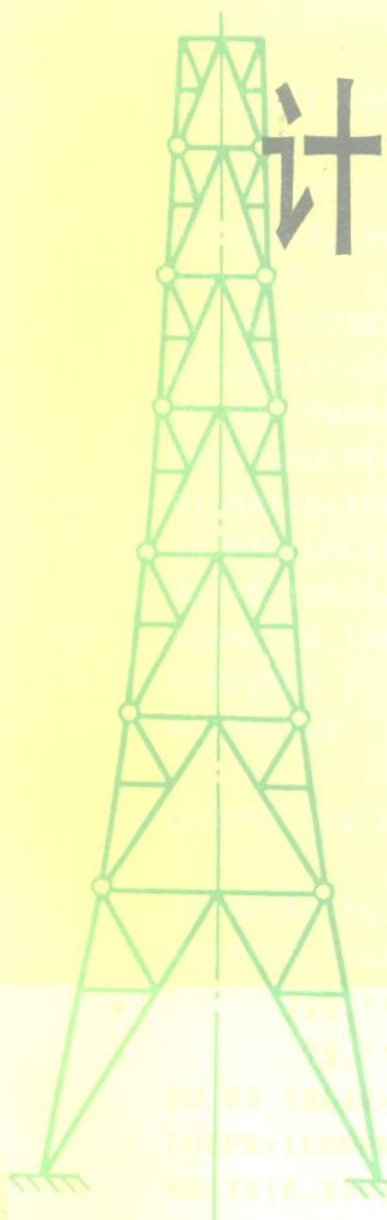


结构计算机分析丛书

杆系结构的 计算机分析

冯紫良 戴仁杰 编著



同济大学出版社

杆系结构的计算机分析

冯紫良 戴仁杰 编著

同济大学出版社

内 容 提 要

为适应微机在结构分析中的应用和发展,本书从能量原理出发,导出了以有限元法计算梁、平面和空间桁架、刚架及格栅等常用结构的计算公式,较详尽地介绍了一些计算技巧和某些平面问题中的特殊课题(如弹性地基梁、影响线、温度变化和曲梁结构等)的计算机分析方法。书中专门阐述了程序研制的原则和方法,并附有梁、平面桁架、框架、弹性地基梁等应用程序实例。全书内容简明实用。本书可作为大专院校工程结构等有关专业的教学用书,也可作为广大工程技术人员和从事计算机结构分析的有关人员的参考用书。

责任编辑 司徒妙龄

封面设计 王 肖 生

杆系结构的计算机分析

冯紫良 戴仁杰 编著

同济大学出版社出版

(上海四平路 1239 号)

新华书店上海发行所发行

同济大学印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张12.75 字数 321 千字

1991年12月第 1 版 1991年 12月第 1 次印刷

印数 1—2100 定价 4.50元

ISBN7-5608-0780-1/TU·96

前 言

近十余年来,随着计算机在我国的普及和它在结构分析中的普遍应用,已使大学结构分析课程的教材发生了重大的变革。对于杆件系统结构分析来说,由于矩阵结构分析的简捷与明了,致使目前多数有关教材都是基于矩阵结构分析原理来编写的。但是在从事了多年的教学、科研和咨询工作后,我们感到,随着对工程结构分析的深入研究和学习,除杆系结构本身外,同时会遇到许多其他领域的工程问题:如板壳结构问题,实体结构问题,与周围环境之间的耦合作用问题(如与水、土、温度和电磁场等等的耦合作用)。这时,原来的矩阵结构分析已经不敷应用,从而再转向于更为有效的有限单元法。为此,笔者就产生了以力学中最基本的能量原理出发,直接用有限元理论来阐述全部杆件系统的结构分析的设想。这样的学习途径,可能使读者在初学杆件系统结构分析时稍感费劲一些,但是对于以后的进一步发展来说,将大有裨益。因为,对于在将要接触到的、更为深刻的结构分析领域的课题来说,在这里几乎已经学就了全部的基本概念和方法——有限元法。而在所有其他领域中的应用,仅仅是形式上的不同而已。

