



数学分析教程

(下册)

宋国柱 任福贤 许绍溥 姜东平

南京大学出版社

361145

017
X 85
2

数学分析教程

· 下 册 ·

宋国柱 任福贤 许绍溥 姜东平



南京大学出版社

1992 · 南京



内 容 提 要

本书是按照1980年理科数学分析教学大纲并结合南京大学的实际情况而编写的。全书概念准确，论证严谨，文字浅显易懂，便于自学。丰富多彩的例题以及多层次的习题大大加强了传统的分析技巧的训练，同时又注意适当引进近代分析的概念。本书可作为综合性大学、师范院校数学系各专业的教材，也可作为其他对数学要求较高的专业的教材或教学参考书，还可作为高等学校数学教师以及其他数学工作者参考用书以及硕士生报考者的复习用书。

全书分上下两册出版，上册共9章，包括极限理论，一元函数微积分，多元函数及其微分学。下册共10章，包括级数理论，傅里叶级数，反常积分与含参变量积分，线积分、面积分与重积分，圆变函数与RS积分，场论等。

数 学 分 析 教 程

· 下 册 ·

宋国柱 任福贤

许绍溥 姜东平

南京大学出版社出版

(南京大学校内)

江苏省新华书店发行 丹阳市新华印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 14.5 字数 386 千

1990年5月第1版 1992年10月第2次印刷

印数 1501—4500

ISBN 7-305-00790-0/O·46

定价 3.45 元

目 录

第 10 章 数项级数

- § 1 级数的敛散性及其性质 (1)
 - 习题(5)
- § 2 正项级数敛散性 (6)
 - 2.1 比较判别法(7)
 - 2.2 根值判别法·比值判别法(11)
 - 2.3 柯西积分判别法(15)
 - 2.4 拉贝判别法·高斯判别法(16)
 - 习题(24)
- § 3 任意项级数敛散性 (24)
 - 3.1 绝对收敛定理·交错级数收敛判别法(26)
 - 3.2 阿贝尔判别法·狄利克雷判别法(29)
 - 习题(35)
- § 4 绝对收敛级数的性质 (35)
 - 4.1 绝对收敛级数的可交换性(35)
 - 4.2 级数的乘法(39)
 - 习题(44)
- § 5 二重级数·无穷乘积 (44)
 - 5.1 二重级数(44)
 - 5.2 无穷乘积(49)
 - 习题(52)
- 第 10 章总习题 (53)

第 11 章 函数序列和函数项级数

- § 1 函数序列和函数项级数的一致收敛性 (56)
 - 1.1 一致收敛性·函数空间(57)
 - 1.2 函数项级数的一致收敛性判别法(66)

习题(69)	
§ 2 一致收敛函数序列与函数项级数的性质	(70)
习题(80)	
§ 3 幂级数	(81)
3.1 幂级数的收敛半径(82)	
3.2 幂级数的性质(85)	
习题(89)	
§ 4 初等函数的幂级数展开	(90)
4.1 泰勒级数·初等函数的幂级数展开(90)	
4.2 幂级数的应用(99)	
习题(103)	
第 11 章总习题	(104)

第 12 章 反常积分

§ 1 两类反常积分的定义和性质	(107)
习题(116)	
§ 2 反常积分收敛判别法	(117)
2.1 非负函数比较判别法·绝对收敛定理(117)	
2.2 阿贝尔判别法·狄利克雷判别法(119)	
习题(124)	
§ 3 反常积分的变数变换及计算	(124)
习题(130)	
第 12 章总习题	(130)

第 13 章 含参变量积分

§ 1 含参变量的正常积分	(133)
习题(141)	
§ 2 含参变量的反常积分	(142)
2.1 一致收敛性及其判别法(143)	
2.2 一致收敛含参变量反常积分的性质(152)	
2.3 应用——反常积分的计算(159)	
习题(165)	

§ 3 欧拉积分·····	(167)
3.1 Γ 函数及其性质 (167)	
3.2 B 函数及其性质 (169)	
3.3 Γ 函数与 B 函数的关系 (172)	
习题 (178)	
第 13 章总习题·····	(179)

第 14 章 曲线积分

§ 1 第一型曲线积分·····	(182)
1.1 第一型曲线积分概念及其性质 (182)	
1.2 第一型曲线积分的计算方法 (184)	
习题 (190)	
§ 2 第二型曲线积分·····	(190)
2.1 第二型曲线积分概念及其性质 (190)	
2.2 第二型曲线积分的计算方法 (193)	
2.3 两类曲线积分的关系 (200)	
习题 (201)	
第 14 章总习题·····	(202)

