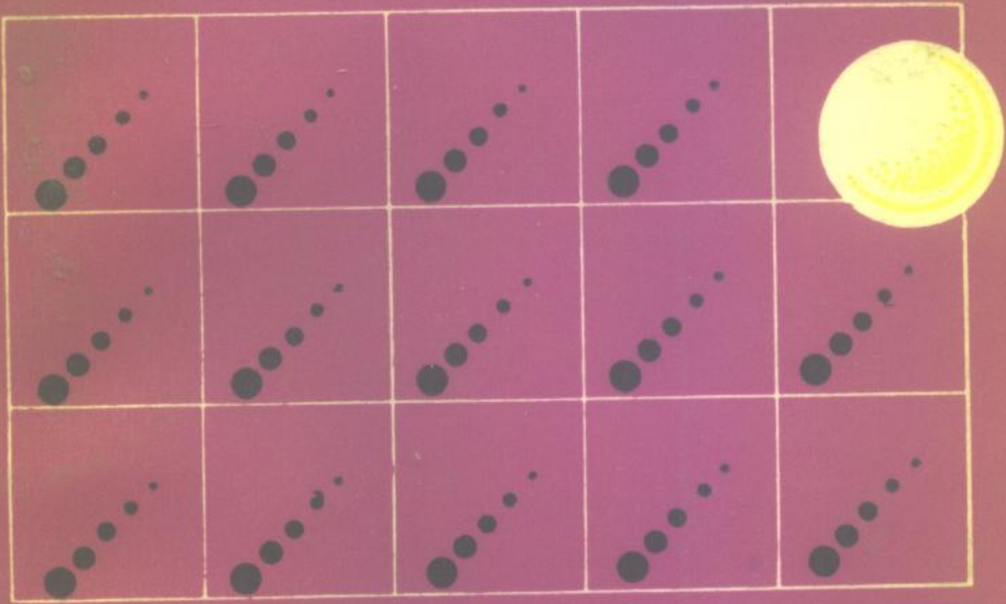

数学分析教程

（下册）

宋国柱 任福贤 许绍溥 姜东平

南京大学出版社

数学分析教程

·下册·

宋国柱　任福贤　许绍溥　姜东平

南京大学出版社

1992·南京

DZ/90/46

内容提要

本书是按照1980年理科数学分析教学大纲并结合南京大学的实际情况而编写的．全书概念准确，论证严谨，文字浅显易懂，便于自学．丰富多彩的例题以及多层次的习题大大加强了传统的分析技巧的训练，同时又注意适当引进近代分析的概念．本书可作为综合性大学、师范院校数学系各专业的教材，也可作为其他对数学要求较高的专业的教材或教学参考书，还可作为高等学校数学教师以及其他数学工作者参考用书以及硕士生报考者的复习用书．

全书分上下两册出版，上册共9章，包括极限理论，一元函数微积分，多元函数及其微分学．下册共10章，包括级数理论，傅里叶级数，反常积分与含参变量积分，线积分、面积分与重积分，囿变函数与RS积分，场论等．

数学分析教程

·下 册·

宋国柱 任福贤

许绍溥 姜东平

南京大学出版社出版

（南京大学校内）

江苏省新华书店发行 丹阳市新华印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 14.5 字数 386 千

1990年5月第1版 1992年10月第2次印刷

印数 1501—4500

ISBN 7-305-00790-0/O·46

定价 3.45元

目　　录

第10章　数项级数

第11章　函数序列和函数项级数

第12章　反常积分

第13章　含参变量积分

第14章 曲线积分

第15章 重积分

第16章 曲 面 积 分

第17章 各种积分的联系·场论

第18章 囿变函数和RS积分

第19章 傅里叶级数

第 10 章

数项级数

级数理论在数学分析以及其他的后继课程、实用学科中有着大量的应用，作为基础课的数学分析，将把级数理论分为三章（数项级数、函数项级数和傅里叶级数）系统地论述，本章首先讨论常数项级数。

§1　级数的敛散性及其性质

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是一个无穷数列，则表达式

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{10.1}$$

称为**无穷级数**，或简称**级数**。且常记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

其中 a_n 称为级数(10.1)的**通项**。级数(10.1)前 n 项之和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

称为级数(10.1)的（第 n 个）**部分和**。

例如，把等比数列

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \cdots,\ aq^n,\ \cdots \quad (a \neq 0) \tag{10.2}$$

各项依次相加可得数项级数

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots, \tag{10.3}$$

通常称(10.3)为**等比级数或几何级数**。它的部分和（$q \neq 1$时）

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}. \tag{10.4}$$

对于无穷级数(10.1)，由于它是无穷项之和，我们自然要问这

个无穷和表示什么数以及如何求这个无穷和数.