本书在第一章中简要地阐述了有限元结构分析所必需的一些基本力学概念与基础数学知识。在第二章中以轴向受力杆件结构为中心详细地介绍了有限元法的原理和实施过程。在第三章中以受弯杆件结构为例,进一步地深入介绍有限元法的基本理论和实施方法。第四章主要介绍利用结构的特征、总刚度方程的组装技术和把结构的几何不完善转化为结点荷载等技巧来进一步扩大计算程序的使用范围。第五章阐述了工程中经常遇到的一些平面问题中的特殊课题:扭转、弹性地基梁、温度变化、影响线计算、曲梁等的计算方法。第六章为有限元法在空间杆系结构计算中的应用。

从第一章至第三章是本书的基础理论。而第四章至第六章则是前述基础理论在各个特定领域中的应用,其内容也比较独立,初学者可根据需要选学其中的部分章节内容。

鉴于解方程在计算机结构分析中的重要性,第七章集中阐述了方程组的数值解法。这里主要阐述了计算程序中常用的高斯直接消去法,计算数据的等带宽与变带宽存放方法及其应用,方程组解答的误差的检查和控制。

有限元结构分析的实践,最终取决于学者在计算机上解决实际问题的能力。本书第八章集中阐述了程序研制的原则和具体方法,并且较为详尽地介绍了各类基本结构的计算程序。实践证明,读者经过认真学习这些程序及其研制的方法后,将能编制出他们自己的程序,以适应在工作和学习中所遇到的各种新的需要。

笔者编写本书的目标是使读者通过对本书的学习能够同时达到:1)对杆件系统结构分析理论及有限元法的概念和原则的理解;2)能应用有限元法研制和使用杆系结构分析程序。但本书也可适应不同读者层次的需要,对于那些急于应用本书程序,解决实际问题的读者来说,可以把阅读重点放于第八章的程序使用说明部分。

为学好本书的理论内容和掌握程序研制技术,要求读者具有材料力学、矩阵数学及

Fortran 计算机语言的基础知识。但本书在阐述时力求简明, 不追求过于深奥的理论探讨, 而把重点放在如何解决实际工程问题上。

限于编著者的水平, 书中错误和不妥之处难免, 恳请读者批评指正。

编 者
1990. 6

目 录

前言

第一章 概念与预备知识	(1)
§ 1.1 引言	(1)
§ 1.2 内力与位移的关系式	(2)
§ 1.3 结构体系的总势能	(3)
§ 1.4 泛函极值的近似解法	(5)
习题	(11)
第二章 轴向受力结构	(12)
§ 2.1 引言	(12)
§ 2.2 应用线性单元的有限元解法	(12)
§ 2.3 有限元法小结	(20)
§ 2.4 平面桁架结构	(22)
习题	(25)
第三章 梁和框架结构	(27)
§ 3.1 引言	(27)
§ 3.2 纯弯梁	(27)
§ 3.3 平面刚架结构	(33)
§ 3.4 厚梁	(36)
§ 3.5 等参数单元	(41)
§ 3.6 数值积分	(45)
习题	(47)
第四章 平面问题中的若干计算技巧	(49)
§ 4.1 引言	(49)
§ 4.2 对称结构	(49)
§ 4.3 正交刚架的近似算法	(51)
§ 4.4 特殊结点	(54)
§ 4.5 复合单元	(58)
§ 4.6 结构的几何不完善性	(62)
§ 4.7 倾斜支座	(65)

习题.....	(68)
第五章 平面问题中的特殊课题.....	(69)
§ 5.1 引言.....	(69)
§ 5.2 扭转.....	(69)
§ 5.3 弹性地基梁.....	(71)
§ 5.4 支座沉陷和弹性支座.....	(73)
§ 5.5 温度变化.....	(75)
§ 5.6 影响线.....	(77)
§ 5.7 曲杆结构.....	(79)
习题.....	(83)
第六章 空间结构.....	(84)
§ 6.1 引言.....	(84)
§ 6.2 空间杆件的内力和位移.....	(84)
§ 6.3 空间刚架结构.....	(86)
§ 6.4 空间桁架结构.....	(91)
§ 6.5 平面网格结构.....	(96)
习题.....	(99)
第七章 方程组解法.....	(101)
§ 7.1 引言.....	(101)
§ 7.2 高斯消去法原理.....	(101)
§ 7.3 解法的改进.....	(105)
§ 7.4 误差问题.....	(111)
习题.....	(115)
第八章 计算程序的研制.....	(117)
§ 8.1 有限元程序的研制方法.....	(117)
§ 8.2 轴力结构程序 AXIBAR.....	(122)
§ 8.3 纯弯梁程序 BEAM.....	(151)
§ 8.4 平面框架程序 FRAME.....	(160)
§ 8.5 弹性地基梁程序 BEAMK.....	(174)
附录一 程序数据准备指南.....	(190)
附录二 标识符一览表.....	(192)
参考文献.....	(195)

