非线性时间序列模型的稳定性分析

——遍历性理论与应用

盛昭瀚 王 涛 刘德林 著

科学出版社

非线性时间序列模型的稳定性分析

——遍历性理论与应用

盛昭瀚　王涛　刘德林　著

国家自然科学基金资助项目

科学出版社

1993

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书应用一般状态马氏链遍历性理论对有关非线性时间序列模型的平稳分布（稳定性）方面的一些问题进行分析，本书内容反映和总结了国内外近年来有关一般状态马氏链遍历性理论的较新研究成果，以及一般状态马氏链遍历性理论在非线性时序模型性质分析方面的应用概况和发展动态.

本书可供从事时间序列分析理论和应用研究的研究生和科技工作者参考.

非线性时间序列模型的稳定性分析
—— 遍历性理论与应用

盛昭瀚 王涛 刘德林 著
责任编辑 毕颖 林鹏

科 学 出 版 社 出 版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100707

化学工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1993 年 3 月第 一 版 开本：850 × 1168 1/32
1993 年 3 月第一次印刷 印张：5 5/8
印数：平 1–1300 字数：163 000
精 1–500

ISBN 7-03-003278-0/O·591（平）
ISBN 7-03-003279-9/O·592（精）

定价：平装 7.70 元
精装 9.90 元

序　　言

马氏链理论是随机过程理论中较早开始研究并得到较广泛应用的一个理论分支，而马氏链遍历性理论又是马氏链理论中的基本内容之一，它在随机系统的理论研究，特别是随机服务系统的性质分析等方面一直发挥着重要的作用.

早期的马氏链遍历性理论研究，其主要结果大都是针对可数状态空间讨论的，有关这方面的研究成果已经相当丰富. 另外，从 50 年代开始，关于一般状态马氏链的遍历性理论也逐步发展起来，早期的主要工作有 Doob (1953) 、Harris (1956), 以及 Jain 和 Jamison (1967) 等. 进入 70 年代，特别是近十几年来，有关一般状态马氏链的遍历性理论得到蓬勃发展，获得了一系列的研究成果 ([12], [23], [25–27], [33, 34], [50–56] 等), 这同时也为随机系统的理论研究提供了新的方法和手段.

80 年代以来，有关非线性时间序列模型的研究，由于它所具有的广泛实际应用背景，而受到普遍重视，目前已成为时间序列分析理论发展的一个重要研究方向. 纵观国内外在这一方向上的研究概况，前期工作大多局限于对几类典型非线性时间序列模型的参数辨识算法和建模方法等进行研究，一些代表性的工作如： Nicholls 和 Quinn (1982) 对随机系数自回归模型的讨论， Granger, Anderson(1978), 以及 Subba Rao 和 Gabr (1984) 对双线性模型的分析， Haggan, Qzaki (1981) 关于指数自回归模型的讨论，此外还有 Tong (1983) 关于门限自回归模型的研究， Priestley (1980) 的状态依赖模型等. 相对来说，关于非线性模型本身概率性质的研究开展的比较少，也缺乏一种比较统一的分析和处理方法. 但是，一般状态空间马氏链遍历性理论的发展和一系列较精细结果的获得，为非线性时间序列的理论研究开辟了新的道路. 正是在此基础上，有关一般非线性时间序列模型的马氏链表述及其遍历性分析的研究逐步得到开展 ([4], [6], [7] [19] [30–32], [44] 等), 目前这方面的工作正处在一个迅速发展的阶段.

本书内容大体分两部分. 第一部分即第一章. 介绍一般状态马氏链遍历性的有关理论；第二部分，也即本书的第二—五章，是一般状态马氏链遍历性理论在非线性时间序列模型性质分析等方面的应用，具体内容安排如下：

第一章，概要地介绍一般状态马氏链遍历性的有关理论，具体包括一般状态马氏链的 φ- 不可约、常返 (正常返和零常返) 、遍历 (Harris 遍历、几何遍历和一致遍历) 等性质的讨论. 书中为了避免过多的牵扯细节以及由于篇幅上的限制，多数定理未给出完整的证明，但均指出了它们的出处. 在本章的 §1.5 中还重点介绍了有关一般状态马氏链非遍历性问题的研究，在 Kaplan (1979), Sennott (1985, 1987), 以及 Szpankowski (1985, 1988) 等对可数状态马氏链非遍历性研究工作的基础上，给出了由 Lyapunov 函数的广义“期望飘移”及广义 Kaplan 条件所表述的一般状态马氏链非遍历的若干充分条件.

