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{1-24}$$

现将 S 曲面取为闭合曲面，令此闭合曲面所包围的体积为 ΔV，当 $\Delta V\to 0$ 时，下面的极限存在：

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta V}=\mathrm{div}\boldsymbol{A} \tag{1-25}$$

则称此极限值为矢量函数 $\boldsymbol{A}$ 在该点的散度。从此定义出发可以证明，在直角坐标系中

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1-26}$$

四、旋度

根据场论中的定义，一矢量函数 $\boldsymbol{A}$ 的旋度仍为一矢量，它在某方向 $\hat{n}$ 上的投影，等于该矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿垂直于 $\hat{n}$ 的无限小面积 ΔS 的周线 c 的线积分（积分方向与 $\hat{n}$ 成右手关系）与 ΔS 的比值极

限，即

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_c \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}}{\Delta S}=(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})\cdot\hat{\boldsymbol{n}} \tag{1-27}$$

式中 rot $\boldsymbol{A}$ 称为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度。由此定义出发可以证明，在直角坐标系中

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix} \tag{1-28}$$

§ 1.3 矢量微分算子 ∇

一、微分算子∇的定义

在电磁场理论中会经常遇到上述的梯度、散度、旋度以及二阶微分的运算，这些运算虽不困难但都比较繁琐。为了简化运算，∇ 算子运算方法应运而生，它已成为场论分析中不可缺少的工具。∇ 算子运算法的优点在于可以把对矢量函数的微分运算转变成为矢量代数运算，从而明显地简化运算过程，并且推导简明扼要，易于掌握。

微分算子 ∇ 定义为一“符号”矢量，它在直角坐标系中的定义式为

$$\nabla=\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z} \tag{1-29}$$

并规定，它的各个分量可以象普通矢量的分量一样进行运算，而$\frac{\partial}{\partial x}$和标量函数 f 的乘积则理解为对 f 的偏微分，即$\frac{\partial f}{\partial x}$。

根据这样的定义和规定，上面所提到的梯度、散度和旋度就可以以一种更简洁方式来表示，因为

$$\nabla f=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)f=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)\cdot(A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z})=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)\times(A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z})=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

所以梯度、散度和旋度可以以微分算子 ∇ 表示成

$$\mathrm{grad}f=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}=\nabla f \tag{1-30}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\nabla\cdot\boldsymbol{A} \tag{1-31}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{1-32}$$

从以上的证明过程可以清楚地看出，∇ 算子确实把对矢量函数 $\boldsymbol{A}$ 的微分运算转变为矢量算子 ∇ 与矢量 $\boldsymbol{A}$ 的代数运算。

但是必须引起读者注意的是，算子 ∇ 在上述的定义与规定下可以将它看成一矢量来按照矢量代数规则进行运算，但它又不能完全将它与一普通矢量等同，因为 ∇ 的分量是微分算符而不是真实矢量的分量。这样，两个普通矢量代数运算的某些性质对 ∇ 就不成立。例如，普通矢量有 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$，但是 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{A}\cdot\nabla$；再如，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 中 $\boldsymbol{C}$ 矢量一定与矢量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 正交，即 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0$，但 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 在一般情况下与 $\boldsymbol{A}$ 并不正交，即 $\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}\neq 0$。这就说明，在运用 ∇ 算子进行运算时，除了上面所说的定义与规定外，还必须对包含有 ∇ 算子的算式做进一步的补充定义。

二、含有 ∇ 算子算式的定义与性质

对于任何一个含有 ∇ 算子并对 ∇ 为线性的算式 $T(\nabla)$，其定义如下：

$$T(\nabla)=\frac{\partial}{\partial x}T(\hat{x})+\frac{\partial}{\partial y}T(\hat{y})+\frac{\partial}{\partial z}T(\hat{z}) \tag{1-33}$$

式中 $T(\hat{x}),T(\hat{y}),T(\hat{z})$ 分别是在算式 $T(\nabla)$ 内将 ∇ 分别换为单位矢量 $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$ 的结果。

现举例对上式加以说明。

1) $T(\nabla)=\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$

2) $T(\nabla)=\nabla f=\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}f+\frac{\partial}{\partial y}\hat{y}f+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}f=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$

3) $T(\nabla)=\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial}{\partial x}(\hat{x}\cdot\boldsymbol{A})+\frac{\partial}{\partial y}(\hat{y}\cdot\boldsymbol{A})+\frac{\partial}{\partial z}(\hat{z}\cdot\boldsymbol{A})=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$

4) $T(\nabla)=\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{\partial}{\partial x}(\hat{x}\times\boldsymbol{A})+\frac{\partial}{\partial y}(\hat{y}\times\boldsymbol{A})+\frac{\partial}{\partial z}(\hat{z}\times\boldsymbol{A})$

$$=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{x}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{y}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