第一章 概念与预备知识

§ 1.1 引言

结构工程是关于结构的构思、设计和施工制造的一门学问,而结构分析则是整个结构工程建设过程中不可分割的部分。结构分析的任务是预言结构在周围环境作用下所表现出来的各种反应,周围环境对结构的作用可以包括荷载、指定的位移和温度的变化等等。结构对这些环境作用的反应可以用位移、应变、应力和内力等的变化来度量。

对结构反应的预言通常都是根据一个适当的数学模型来作出的。这种预言的准确程度取决于选取的模型与结构实际性态的吻合程度。因而,对于结构工程师来说,弄清各种模型的使用范围是至关重要的。为此,必须对各种数学模型的组成内容和特点有所了解。

结构分析的数学模型由下列三个要素组成:平衡条件、相容条件和本构关系。平衡条件是处于平衡状态下的结构所必须满足的力学条件。平衡状态的数学表达式可以用牛顿定律或各种能量原理来建立。如果结构处于运动之中,则平衡条件可以用牛顿运动定律来表达。相容条件表示结构的几何性质,如构件变形的连续性,构件间的联结和结构边界约束的连续性等。本构关系描述材料的力学性态。例如虎克定律就是反映理想的线弹性材料性态的一种本构关系。

通常,可以取位移或力作为结构分析的基本未知量。前者称为位移法,后者称为力法。对于在计算机上的实现来说,位移法较为方便,并已得到了普遍的采用。因而,本书将要讨论的方法也是位移法。位移法的数学模型是先通过相容条件建立应变与位移的关系,再通过本构关系建立应力与位移间的联系,最后通过平衡条件建立外荷载与基本未知量——位移间的直接关系式。

在接受了上述数学模型的假定后,真实的结构系统具有无限多个未知量,或者说结构系统是由无限多个自由度组成的。如果考虑构件材料是由无限多个自由度组成,那么,这种荷载位移关系式一般都只能以微分方程来表达,这种模型称为连续模型。如果再作进一步简化,把结构系统考虑为仅由若干个有限个数的自由度组成,那么,荷载位移关系式就可以用代数方程来表达了,这种模型称为离散模型。

连续模型在理论上比较精确,而且是后者的理论基础,但是不适合于计算机分析。离散模型是一种近似方法,但是随着选取的自由度个数的增加,可以无限趋近于连续模型的计算结果。离散模型特别适合于计算机分析,而且,工程实践证明:即使选取较少的自由度来模拟结构,其计算结果往往也仍能满足工程实践的精度要求。

§ 1.2 内力与位移的关系式

杆件的内力与位移间的关系式的导出,是建立计算模型的重要环节。为建立内力与位移关系式,可首先根据相容条件确定杆件应变与位移间的关系,然后通过杆件的相应材料的本构模型建立内力与位移的直接联系。本节以杆件结构系统中两种最基本的杆件变形类型:轴向变形和弯曲变形为例,来说明建立结构构件的内力与位移间关系式的方法。

1.2.1 轴向变形模型

设有一轴力杆上作用有分布轴向荷载 $q(x)$ 和若干集中轴向力 $P_i (i=1, 2, \dots, n)$, n 为集中轴向力的个数(图 1.1)。杆件材料为服从虎克定律的均质线弹性材料。