第二章，应用一般状态空间马氏链遍历性的有关理论对较一般形式非线性时序模型的 Harris 遍历、几何遍历及一致遍历性质进行分析，通过考虑模型遍历性质与其相应确定性部分 Lyapunov 稳定性之间的联系，得到了由模型相应确定性部分的 Lyapunov 函数给出的模型为 Harris 遍历、几何遍历或一致遍历的若干充分条件.

第三章，着重讨论模型的非常返和非遍历性质.

第四章，对两类典型非线性时序模型 (门限自回归模型、随机系数自回归模型) 的遍历性质进行分析.

第五章，通过对几个例子的分析，介绍一般状态马氏链遍历性理论在参数估计、随机服务系统等方面的应用.

有关一般状态马氏链遍历性理论及其在非线性时序模型性质分析方面的研究内容相当丰富，而且目前正处在蓬勃发展时期. 考虑到这方面的工作比较新颖，并对时间序列的理论分析和应用研究都具有一定的参考价值，而目前国内在此方向上的研究开展得还比较少，因此笔者结合几年来在这方面的一些粗浅尝试，试图通过这样一本书将此领域的研究概况向国内读者做一简单的介绍，以期抛砖引玉. 由于笔者学识水平有限，错误和不妥之处在所难免，尚祈读者不吝指正.

南京大学数学系胡宣达教授仔细地阅读了本书的原稿，提出了宝贵意见，对此，作者表示衷心的感谢. 最后，还要对科学出版社毕颖、林鹏同志的热情支持和细致劳动表示诚挚的谢意.

本书中作者的工作得到国家自然科学基金的资助.

符号说明

$\mathbb{R}_+$	$[0,+\infty)$
$\overline{\mathbb{R}}_+$	$[0,+\infty)\cup\{+\infty\}$
$(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$	概率空间
$(\mathcal{X},\mathcal{F})$	状态空间
$\mathcal{M}$	$(\mathcal{X},\mathcal{F})$ 上的广义测度集合
$\mathcal{M}_+$	$(\mathcal{X},\mathcal{F})$ 上的非负测度集合
$\mathcal{E}_+$	$(\mathcal{X},\mathcal{F})$ 上的非负可测函数集合
$\mathbb{P}_x$	初始状态为 x 时的条件概率
$\mathcal{L}_X(\cdot)$	随机变量 X 的概率分布
$P(x,A)$	$(\mathcal{X},\mathcal{F})$ 上的转移概率
$1_A(x)$	集合 $A\in\mathcal{F}$ 的特征函数
$\varepsilon_x(\cdot)$	$\mathcal{F}$ 上的由状态 x 确定的质点测度 $\varepsilon_x(A)=\begin{cases}1, & 当\ x\in A\\ 0, & 当\ x\notin A\end{cases},\quad \forall A\in\mathcal{F}$
$\lambda\ll\mu$	测度 λ 对 μ 绝对连续
$\lambda\sim u$	测度 λ 与 u 等价
$x\to A$	由状态 x 可达集 A
π–a.e.	除去一个 π 零测集外
$\varphi\Big\vert_B$	测度 φ 在集 $B\in\mathcal{F}$ 上的限制
$\Longleftrightarrow$	当且仅当
$\Longrightarrow$	蕴涵
$\forall$	任意
$\exists$	存在
$\mathbb{N}^+$	正整数集合
$\mathbb{R}^m$	m 维实数域空间
$\mathbb{C}^m$	m 维复数域空间
$\mathcal{B}_m$	$\mathbb{R}^m$ 中的 Borel $\sigma-$ 代数
$\Vert\cdot\Vert$	不言明时均为 Euclid 范数
vec (A)	矩阵向量
i.o.	无穷多次 (infinitely often)
∂G	集合 G 的边界集
g.c.d.	最大公因子

目　录

第一章　一般状态马氏链遍历性理论综述

在这一章中，我们考虑以一个一般可测空间 $(\mathcal{X},\mathcal{F})$ 为状态空间的马氏链，概括性地介绍一些有关一般状态马氏链的遍历性理论.

§1.1　转移概率与一般状态马氏链

设 $(\mathcal{X},\mathcal{F})$ 为一个可测空间，其中 $\mathcal{X}$ 是一个集合，$\mathcal{F}$ 是由 $\mathcal{X}$ 的一些子集组成的一个 σ- 代数，$(\mathcal{X},\mathcal{F})$ 上的广义测度集记为 $\mathcal{M}$, 非负测度集为 $\mathcal{M}_+$, 非负 (Borel) 可测函数集记为 $\mathcal{E}_+$.