定义 若级数(10.1)的部分和数列$\{S_n\}$有极限,即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S\ (\text{有限})$$

则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$**收敛**于S,S称作此级数的**和**,记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

若$\{S_n\}$极限不存在(包括极限为∞),则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$**发散**.

由定义可知研究无穷级数收敛问题,实质上就是研究部分和数列$\{S_n\}$的收敛问题,反之,任取一数列$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$,则$\{x_n\}$的收敛问题就可以化为级数

$$x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) + \cdots$$

的收敛问题.

例1 讨论等比级数$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}\ (a \neq 0)$的敛散性.

解 等比级数部分和

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q},$$

故

(i) 当$|q|<1$时,$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$,$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$,级数收敛.

(ii) $q>1$时,显然有$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$;$q<-1$时,

$$S_n = \frac{a(1-(-1)^n|q|^n)}{1+|q|},$$

显然$\{S_n\}$是一个发散数列,故当$|q|>1$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$发散.

(iii) $q=1$时,$S_n = na \to \infty$;$q=-1$时,

$$S_n = \begin{cases} 0, & n=2k, \\ a, & n=2k+1. \end{cases}$$

故$|q|=1$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$也发散.

综上所述,当且仅当$|q|<1$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$收敛、且有和

$\frac{a}{1-q}$.

例 2 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性。

解 因为

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛，且其和为1。

由于级数与数列有密切联系，读者不难自行由数列的某些结果来证明关于级数的下述基本性质：

性质 1（级数收敛的柯西准则） 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充要条件是：任给 $\varepsilon>0$，存在某个自然数 N，使得当 $n>N$ 时，对一切自然数 p，都有

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon. \tag{10.5}$$

在 (10.5) 式中取 $p=1$，便得

性质 2（级数收敛的必要条件） 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则必有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

由性质 2 可以知道，如果 $\{a_n\}$ 不收敛或者 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 必发散，但 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 不一定收敛，即通项趋于零仅仅是级数收敛的必要条件，而不是充分条件．例如

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots,$$

因为

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$$

因此，虽然 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\to0(n\to\infty)$，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 却是发散的。

性质2 的实用价值在于当 a_n 不收敛于零时，便可断言级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，今后将用到这个性质。

性质 3 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，c 为任一常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ 都收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

性质 4 去掉、增加或改变级数的有限项并不改变级数的敛散性。

性质 5 收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 任意加括号后所得到的级数仍收敛，且其和不变。

证 设对收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 任意加括号后所得级数是

$$\begin{aligned}&(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots \\ &+ (a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots,\end{aligned} \tag{10.6}$$

我们令

$$\tilde{a}_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1},$$

$$\tilde{a}_2 = a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\tilde{a}_k = a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k},$$

$$\tilde{S}_k = \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \cdots + \tilde{a}_k,$$

则 $\tilde{S}_k = S_{n_k}$ 是收敛级数 $\{S_n\}$ 的一个子序列，故

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{S}_k = \lim_{n\to\infty} S_n. \quad \blacksquare$$

注 由性质 5 可知若级数 (10.6) 发散，则原级数 (10.1) 必发散，但如果 (10.6) 收敛时，去括号后不一定收敛．例如级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

收敛于零，但去括号后得一个发散级数

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots.$$

在一定条件下，若(10.6)收敛，则去括号后所得级数也收敛。例如当级数(10.6)中同一括号内各项符号相同时，则去括号所得的级数仍收敛。

事实上，由于当 n 从 n_{k-1} 变到 n_k 时，S_n 将单调地变化，其值在 $\tilde{S}_{k-1}=S_{n_{k-1}}$ 与 $\tilde{S}_k=S_{n_k}$ 之间，若记

$$\lim_{k\to\infty}\tilde{S}_k=\tilde{S},$$

则当 k 充分大时，$S_{n_{k-1}}$ 和 S_{n_k} 与 $\tilde{S}$ 可相差任意小，故

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\tilde{S}. \qquad \blacksquare$$

例 3 证明调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散。

证 （本例的另一种形式见第 1 章 3.4 段例 1），因为

$$\begin{aligned}|S_{n+p}-S_n| &= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\\ &> \underbrace{\frac{1}{n+p}+\frac{1}{n+p}+\cdots+\frac{1}{n+p}}_{p\text{ 项}}\\ &= \frac{p}{n+p},\end{aligned}$$