相容条件

在图 1.1 上截取任一微段 dx , 其端点分别为 P 和 Q 。变形以后微段的位置移至 P' 、 Q' 。显然微段 P 点的位移为 $u(x)$, 而 Q 点的位移为 $u(x) + du(x)$ 。因而应变与位移关系为

$$\varepsilon(x) = \frac{P'Q' - PQ}{PQ} = \frac{du(x)}{dx} \quad (1-1)$$

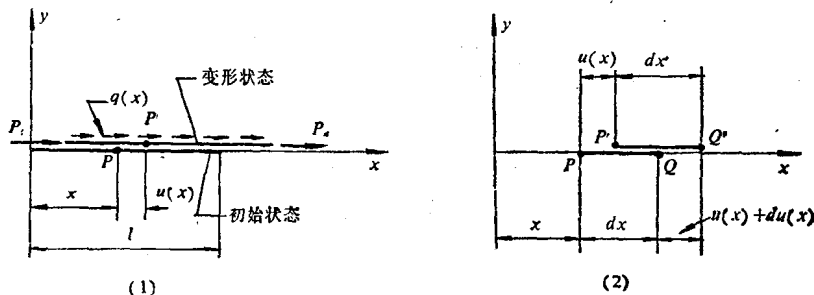


图 1.1 轴向变形

式中 $\varepsilon(x)$ 是杆件任意点 x 处的拉伸应变,以受拉为正。 $u(x)$ 为该点处的轴向位移。

本构关系

即是虎克定律

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1-2)$$

式中 σ 为横截面的法向应力, E 是材料的弹性模量。

以式(1-1)代入式(1-2)即得

$$\sigma = E \frac{du(x)}{dx} \quad (1-3)$$

根据材料力学轴力杆应力均匀分布的假定,可知截面内力 N 为

$$N = \sigma A = EA \frac{du(x)}{dx} \quad (1-4)$$

式中 A 为轴力杆的横截面面积。

1.2.2 纯弯曲变形模型

设一梁上作用有分布的横向荷载 $q(x)$ 和集中力 P_a, M_a, P_b, M_b 。如图 1.2(1) 所示(本书中术语“力”均为广义力,即为包括了力和力矩两种力素的广义用语)。所有的荷载均作用于梁的纵向对称平面内,且梁的变形符合材料力学中的中和轴假定和平面变形假定。因而

梁形状的变化,可以由形心轴的形状变化来完全地确定。

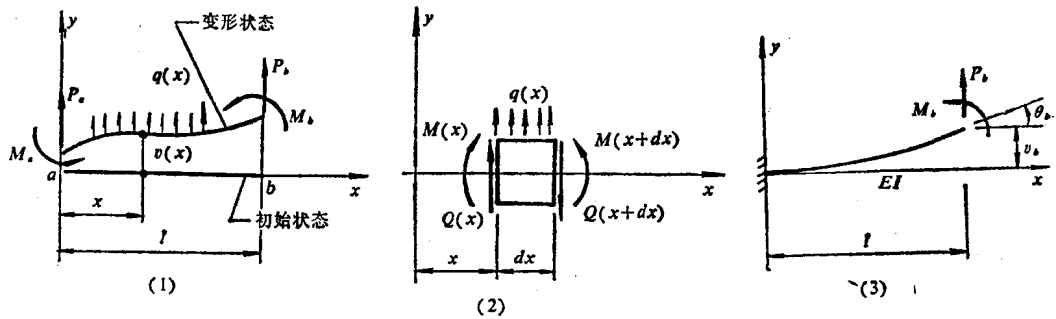


图 1.2 纯弯曲变形

相容条件

由于梁的弯曲变形,横截面上的正应变 ε 将沿着截面的高度 y 按直线规律变化

$$\varepsilon(x, y) = -y \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \quad (1-5)$$

式中正应变 ε 以拉伸者为正,而横向变位 $v(x)$ 以与 y 轴一致者为正。

本构关系

材料性质仍然服从虎克定律

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1-6)$$

由式(1-5)和式(1-6)得应力位移表达式

$$\sigma = -E \frac{d^2 v(x)}{dx^2} y \quad (1-7)$$

截面上的轴向内力和弯矩可由正应力 σ 沿截面积分而得

$$N = \iint_A \sigma dA = 0 \quad (1-8)$$

$$M = - \iint_A \sigma dA y \quad (1-9)$$

式中轴向内力 N 与弯矩的正负号规定见图 1.2(2)。以应力位移表达式(1-7)代入式(1-8)和(1-9)即得内力位移公式

$$N = -E \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \iint_A y dA = 0 \quad (1-10)$$

$$M = E \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \iint_A y^2 dA = EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \quad (1-11)$$