定义 1.1.1　映射 $P:\mathcal{X}\times\mathcal{F}\to\overline{I\!R}_+$ 称为是 $(\mathcal{X},\mathcal{F})$ 上的一个 (非负) 核, 如果满足

(i)　对任意给定的集 $A\in\mathcal{F}$, 函数 $P(\cdot,A)$ 为可测函数；

(ii)　对任意给定的 $x\in\mathcal{X}$, 集函数 $P(x,\cdot)$ 是 $(\mathcal{X},\mathcal{F})$ 上的一个测度.

当 $P(x,\mathcal{X})\equiv 1,\forall x\in\mathcal{X}$, 也即对每个 $x\in\mathcal{X}, P(x,\cdot)$ 为 $(\mathcal{X},\mathcal{F})$ 上的概率测度时，我们称 P 是 $(\mathcal{X},\mathcal{F})$ 上的一个 转 移 概 率.

一个核可以看成是锥集 $\mathcal{E}_+$ 上的一个线性算子：

$$Pf(x)=\int_{\mathcal{X}}P(x,dy)f(y),\qquad \forall f\in\mathcal{E}_+. \tag{1.1.1}$$

类似地，一个核也可以看成是 $\mathcal{M}_+$ 上的一个算子：

$$\lambda P(A)=\int_{\mathcal{X}}\lambda(dx)P(x,A),\qquad \forall\lambda\in\mathcal{M}_+. \tag{1.1.2}$$

另外，两个核 P_1 和 P_2 的乘积 $P_1P_2:\mathcal{X}\times\mathcal{F}\to\overline{I\!R}_+$ 按如下定义：

$$P_1P_2(x,A)\overset{\text{def}}{=}\int_{\mathcal{X}}P_1(x,dy)P_2(y,A). \tag{1.1.3}$$

一个核 P 的幂 $P^n, n \geq 0$, 定义为： $P^0 = I$, 以及递推关系：$P^n = PP^{n-1}, n \geq 1$. 这里的 I 代表单位核 (转移概率)

$$I(x, A) = 1_A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in A, \\ 0, & \text{当 } x \notin A. \end{cases}$$

考虑一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{A}, I\!P)$, 设 $\{X_n\}$ 是 $(\Omega, \mathcal{A}, I\!P)$ 上取值于 $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ 的一个随机序列，也即每个 $X_n, n \geq 0$, 都是由 $(\Omega, \mathcal{A})$ 到 $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ 的可测映射，我们把 $(\Omega, \mathcal{A}, I\!P)$ 称为随机序列 $\{X_n\}$ 的样本空间，$(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ 称为 $\{X_n\}$ 的状态空间，并称 $\mathcal{X}$ 中的点为状态.

定义 1.1.2 设 $\{X_n\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{A}, I\!P)$ 上以 $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ 为状态空间的一个随机序列， P 是 $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ 上的一个转移概率，称 $\{X_n\}$ 是一个以 P 为转移概率的 (时齐) 马氏链, 如果对 $\forall n \geq 0$, 有

$$\mathcal{L}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathcal{L}(X_{n+1} | X_n) = P(X_n, \cdot), \quad I\!P - a.e.$$

其中 $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \cdots, X_n)$, $\mathcal{L}$ 代表概率分布 (凡涉及到条件分布的等式，均是指在几乎处处成立 (a.e.) 的意义下而言，后面不再做说明).

我们也称 X_0 的分布 $\mathcal{L}_{X_0}(\cdot)$ 为马氏链 $\{X_n\}$ 的初始分布，如 $\mathcal{L}_{X_0}(\cdot) = \varepsilon_x$(状态 x 的质点集函数), 也即对某状态 $x \in \mathcal{X}$, 有 $I\!P\{X_0 = x\} = 1$, 则称 x 是马氏链 $\{X_n\}$ 的初始状态.

设 $\{X_n\}$ 是一个以 P 为转移概率的马氏链，其初始分布 $\mathcal{L}_{X_0}(\cdot) = \lambda$, 则由定义 1.1.2, 可得

$$\begin{aligned} &I\!P\{X_0 \in A_0, \cdots, X_n \in A_n\} \\ &= \int_{A_0} \lambda(dx_0) \int_{A_1} P(x_0, dx_1) \cdots \int_{A_n} P(x_{n-1}, dx_n), \qquad (1.1.4) \\ &\qquad \forall n \geq 0, A_0, \cdots, A_n \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

特别地，我们有 $\mathcal{L}_{X_n}(\cdot) = \lambda P^n$.