在算式 $T(\nabla)$ 中，如果有某些函数位于 ∇ 算子前面，那么在微分运算中这些函数应视为常数，不受微分影响。在上面定义中，所谓线性的算式 $T(\nabla)$，指的是若在 $T(\nabla)$ 中将 ∇ 换成两个矢量之和，即 $a_1\boldsymbol{P}_1+a_2\boldsymbol{P}_2$，其中 a_1 和 a_2 为常数，$\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 为任意两矢量，应有

$$T(a_1\boldsymbol{P}_1+a_2\boldsymbol{P}_2)=a_1T(\boldsymbol{P}_1)+a_2T(\boldsymbol{P}_2) \tag{1-34}$$

由上述对算式 $T(\nabla)$ 的定义可以导出 $T(\nabla)$ 的几个重要性质，这些性质是在 $T(\nabla)$ 运算时的理论依据。

性质一 对于任何 $T(\nabla)$，可以将 ∇ 看作普通矢量进行矢量代数的恒等变换，所得结果不变。但是在变换中不能将 ∇ 后面的函数搬到 ∇ 的前面（除非此函数被视为常数），而若把 ∇ 前面的函

数搬到∇的后面时应为此函数加注下标c,以示它被视为常数。

性质二 如果$T(\nabla)$算式中在∇的后面有两个函数相乘(包括数乘、点乘和叉乘),那么$T(\nabla)$可表示为两项之和,在一项中,前一函数视为常数,不受微分影响;而在另一项中,后一函数视为常数,不受微分影响。例如

$$\nabla\cdot(f\boldsymbol{A})=(\nabla\cdot f_c\boldsymbol{A})+(\nabla\cdot f\boldsymbol{A}_c)=f\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\nabla f\cdot\boldsymbol{A}$$

$$\nabla\times(f\boldsymbol{A})=(\nabla\times f_c\boldsymbol{A})+(\nabla\times f\boldsymbol{A}_c)=f\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla f\times\boldsymbol{A}$$

性质三 算式$T(\nabla)$在某定点p上的值与坐标系的选择无关,因此$T(\nabla)$可称为微分不变量。

有了以上对$T(\nabla)$的定义和性质,就可以利用矢量代数中的恒等关系导出含有∇算子的恒等式。例如,求$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$的展开式,根据性质二,应有

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\nabla\times(\boldsymbol{A}_c\times\boldsymbol{B})+\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}_c)$$

由矢量代数恒等式

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

可得

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}_c\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}_c)=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$$

代入得

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$$

三、二重∇算子

在电磁场理论中,除了上面所介绍的一重∇算子的算式$T(\nabla)$外,还经常碰到$\nabla\cdot\nabla f$, $\nabla\times\nabla\varphi$, $\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}$, $\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}$等二重算子的算式$T(\nabla,\nabla)$。对于这类包含有二重算子的算式$T(\nabla,\nabla)$其定义为

1) 先将其中一个∇看作固定矢量$\boldsymbol{P}$,其算式变为$T(\boldsymbol{P},\nabla)$,将它按一重算式处理,令所得结果为$T_1(\boldsymbol{P})$。

2) 再将$T_1(\boldsymbol{P})$中的$\boldsymbol{P}$换成∇,对$T_1(\nabla)$重复类似的处理所得的结果即为$T(\nabla,\nabla)$。

具体来说,就是

$$T_1(\boldsymbol{P})=T(\boldsymbol{P},\nabla)=\frac{\partial}{\partial x}T(\boldsymbol{P},\hat{x})+\frac{\partial}{\partial y}T(\boldsymbol{P},\hat{y})+\frac{\partial}{\partial z}T(\boldsymbol{P},\hat{z})$$

$$\begin{aligned}T(\nabla,\nabla)=T_1(\nabla)&=\frac{\partial}{\partial x}T_1(\hat{x})+\frac{\partial}{\partial y}T_1(\hat{y})+\frac{\partial}{\partial z}T_1(\hat{z})\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}T(\hat{x},\hat{x})+\frac{\partial}{\partial y}T(\hat{x},\hat{y})+\frac{\partial}{\partial z}T(\hat{x},\hat{z})\right\}\\&\quad+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial x}T(\hat{y},\hat{x})+\frac{\partial}{\partial y}T(\hat{y},\hat{y})+\frac{\partial}{\partial z}T(\hat{y},\hat{z})\right\}\\&\quad+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial}{\partial x}T(\hat{z},\hat{x})+\frac{\partial}{\partial y}T(\hat{z},\hat{y})+\frac{\partial}{\partial z}T(\hat{z},\hat{z})\right\}\end{aligned}$$