式中 I 为绕形心轴的横截面惯性矩

$$I = \iint_A y^2 dA \quad (1-12)$$

§ 1.3 结构体系的总势能

在外荷载作用下结构体系发生变形的过程中,外荷载做了功 W ,或者说外荷载失去了

势能 V_e ，同时，结构系统的内能获得增加。弹性结构系统的内能变化可以用应变能 U 来度量。结构系统的总势能可以由它的应变能与外力势能两部分叠加而得

$$I = U + V_e \quad (1-13)$$

1.3.1 应变能

对于一个绝热的过程来说，根据能量守恒定律，外力所做的功 $\bar{W}_e$ 将转化为结构系统的动能 ΔT 和应变能 U ，即

$$\bar{W}_e = \Delta T + U \quad (1-14)$$

而根据动能定律则有

$$\bar{W}_e + W_i = \Delta T \quad (1-15)$$

式中 W_i 是内力所做的功。

比较式(1-14)，式(1-15)，可知

$$W_i = -U \quad \text{或} \quad U = -W_i \quad (1-16)$$

上式表示内力所做的功等于弹性结构系统所失去的应变能，或者说应变能等于弹性结构系统内力所做的负功。下面就根据结构内力功来推导出应变能的计算表达式。

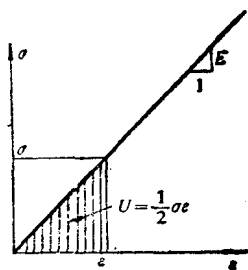


图 1.3 应变能

按上述定义，结构应变能的一般表达式可以写成

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma \varepsilon d\Omega \quad (1-17)$$

式中 Ω 为结构系统的计算域，对于等截面的杆系结构有

$$d\Omega = A dx \quad (1-18)$$

注意式(1-17)中，含有乘数 $1/2$ 。这是由于结构在变形过程中应力与应变是由零值增加至最终值的，如图 1.3 所示。

轴向受拉杆件的应变能 U_t 的计算公式可以由式(1-3)、式(1-1)和式(1-18)代入式(1-17)得到

$$\begin{aligned} U_t &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma \varepsilon d\Omega = \frac{1}{2} \int_l \left(E \frac{du}{dx} \right) \left(\frac{du}{dx} \right) A dx \\ &= \frac{1}{2} \int_l EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (1-19)$$

把式(1-7)、式(1-5)和式(1-18)代入式(1-17)，可得到纯弯杆件的应变能 U_b 的计算公式

$$\begin{aligned} U_b &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma \varepsilon d\Omega = \frac{1}{2} \int_l \left(-E \frac{d^2 v}{dx^2} y \right) \left(-y \frac{d^2 v}{dx^2} \right) dA dx \\ &= \frac{1}{2} \int_l E \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 (y^2) dA dx \end{aligned} \quad (1-20)$$

由杆件横截面惯矩的定义式(1-12)，即可写出相应于纯弯杆件的应变能 U_b 的表达式

$$U_b = \frac{1}{2} \int_l EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx \quad (1-21)$$

杆件中同时产生有轴向变形和弯曲变形时，应变能可以由式(1-19)、式(1-21)分别计算后叠加而得，而结构系统的总应变能 U 可由各杆件的应变能累加而得。

$$U = \Sigma U_i + \Sigma U_b = \Sigma \frac{1}{2} \int EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx + \Sigma \frac{1}{2} \int EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx \quad (1-22)$$

平面杆系中除了上述两种应变能外, 还可能需要考虑剪切应变能 U_s 和扭转应变能 U_t 。对于空间杆系, 也可得到相类似的公式。这在后述的有关章节中还会提到。

1.3.2 外力功

平面杆系结构上常见的荷载有以集中形式作用的力和力矩以及以分布形式作用的分布力和分布力矩。对于集中形式作用的静荷载在结构变形中所做的功, 可按物理学中做功的定义直接由荷载值乘以沿该荷载作用方向所产生的(广义)位移得到。如在轴力 P , 横向力 Q 和弯矩 M 作用下的功分别为 Pu , Qv 和 $M\vartheta$ 。这里 u , v , ϑ 分别为在力 P , Q , M 作用点处, 沿相作用力方向的(广义)位移。结构系统的外力功可以由各杆件的外力功计算后相累加而得

$$\sum_{i=1}^m P_i u(x_i) + \sum_{j=1}^n Q_j v(x_j) + \sum_{k=1}^p M_k \vartheta(x_k) \quad (1-23)$$