相反地, 如果一个取值于 $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ 的随机序列 $\{X_n\}$ 满足 (1.1.4), 那么 $\{X_n\}$ 一定是一个以 P 为转移概率的马氏链，并且初始分布为 λ.

一个马氏链对应着一个转移概率，反过来，对 $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ 上任意给定的概率测度 λ 及转移概率 P, 也一定可以构造某概率空间

$(\Omega, \mathcal{A}, I\!P)$ 及其上的一个马氏链 $\{X_n\}$, 使 $\{X_n\}$ 以 λ 及 P 分别为其初始分布和转移概率[73], 以后我们对马氏链 $\{X_n\}$ 和其转移概率不再加以特别的区分，而常常等同地使用.

§ 1.2 闭集；φ- 不可约性

设 $\{X_n\}$ 是 $(\Omega, \mathcal{A}, I\!P)$ 上以 $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ 为状态空间的马氏链，转移概率为 P.

定义 1.2.1 设 $x \in \mathcal{X}, A \in \mathcal{F}$, 称状态 x 可达集合 A, 如果 $\exists n \geq 1$, 使得 $P^n(x, A) > 0$, 并记 $x \to A$; 若 $P^n(x, A) = 0, \forall n \geq 1$, 则称 x 不可达 A, 并记 $x \not\to A$.

定义 1.2.2 一个非空集 $A \in \mathcal{F}$ 称为闭的, 如有 $P(x, A^c) = 0, \forall x \in A$; 称集 $B \in \mathcal{F}$ 是不可分的, 如果不存在两个不交的闭集 $A_1, A_2 \subset B$; 一个非空集 H 称为是吸收的, 如果 $P(x, H) = P(x, \mathcal{X}) = 1, \forall x \in H$.

易知, $A \in \mathcal{F}$ 为闭当且仅当 $x \not\to A^c, \forall x \in A$, 也即 $I\!P_x\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{X_n \in A^c\}\Big) = 0$, $\forall x \in A$, 而一个集 $H \in \mathcal{F}$ 是吸收的，当且仅当 $I\!P_x\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{X_n \in H\}\Big) = 1, \forall x \in H$. 另外，一个吸收集一定是一个闭集.

对一个吸收集 $H \in \mathcal{F}$, 我们可以定义转移概率 P 在 H 上的限制如下：

$$P|_H(x, A) \stackrel{\text{def}}{=} P(x, A), \quad \forall x \in H, A \in \mathcal{F} \cap H$$

此时 $P|_H$ 构成 $(H, \mathcal{F} \cap H)$ 上的一个转移概率，并且 $\{X_n\}$ 也可看成是状态空间 $(H, \mathcal{F} \cap H)$ 上以 $P|_H$ 为转移概率的马氏链.

再介绍一下有关势核的概念，对一个转移概率 P, 定义

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{0}^{\infty} P^n \tag{1.2.1}$$

我们把核 G 称为是转移概率 P 的势核.

命题 1.2.1 对任意 $n \geq 1$, 有

$$G = \sum_{0}^{n-1} P^m + P^n G = \sum_{0}^{n-1} P^m + GP^n$$

特别地, $G = I + PG = I + GP$. 此外, 对 $\forall f \in \mathcal{E}_+$, 记 $A = \{x \in \mathcal{X} | Gf(x) < +\infty\}$, 则

$$\lim_{n \to +\infty} P^n Gf(x) = 0, \qquad x \in A$$

证 明: 显然.

对一个集 $B \in \mathcal{F}$, 记

$$B^+ = B \cup \{x \in \mathcal{X} | x \to B\} = \{x \in \mathcal{X} | G(x, B) > 0\} \tag{1.2.2}$$

引理 1.2.1 设 $A, B \in \mathcal{F}$, 如果 $y \to A, \forall y \in B$, 则 $x \to A, \forall x \in B^+$.

证 明: 设 $x \in B^+$, 则 $\exists n \geq 0$, 使得 $P^n(x, B) > 0$, 因此

$$P^{n+1}G(x, A) \geq \int_B P^n(x, dy) PG(y, A) > 0$$

故 $x \to A$.

下面我们给出马氏链 $\{X_n\}$ 为 φ- 不可约的定义.

定义 1.2.3 设 $\varphi \in \mathcal{M}_+$ 是 $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ 上的一个非平凡、σ- 有限测度, $B \in \mathcal{F}$ 为 φ- 正测集, 即 $\varphi(B) > 0$, 称集 B 是 φ- 连通的, 如果对 B 的任意 φ- 正测子集 A, 有 $x \to A, \forall x \in B$. 如果整个状态空间 $\mathcal{X}$ 是 φ- 连通的, 则称 $\{X_n\}$ 是 φ- 不可约的, 并称 φ 是 $\{X_n\}$ 的一个不可约测度.