第 15 章 重积分

§ 1 二重积分的定义和性质·····	(204)
1.1 二重积分的概念 (204)	
1.2 二重积分存在的条件 (206)	
1.3 可积函数类 (208)	
1.4 二重积分的性质 (211)	
习题 (212)	
§ 2 二重积分的计算·····	(213)
2.1 直角坐标系下的累次积分法 (213)	
2.2 二重积分的变数变换 (218)	
2.3 极坐标系下二重积分的累次积分法 (224)	
习题 (229)	
§ 3 三重积分·····	(231)
3.1 三重积分定义·直角坐标系下的累次积分 (231)	

3.2	三重积分的变数变换 (236)	
	习题 (243)	
§ 4	重积分的应用.....	(244)
4.1	曲面的面积 (245)	
4.2	几何体的质量中心和转动惯量 (250)	
4.3	引力 (253)	
	习题 (254)	
§ 5	反常重积分.....	(255)
5.1	无界区域的反常二重积分 (256)	
5.2	无界函数的反常二重积分 (262)	
	习题 (264)	
§ 6	n 重积分.....	(265)
	习题 (271)	
第 15 章	总习题.....	(272)

第 16 章 曲面积分

§ 1	第一型曲面积分.....	(274)
	习题 (278)	
§ 2	第二型曲面积分.....	(278)
	习题 (287)	
第 16 章	总习题.....	(287)

第 17 章 各种积分的联系·场论

§ 1	格林公式.....	(289)
1.1	格林公式 (289)	
1.2	平面上第二型曲线积分与路径无关的条件 (295)	
1.3	二重积分的变数变换公式的证明 (299)	
	习题 (303)	
§ 2	奥高公式.....	(304)
	习题 (310)	
§ 3	斯托克斯公式.....	(311)
	习题 (315)	

§ 4 场论..... (315)

4.1 数量场的方向导数和梯度 (316)

4.2 矢量场的流量和散度 (320)

4.3 矢量场的环流量和旋度 (322)

4.4 有势场以及空间第二型曲线积分与路径无关的条件 (326)

*4.5 应用 (328)

习题 (330)

*§ 5 微分形式及其积分..... (331)

5.1 微分的外积 (331)

5.2 微分形式和外微分 (336)

5.3 微分形式的积分 (339)

习题 (345)

第 17 章总习题..... (346)

第 18 章 圆变函数和 RS 积分

§ 1 圆变函数..... (348)

习题 (356)

§ 2 RS 积分..... (356)

2.1 RS 积分的概念与可积条件 (357)

2.2 RS 积分的性质 (361)

习题 (367)

第 18 章总习题..... (367)

第 19 章 傅里叶级数

§ 1 傅里叶级数..... (370)

习题 (378)

§ 2 逐点收敛性..... (379)

习题 (386)

§ 3 函数的傅里叶级数展开式..... (387)

3.1 周期为 $2l$ 的函数的傅里叶展开式 (387)

3.2 非周期函数的傅里叶级数展开 (392)

习题 (398)

§ 4 一致收敛性及其应用	(399)
4.1 傅里叶级数的逐项求积与逐项求导	(399)
4.2 傅里叶级数的算术平均和	(404)
习题	(409)
§ 5 平均收敛性	(410)
5.1 傅里叶级数的极值性质	(412)
5.2 傅里叶级数的平均收敛·三角函数系的完全性	(415)
习题	(421)
§ 6 傅里叶积分	(422)
6.1 傅里叶积分定理	(424)
6.2 傅里叶积分的其他形式	(427)
6.3 傅里叶变换的概念	(429)
习题	(433)
第 19 章总习题	(434)
习题答案与提示	(437)
参考文献	(451)

第 10 章

数项级数

级数理论在数学分析以及其他的后继课程、实用学科中有着大量的应用,作为基础课的数学分析,将把级数理论分为三章(数项级数、函数项级数和傅里叶级数)系统地论述,本章首先讨论常数项级数。