式中 m, n, p 分别为轴向力、横向力和集中力矩的作用个数, 而 x_i, x_j, x_k 分别为它们的作用点坐标。

分布荷载的外力功计算原理同上述相类似, 只是需沿杆长积分而已。如杆件在轴向分布力 $q_x(x)$, 横向分布力 $q_y(x)$ 和分布弯矩 $m(x)$ 共同作用下的外力功可由下式计算

$$\int_l q_x u dx + \int_l q_y v dx + \int_l m \vartheta dx \quad (1-24)$$

结构系统中同时作用有各种集中的和分布的荷载时, 可分别按有关的荷载项逐个计算相应的外力功, 然后叠加而得系统的外力功。

1.3.3 最小势能原理

如前所述, 外荷载在结构变形中所做的功 W_e , 可以视为外力在结构变形中所失去的势能 V_e 。外力势能 V_e 的计算公式与外力功相仿, 只是符号相反, 即

$$V_e = -W_e \quad (1-25)$$

这样, 结构在变形过程中的总势能 Π 就可以由结构的内应变势能和外力势能两部分组成

$$\Pi = U + V_e \quad (1-26)$$

最小势能原理告诉我们: 满足已知约束条件的所有可能位移场中, 结构的真实状态即满足平衡条件的状态将使结构的总势能为极小。

由前述可知, 在建立以基本未知量(位移) D 表示的总势能表达式时已考虑入了相容条件与材料的本构关系。此时如果能找到一组位移值 D^* , 并能使结构的总势能达到极小值, 则必将使平衡条件得到满足。显然, 这一组位移值 D^* 便是真实位移的解答。

§ 1.4 泛函极值的近似解法

在前面的叙述中, 我们遇到了如下形式的积分形式(见式(1-19)、式(1-20)等)

$$I(u) = \int_l F(x, u, u') dx \quad (1-27)$$

其中被积函数 $F(x, u, u')$ 是一个以 x, u 和 $u' (= du/dx)$ 为自变量的给定函数, 而积分值 $I(u)$, 则取决于 u 。对于给定的 u , $I(u)$ 是个标量。这里应用术语“泛函”来描述自变量本身是函数

的一种积分形式的函数。

结构的几何形状、材料性质和外荷载如果是以连续分布的形式存在和变化,那么,寻找位移未知量的精确解答显然是属于解无限自由度的问题。对于这类问题,通常可以用解微分方程的方法来寻找其解答。但是在现代的许多实际工程中,由于几何形状和材料性质的分布和边界条件的复杂性,要进行这类分析常常是非常困难的,甚至是不可能的。因而出现了许多以有限自由度问题来近似无限自由度问题的数学方法。本节介绍其中一些主要的方法:里兹法和伽辽金法。尽管对于某些读者来说,这些内容有些乏味,但是读懂本节的内容将会有益于加深对以后各章中所用的有限单元法的理解。

1.4.1 里兹法

里兹法的实质是寻找一个具有下列形式的、能使泛函 $I(u)$ 取得极小值的近似解

$$u_n = \sum_{j=0}^n a_j \phi_j(x) \quad (1-28)$$

式中 a_j 为里兹系数,可以按照泛函的极值条件来选择, $\phi_j(x)$ 为 (预先选定的) x 的已知函数。注意在选择近似解函数时,必须使 u_n 先满足问题的边界条件。把 u_n 代入泛函 $I(u)$ 后,可以发现 $I(u_n)$ 是一个仅依赖于有限个自由度 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 的函数。为使 I 取得极值,必有

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0, \quad i=0, 1, \dots, n \quad (1-29)$$

由上式可以得到一组具有 $n+1$ 个未知数 $a_i (i=0, 1, \dots, n)$ 的 $n+1$ 个线性方程组。由此即可解得里兹系数,从而,得近似解 u_n 。