命题 1.2.2 (i) 设 B 为 φ- 连通, 则 B 是不可分的;

(ii) 如果 B 是一个 φ- 连通的吸收集, 则 $P|_B$ 是 $\varphi|_B$ 不可约的.

证 明: (i) 反证. 如果存在两个不交的闭集 $F_1, F_2 \subset B$, 那么 $B \setminus F_1, B \setminus F_2$ 中至少有一个是 φ- 正测集, 与 B 的 φ- 连通性矛盾.

容易看到, 当 $\{X_n\}$ 为 φ- 不可约时, 对任意关于 φ 绝对连续的非平凡 σ- 有限测度 $\psi \in \mathcal{M}_+, \{X_n\}$ 一定也是 ψ- 不可约的, 下

面的命题还将说明：从一个不可约测度 φ 出发，我们总可以找到一个最大的不可约测度 M, 也即使得对 $\{X_n\}$ 的任意不可约测度 ψ, 均有 $\psi \ll M$.

命题 1.2.3 设 $\{X_n\}$ 为 φ- 不可约链，则必存在最大不可约测度 M, 并对 $\forall B \in \mathcal{F}$, 若 $M(B)=0$, 则有 $M(B^+)=0$.

证 明：选取对 φ 绝对连续的一个概率测度 $\tilde{\varphi}$, 令

$$M=\sum_{0}^{\infty} 2^{-(n+1)}\tilde{\varphi}P^n \tag{1.2.3}$$

(1) M 为 $\{X_n\}$ 的不可约测度；

$\forall A \in \mathcal{F}, M(A)>0$, 由 (1.2.3) 式，$\exists n \geq 0$, 使得 $\tilde{\varphi}P^n(A)>0$, 也即

$$\int_{\mathcal{X}} \tilde{\varphi}(dx)P^n(x,A)>0$$

因此可找到一个 $\tilde{\varphi}$- 正测 (从而也是 φ- 正测) 集 $B \in \mathcal{F}$, 使得 $P^n(x,A)>0, \forall x \in B$. 由 $\{X_n\}$ 的 φ- 不可约，有 $B^+=\mathcal{X}$, 再由引理 1.2.1, 就得到 $x \to A$, $\forall x \in \mathcal{X}$.

(2) $MG \ll M$

由 (1.2.3) 式，有 $MP \leq 2M$, 因此 $MP \ll M$, 同样地，$MP^{n+1} \leq 2MP^n, \forall n \geq 0$, 因此递推可得 $MP^n \ll M, \forall n \geq 0$, 从而 $MG=\sum\limits_{0}^{\infty} MP^n \ll M$.

设 ψ 是 $\{X_n\}$ 的任一不可约测度，$A \in \mathcal{F}, \psi(A)>0$. 由 $G(x,A)>0, \forall x \in \mathcal{X}$, 有 $MG(A)>0$, 由 (2), 就有 $M(A)>0$, 因此 M 是 $\{X_n\}$ 的最大不可约测度. 如对某集 $B \in \mathcal{F}$, 有 $M(B)=0$, 仍由 (2), 我们可得 $MG(B)=0$, 也即

$$\int_{\mathcal{X}} M(dx)G(x,B)=0$$

注意到 $B^+=\{x \in \mathcal{X} | G(x,B)>0\}$, 此时必有 $M(B^+)=0$, 证毕.

命题 1.2.3 证明了最大不可约测度的存在性，另外，由 (1.2.3) 式，我们还可以看出，所构造的最大不可约测度还是一个概率测度.

在本节的最后，我们再来介绍一下完全集的概念. 设 M 是 $\{X_n\}$ 的一个最大不可约测度，称集合 $B \in \mathcal{F}$ 是 $\{X_n\}$ 的一个 完全集，如果 $M(B^c) = 0$. 下面的命题给出了完全集与闭集之间的关系.

命题 1.2.4 设 M 是 $\{X_n\}$ 的一个最大不可约测度，则

(i) 闭集一定是完全集；

(ii) 如 B 为完全集，则必存在闭的子集 F;

(iii) 如果 $F_i, i \geq 1$ 为闭，则其交集 $\bigcap\limits_1^\infty F_i$ 为闭.

证明: (i) 设 F 为一闭集，如果 $M(F^c) > 0$, 由 M- 不可约，就有 $x \to F^c, \forall x \in F$, 此与 F 为闭集矛盾.