§1 级数的敛散性及其性质

设 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 是一个无穷数列,则表达式

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (10.1)$$

称为**无穷级数**,或简称**级数**。且常记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

其中 a_n 称为级数(10.1)的**通项**。级数(10.1)前 n 项之和

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

称为级数(10.1)的(第 n 个)**部分和**。

例如,把等比数列

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^n, \dots \quad (a \neq 0) \quad (10.2)$$

各项依次相加可得数项级数

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots, \quad (10.3)$$

通常称(10.3)为**等比级数**或**几何级数**。它的部分和($q \neq 1$ 时)

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = a \frac{1 - q^n}{1 - q}. \quad (10.4)$$

对于无穷级数(10.1),由于它是无穷项之和,我们自然要问这

个无穷和表示什么数以及如何求这个无穷和数。

定义 若级数(10.1)的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \text{ (有限)}$$

则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛于 S , S 称作此级数的和,记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

若 $\{S_n\}$ 极限不存在(包括极限为 ∞),则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

由定义可知研究无穷级数收敛问题,实质上就是研究部分和数列 $\{S_n\}$ 的收敛问题,反之,任取一数列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$,则 $\{x_n\}$ 的收敛问题就可以化为级数

$$x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1}) + \dots$$

的收敛问题。

例1 讨论等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ ($a \neq 0$) 的敛散性。

解 等比级数部分和

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q},$$

故

(i) 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q}$, $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$, 级数收敛。

(ii) $q > 1$ 时, 显然有 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$; $q < -1$ 时,

$$S_n = \frac{a(1 - (-1)^n |q|^n)}{1 + |q|},$$

显然 $\{S_n\}$ 是一个发散数列,故当 $|q| > 1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 发散。

(iii) $q = 1$ 时, $S_n = na \rightarrow \infty$; $q = -1$ 时,

$$S_n = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ a, & n = 2k + 1. \end{cases}$$

故 $|q| = 1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 也发散。

综上所述,当且仅当 $|q| < 1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 收敛,且有和

$$\frac{a}{1-q}.$$

例 2 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性.

解 因为

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 收敛, 且其和为 1.

由于级数与数列有密切联系, 读者不难自行由数列的某些结果来证明关于级数的下述基本性质:

性质 1 (级数收敛的柯西准则) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在某个自然数 N , 使得当 $n > N$ 时, 对一切自然数 p , 都有

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon. \quad (10.5)$$

在 (10.5) 式中取 $p=1$, 便得

性质 2 (级数收敛的必要条件) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

由性质 2 可以知道, 如果 $\{a_n\}$ 不收敛或者 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必发散, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 不一定收敛, 即通项趋于零仅仅是级数收敛的必要条件, 而不是充分条件. 例如

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots,$$

因为

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

因此, 虽然 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 却是发散的.

性质 2 的实用价值在于当 a_n 不收敛于零时, 便可断言级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 今后将用到这个性质.

性质 3 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, c 为任一常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 都收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

性质 4 去掉、增加或改变级数的有限项并不改变级数的敛散性.

性质 5 收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 任意加括号后所得到的级数仍收敛, 且其和不变.

证 设对收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 任意加括号后所得级数是

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots$$

$$+ (a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots, \quad (10.6)$$

我们令

$$\tilde{a}_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1},$$

$$\tilde{a}_2 = a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2},$$

.....

$$\tilde{a}_k = a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k},$$

$$\tilde{S}_k = \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \cdots + \tilde{a}_k,$$

则 $\tilde{S}_k = S_{n_k}$ 是收敛级数 $\{S_n\}$ 的一个子序列, 故

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{S}_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n. \quad \blacksquare$$

注 由性质 5 可知若级数 (10.6) 发散, 则原级数 (10.1) 必发散, 但如果 (10.6) 收敛时, 去括号后不一定收敛. 例如级数

$$(1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots$$

收敛于零, 但去括号后得一个发散级数

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots.$$

在一定条件下,若(10.6)收敛,则去括号后所得级数也收敛。
 例如当级数(10.6)中同一括号内各项符号相同时,则去括号所得的级数仍收敛。

事实上,由于当 n 从 n_{k-1} 变到 n_k 时, S_n 将单调地变化,其值在 $\tilde{S}_{k-1} = S_{n_{k-1}}$ 与 $\tilde{S}_k = S_{n_k}$ 之间,若记

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{S}_k = \tilde{S},$$

则当 k 充分大时, $S_{n_{k-1}}$ 和 S_{n_k} 与 \tilde{S} 可相差任意小,故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \tilde{S}.$$