取 $p=n$，得

$$|S_{2n}-S_n|>\frac{1}{2},$$

于是据柯西收敛准则，立即知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散。

习　　题

1. 按定义证明下列级数收敛，并求其和：

(1) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$；

(2) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

2. 证明：若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1-a$。

3. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足条件：

(i) $\lim_{n\to\infty}u_n=0$；

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2k-1}+u_{2k})$ 收敛于 S，

试证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛于 S。

4. 利用 Cauchy 收敛准则讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{2^n}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$；

(3) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{3m+1}+\frac{1}{3m+2}-\frac{1}{3(m+1)}+\cdots$。

5. 举例说明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 对每一个自然数 p 满足条件

$$\lim_{n\to\infty}(u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p})=0,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 不一定收敛。

§2 正项级数敛散性

研究级数的收敛性不仅在理论上，而且在实用上（例如近似计算，解微分方程等）是非常有价值的，如果从定义出发（即求极限 $\lim_{n\to\infty}S_n$）或者应用柯西收敛准则往往是比较困难的，因此，必须寻求一些简单实用的判别法来研究级数的收敛性。

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 中的各项的符号都相同，则称它为同号级数，对于同号级数只须研究各项都是非负数组成的级数——称为**正项级数**.下面我们首先考虑正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n\geqslant 0,\ n=1,2,3,\cdots)$。

定理 10.1（基本定理） 正项级数收敛的充要条件是：部分和数列 $\{S_n\}$ 有界。

证 （必要性） 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\{S_n\}$ 必收敛，再根据收敛数列必有界知结论成立。

（充分性） 由于 $a_n\geqslant 0$，则 $\{S_n\}$ 是单调上升数列，从而当 $\{S_n\}$

有界时，$\{S_n\}$ 是单调有界数列，它必收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。 ▮

2.1 比较判别法

定理 10.2（比较判别法 I） 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数，且存在自然数 N，使得对一切 $n>N$ 都有

$$a_n \leqslant b_n,$$

则

1° 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛；

2° 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散。

证 1° 根据 § 1 基本性质 4，我们不妨设对一切自然数 n 有 $a_n \leqslant b_n$，记 $B=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$，则

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leqslant b_1 + b_2 + \cdots + b_n \leqslant B,$$

由定理 10.1 立即得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

2° 用反证法，设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，则由结论 1° 可推得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，这与假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散矛盾，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 必发散。 ▮

例 1 讨论 p- 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 的敛散性，其中 p 为任一实数。

解 (i) 当 $p\leqslant 1$ 时，因为 $\dfrac{1}{n^p} \geqslant \dfrac{1}{n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$发散，则据定理 10.2 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ $(p\leqslant 1)$ 也发散。

(ii) $p>1$ 时，将原级数按一项，二项，2^2 项，…，2^{k-1} 项括在一起，得

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)+\cdots, \quad (10.7)$$

记级数 (10.7) 的通项为$\tilde{a}_k$，其中

$$\tilde{a}_k=\frac{1}{(2^{k-1})^p}+\frac{1}{(2^{k-1}+1)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^k-1)^p},$$

级数 (10.7) 的前 k 项部分和为 $\tilde{S}_k$，则

$$\tilde{S}_k\leqslant 1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right)+\cdots$$

$$+\underbrace{\left[\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^p+\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^p+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^p\right]}_{2^{k-1}\text{ 项}}$$

$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{k-1}$$

$$\leqslant\frac{1}{1-\frac{1}{2^{p-1}}}=M. \qquad (k=1,2,\cdots)$$

令

$$S_n=1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$$

对任一 n，存在自然数 k_0，使

$$S_n\leqslant\tilde{S}_{k_0}\leqslant M,$$

从而据定理 10.1 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $(p>1)$ 收敛。

推论 1（比较判别法 I 的极限形式） 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为正项级数，且存在某个自然数 N_0，使 $n>N_0$ 时，$b_n>0$，若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lambda, \tag{10.8}$$

其中 λ 为有限数或 $+\infty$，则

1° 当 $0<\lambda<+\infty$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 同时收敛或同时发散；

2° 当 $\lambda=0$ 时，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛可推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

3° 当 $\lambda=+\infty$ 时，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散可推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散。

证 我们仅证明结论 1°，关于结论 2° 和 3° 的证明留给读者