(ii) 令 $F = \{x \in B | x \not\to B^c\}$, 由命题 1.2.1

$$PG(x, B^c) \leq G(x, B^c) = 0, \quad \forall x \in F$$

注意到 $F^c = \{x \in \mathcal{X} | G(x, B^c) > 0\}$, 可得 $P(x, F^c) = 0$, $\forall x \in F$, 因此 F 非空则闭，又 $M(B^c) = 0$, 由命题 1.2.3, 有 $M((B^c)^+) = 0$, 从而 $F = B \setminus (B^c)^+ \neq \phi$.

(iii) 由定义 1.2.2, 易知可数个闭集的交集或空或闭，而在 φ- 不可约条件下，每个 F_i 均为完全集，因此其交集 $\bigcap\limits_1^\infty F_i$ 也为完全集，故必是闭集.

命题 1.2.4 表明，如要证明某集 $B \in \mathcal{F}$ 是完全集，只需证明 B 是一个闭集或至少它包含有一个闭的子集.

§ 1.3 常返性

这一节我们在 φ- 不可约条件下，介绍马氏链 $\{X_n\}$ 的各种常返性质.

设 $\{X_n\}$ 是状态空间 $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ 上的一个 φ- 不可约链， P 为其转移概率， M 为其最大不可约测度，仍以 $G(x, A)$ 表示 P 的势核，此外，我们再引入下面的一些记号

$$L(x, A) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}_x\Big(\bigcup_1^\infty \{X_n \in A\}\Big) \tag{1.3.1}$$

$$h_A^\infty(x) \stackrel{\text{def}}{=} I\!P_x\Big(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\{X_n \in A\}\Big) \tag{1.3.2}$$

$$\mathcal{F}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{B \in \mathcal{F} | M(B) > 0\} \tag{1.3.3}$$

即 $L(x, A)$ 是在初始状态为 x 的条件下，存在某 $n \geq 1$, 使 $X_n \in A$ 的概率；而 $h_A^\infty(x) = I\!P_x\{X_n \in A \quad \text{i.o.}\}$ 是初始状态为 x 条件下，$\{X_n\}$ 无数次 (infinitely often) 进入集 A 的概率.

定义 1.3.1 马氏链 $\{X_n\}$ 称为是 常 返 的, 如果对 $\forall A \in \mathcal{F}^+$, 有 $G(x, A) \equiv +\infty, \forall x \in \mathcal{X}$, 否则称之为 非 常 返(或 滑 过).

命题 1.3.1 (Tweedie(1976) 命题 3.5) 设 $\{X_n\}$ 为 φ- 不可约链，则或者 $\{X_n\}$ 为常返，或者存在集列 $A_n \uparrow \mathcal{X}$, 使得

$$G(x, A_n) < +\infty, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad n \geq 1$$

定义 1.3.2 称 $\{X_n\}$ 是 Harris 常 返 的，如果对 $\forall A \in \mathcal{F}^+$, 有 $h_A^\infty(x) \equiv 1, \forall x \in \mathcal{X}$.

注. 这里的 Harris 常返定义与 Orey(1971) 、Tweedie(1976) 等文献中所采用的 φ- 常返定义是等价的. 一个 φ- 不可约链 $\{X_n\}$ 称为是 φ- 常 返 的, 如果对任意 φ- 正测集 $A \in \mathcal{F}$. 有 $L(x, A) \equiv 1, \forall x \in \mathcal{X}$. 由 Orey(1971) 命题 5.1 推论，当 $\{X_n\}$ 为 φ- 不可约链时，对任意 φ- 正测集 $A \in \mathcal{F}$, 若 $L(x, A) \equiv 1, \forall x \in \mathcal{X}$, 则 $h_A^\infty(x) \equiv 1, \forall x \in \mathcal{X}$. 注意到 $h_A^\infty(x) \leq L(x, A)$, $\forall x \in \mathcal{X}, A \in \mathcal{F}$, 因此 $\{X_n\}$ 为 φ- 常返当且仅当对任意 φ- 正测集 $A \in \mathcal{F}$, 有 $h_A^\infty(x) \equiv 1, \forall x \in \mathcal{X}$. 由于 $\varphi \ll M$, 可知 Harris 常返链一定是 φ- 常返的，而由 Nummelin(1984) 命题 3.12 又知， φ- 常返链一定也是 Harris 常返的.

下面的定理给出了常返与 Harris 常返之间的关系.