例 3 证明调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散。

证 (本例的另一种形式见第 1 章 3.4 段例 1), 因为

$$\begin{aligned} |S_{n+p} - S_n| &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} \\ &> \underbrace{\frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \cdots + \frac{1}{n+p}}_{p \text{ 项}} \\ &= \frac{p}{n+p}, \end{aligned}$$

取 $p=n$, 得

$$|S_{2n} - S_n| > \frac{1}{2},$$

于是据柯西收敛准则, 立即知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散。

习 题

1. 按定义证明下列级数收敛, 并求其和:

$$(1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \cdots;$$

$$(2) \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \cdots;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$$

2. 证明: 若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a$.

3. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2k-1} + u_{2k})$ 收敛于 S ,

试证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛于 S .

4. 利用 Cauchy 收敛准则讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{2^n}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$;

(3) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{3m+1} + \frac{1}{3m+2} - \frac{1}{3(m+1)} + \dots$.

5. 举例说明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 对每一个自然数 p 满足条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}) = 0,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 不一定收敛。

§ 2 正项级数敛散性

研究级数的收敛性不仅在理论上,而且在实用上(例如近似计算,解微分方程等)是非常有价值的,如果从定义出发(即求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$)或者应用柯西收敛准则往往是比较困难的,因此,必须寻求一些简单实用的判别法来研究级数的收敛性。

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中的各项的符号都相同,则称它为同号级数,对于同号级数只须研究各项都是非负数组成的级数——称为正项级数.下面我们首先考虑正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \geq 0, n = 1, 2, 3, \dots$).

定理 10.1 (基本定理) 正项级数收敛的充要条件是:部分和数列 $\{S_n\}$ 有界。

证 (必要性) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则 $\{S_n\}$ 必收敛,再根据收敛数列必有界知结论成立。

(充分性) 由于 $a_n \geq 0$,则 $\{S_n\}$ 是单调上升数列,从而当 $\{S_n\}$

有界时, $\{S_n\}$ 是单调有界数列, 它必收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. ■

2.1 比较判别法

定理 10.2 (比较判别法 I) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数, 且存在自然数 N , 使得对一切 $n > N$ 都有

$$a_n \leq b_n,$$

则

1° 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

2° 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

证 1° 根据 §1 基本性质 4, 我们不妨设对一切自然数 n 有 $a_n \leq b_n$, 记 $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 则

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n \leq B,$$

由定理 10.1 立即得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

2° 用反证法, 设 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则由结论 1° 可推得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 这与假设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散矛盾, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 必发散. ■

例 1 讨论 p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的敛散性, 其中 p 为任一实数.

解 (i) 当 $p \leq 1$ 时, 因为 $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 则据定理 10.2 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ($p \leq 1$) 也发散.

(ii) $p > 1$ 时, 将原级数按一项, 二项, 2^2 项, \dots , 2^{k-1} 项括在一起, 得

$$1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} \right) + \cdots, \quad (10.7)$$

记级数 (10.7) 的通项为 \tilde{a}_k , 其中

$$\tilde{a}_k = \frac{1}{(2^{k-1})^p} + \frac{1}{(2^{k-1}+1)^p} + \cdots + \frac{1}{(2^k-1)^p},$$

级数 (10.7) 的前 k 项部分和为 \tilde{S}_k , 则

$$\begin{aligned} \tilde{S}_k &\leq 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p}\right) + \cdots \\ &\quad + \underbrace{\left[\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^p + \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^p + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^p\right]}_{2^{k-1} \text{ 项}} \\ &= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{k-1} \\ &\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}} = M. \quad (k=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

令

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$$

对任一 n , 存在自然数 k_0 , 使

$$S_n \leq \tilde{S}_{k_0} \leq M,$$

从而据定理 10.1 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ($p > 1$) 收敛。

推论 1 (比较判别法 I 的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数, 且存在某个自然数 N_0 , 使 $n > N_0$ 时, $b_n > 0$, 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda, \quad (10.8)$$

其中 λ 为有限数或 $+\infty$, 则

- 1° 当 $0 < \lambda < +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同时收敛或同时发散,
- 2° 当 $\lambda = 0$ 时, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛可推出 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,
- 3° 当 $\lambda = +\infty$ 时, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散可推出 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证 我们仅证明结论 1°, 关于结论 2° 和 3° 的证明留给读者