定理 1.3.1 对 φ- 不可约链 $\{X_n\}$, 我们有

(i) $\{X_n\}$ 为常返 $\Longleftrightarrow$ 对 $\forall A \in \mathcal{F}^+$, 有 $h_A^\infty(x) > 0, \forall x \in \mathcal{X}$, 且 $h_A^\infty(x) = 1, M$-a.e. 成立.

(ii) 当 $\mathcal{F}$ 为可数生成，也即存在 $\mathcal{F}$ 中的一个可数集列 $F_1, F_2, \cdots$, 使得 $\mathcal{F} = \sigma(F_1, F_2, \cdots)$, 则此时 $\{X_n\}$ 为常返当且仅当存在一个完全的吸收集 H, 使得 $\{X_n\}$ 限制在 H 上为 Harris 常返.

从定理之 (i) 推知， Harris 常返链一定是常返的，而定理的第 (ii) 部分，使得我们常常可以不失一般性地把一个常返的马氏

链看做是 Harris 常返的 (如果考虑 $\{X_n\}$ 在 H 上的限制对我们的问题讨论没有本质影响的话), 我们也把定理中的这样一个完全吸收集称为是 $\{X_n\}$ 的一个 Harris 集.

该定理的证明参见 Nummelin(1984) 定理 3.7, 需要说明的一点是, 那里的 $P(x, A)$ 为 1- 常返与我们前面定义的 $\{X_n\}$ 常返概念是等价的. 事实上, 由 Nummelin(1984) 定义 3.2, 转移概率 $P(x, A)$ 为 1- 常返, 如果对 $\forall r \geq 1$, 有

$$G^{(r)} f \equiv +\infty, \qquad \forall f \in \mathcal{E}^+$$

其中 $G^{(r)} = \sum_0^\infty r^n P^n, \mathcal{E}^+ = \{f \in \mathcal{E}_+ | M(f) > 0\}$, 而 $M(f) = \int_{\mathcal{X}} M(dx) f(x)$.

当 $P(x, A)$ 为 1- 常返, 对 $\forall A \in \mathcal{F}^+$, 易知 $1_A \in \mathcal{E}^+$, 而

$$G^{(r)} 1_A(x) = \int_{\mathcal{X}} G^{(r)}(x, dy) 1_A(y) = G^{(r)}(x, A)$$

得: $G(x, A) \equiv +\infty, \forall x \in \mathcal{X}$, 因此 $\{X_n\}$ 为常返.

反之, 如 $\{X_n\}$ 为常返, 对 $\forall f \in \mathcal{E}^+, M(f) > 0$, 由命题 1.2.3, 最大不可约测度可取为有限测度, 故由有限可加测度的下半连续性, $\exists A \in \mathcal{F}^+$, 使得 $\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \inf_{x \in A} f(x) > 0$, 因此对 $\forall r \geq 1$, 就有

$$G^{(r)} f(x) \geq G f(x) \geq G(x, A) \cdot \varepsilon = +\infty, \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

从而 P 为 1- 常返.

下面我们再来介绍一下有关马氏链 $\{X_n\}$ 为正常返或零常返的概念.

定义 1.3.3. 设 $\{X_n\}$ 是一个常返链, 称 $\{X_n\}$ 是 正 常 返 的, 如果对 $\forall A \in \mathcal{F}^+$, 有

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} P^n(x, A) > 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

否则, 称 $\{X_n\}$ 是 零 常 返 的.

命题 1.3.2 设 $\{X_n\}$ 为一个常返链, 则或者 $\{X_n\}$ 为正常返, 或者存在集列 $A_n \uparrow \mathcal{X}$, 使得

$$\lim_{m \to +\infty} P^m(x, A_n) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad n \geq 1$$

证明: 参见 Tweedie(1976) 命题 4.2 以及我们前面所给的命题 1.3.1.

定义 1.3.4 设 $\nu \in \mathcal{M}_+$ 是一个非平凡测度,且存在集 $B \in \mathcal{F}^+$, 使得 $\nu(B) < +\infty$, 称 ν 是马氏链 $\{X_n\}$ 的一个 次不变测度, 如有

$$\nu(A) \geq \int_{\mathcal{X}} \nu(dx)P(x, A), \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

若还有等式成立, 也即有 $\nu = \nu P$, 那么称 ν 是 $\{X_n\}$ 的一个 不变测度.

命题 1.3.3 对 φ- 不可约链 $\{X_n\}$, 设 ν 为其一个次不变测度, 则 ν 必为 σ- 有限测度, 且 $M \ll \nu$.

证明: 由 ν 的次不变性, 我们有 $\nu \geq \nu P^n, \forall n \geq 0$, 并且 $\exists B \in \mathcal{F}^+$, 使得 $\nu(B) < +\infty$.

任取 $0 < r < 1$, 令 $G^{(r)} = \sum_0^\infty r^n P^n$, 由 $\{X_n\}\varphi$- 不可约, 有 $G^{(r)}(x, B) = \sum_0^\infty r^n P^n(x, B) > 0, \forall x \in \mathcal{X}$.

记 $A_n = \left\{x \in \mathcal{X} | G^{(r)}(x, B) > \frac{1}{n}\right\}$, $n = 1, 2, \cdots$. 则 $\mathcal{X} = \bigcup_1^\infty A_n$, 并且对 $\forall n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\nu(A_n) &\leq n \int_{A_n} \nu(dx)G^{(r)}(x, B) \\
&\leq n \int_{\mathcal{X}} \nu(dx)G^{(r)}(x, B) \\
&= n \sum_0^\infty r^n \nu P^n(B) \\
&\leq n\nu(B) \sum_0^\infty r^n < +\infty
\end{aligned}$$

因此 ν 为 σ- 有限测度.

此外, 如果对某 $A \in \mathcal{F}$, 有 $\nu(A) = 0$, 则由 $\nu \geq \nu P^n, n \geq 0$, 可得 $\nu G(A) = 0$, 从而必有 $M(A) = 0$. 这就证明了 $M \ll \nu$.

关于次不变及不变测度的存在问题，有下面的结论成立.

定理 1.3.2 (i) 对任意 φ- 不可约链 $\{X_n\}$, 一定存在与 M 等价的次不变测度；

(ii) 如果 $\{X_n\}$ 是一个常返链，则除一个常数因子外，存在唯一的不变测度 ν, 并且有 $\nu \sim M$;

(iii) 如果 $\{X_n\}$ 为正常返链, 则存在唯一的不变概率测度.

定理中的 (i) 可由 Nummelin(1984) 定理 3.2 、命题 5.7 以及定理 5.2 推得，定理的 (ii) 、(iii) 部分参见 Nummelin(1984) 推论 5.2 以及 Tweedie(1976) 命题 4.3.

对 φ- 不可约链 $\{X_n\}$, 下面我们总以 ν 表示 $\{X_n\}$ 的一个次不变测度，并记

$$\mathcal{F}_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathcal{F}^+ | 0 < \nu(A) < +\infty\} \tag{1.3.5}$$

$\mathcal{F}_\nu$ 中的集具有下面的良好性质.

命题 1.3.4 设 $\{X_n\}$ 为一个 φ- 不可约链， $A \in \mathcal{F}_\nu$, 则

(i) 如有 $G(x,A) \equiv +\infty, \forall x \in A^c$, 那么 $\{X_n\}$ 一定为常返链；

(ii) 如有 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} P^n(x,A) > 0, \forall x \in A^c$, 那么 $\{X_n\}$ 一定为正常返；

(iii) 如有 $h_A^\infty(x) \equiv 1, \forall x \in \mathcal{X}$, 那么 $\{X_n\}$ 一定为 Harris 常返.

命题中的 (i) 、(ii) 参见 Tweedie(1976) 引理 5.1 及命题 5.1, 命题中的 (iii) 参见 Nummelin(1984) 定理 3.7(vii). 上述命题表明，$\mathcal{F}_\nu$ 中的集合具有一种“代表性”，也即该集合所具有的某些特性为整个链所共享，我们把这样的集合也称为是 $\{X_n\}$ 的 势态集(status set). 由于 $\mathcal{F}_\nu$ 依赖于次不变测度 ν, 而 $\{X_n\}$ 的次不变测度不一定唯一，因此 $\mathcal{F}_\nu$ 的结构不甚明了，为此有必要对这种所谓的势态集做进一步的分析，我们下面就给出所谓的 s- 集 (small set) 的定义.

定义 1.3.5 某集 $A \in \mathcal{F}^+$ 称为是 $\{X_n\}$ 的一个 s- 集, 如果它满足如下的 $M(m_0,\lambda)$ 条件： $\exists m_0 \geq 1$ 以及 $(\mathcal{X},\mathcal{F})$ 上的概率测度 λ, 使得对 $\forall x \in A$, 有 $P^{m_0}(x,\cdot) \geq \lambda(\cdot)$.

易知，在 $M(m_0,\lambda)$ 条件下， λ 一定也是 $\{X_n\}$ 的一个不可约测度，从而一定有 $\lambda \ll M$.