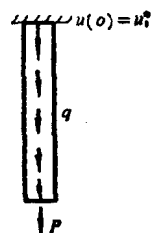
对于所得到的近似解,我们希望,当 n 增加时,也即是未知量的自由度数目增加时,函数 $u_n(x)$ 将收敛于真实解 $u(x)$ 。收敛条件的数学表示式是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int [u(x) - \sum_{j=0}^n a_j \phi_j(x)]^2 dx = 0 \quad (1-30)$$

对于线性问题来说,为保证里兹解的收敛性, ϕ_j 的选择必须符合下列要求:

1. ϕ_j 要满足泛函数的可微性要求;
2. ϕ_j 要满足问题的几何边界条件; $\phi_j (j=1, 2, \dots, n)$ 至少要满足问题的几何边界条件的齐次形式的要求;
3. ϕ_j 是完备的。

例 1.1 等截面轴力杆



一轴力杆如图 1.4 所示,作用有均布荷载 q 。在 $x=0$ 处有指定位移 u_0^* , 在 $x=l$ 处作用有集中轴向力 P 。

由式(1-19)可知其能量函数为

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_0^l EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^l q u dx - P u(l) \quad (1)$$

根据收敛条件,取 $\phi_j = x^j$, 即里兹近似式为

$$u_n = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

图 1.4 等截面轴力杆

而

而

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$$

先取 $n=1$, 即

$$u_1(x) = a_0 + a_1x \quad (2)$$

$$\frac{du_1}{dx} = a_1 \quad (3)$$

根据边界条件可知

$$u_1(x=0) = a_0 = u_1^*$$

把式(2)和式(3)代入泛函表达式后, 可得到

$$\begin{aligned} I(u_1) &= \frac{1}{2} \int_0^l EA a_1^2 dx - \int_0^l (a_0 + a_1x) q dx - P(a_0 + a_1l) \\ &= \frac{1}{2} EA a_1^2 l - qa_0l - qa_1 \frac{l^2}{2} - P(a_0 + a_1l) \end{aligned}$$

对 I 取极值

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = EA a_1 l - \frac{ql^2}{2} - Pl = 0$$

解得

$$a_1 = \left(\frac{ql}{2} + P \right) / EA$$

如果 $u_1^* = 0$, 则近似位移场可由下式来表达

$$u_1(x) = \frac{x}{EA} \left(\frac{ql}{2} + P \right)$$

而本题位移场的精确解是下列形式的二次函数

$$u(x) = \frac{Px}{EA} + \frac{q}{EA} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right)$$

因而再取更高次数的近似解

$$u_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (4)$$

$$\frac{du_2}{dx} = a_1 + 2a_2x \quad (5)$$

将式(4)、式(5)代入能量公式, 并根据几何边界条件与最小势能原理, 易于求得

$$a_0 = u_1^*$$

和当 $u_1^* = 0$ 时的近似位移场

$$u_2(x) = \frac{Px}{EA} + \frac{q}{EA} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right)$$

由轴力杆的内力位移公式(1-4)可得 $x=0$ 处的支座反力为

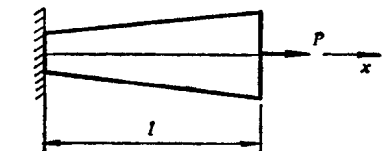
$$N = EA \frac{du}{dx} = P + ql$$

注意此处的近似位移场同精确解已完全一致了。

例 1.2 截面按线性变化的轴力荷载杆

设轴向受力杆件在 $x=0$ 处有指定位移 u^* 产生, 而在 $x=l$ 处作用有集中轴向力 P

截面面积 A_0 截面面积 $2A_0$ (图1.5)。杆件的截面积按下式线性地变化



$$A(x) = A_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right)$$

现设位移场的近似解为

$$u_1(x) = a_0 + a_1 x$$

$$du_1/dx = a_1$$

图 1.5 变截面轴力杆

因而得总势能的表达式为

$$I(u_1) = \frac{1}{2} \int_0^l EA_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right) a_1^2 dx - P(a_0 + a_1 l)$$

由位移边界条件 $u_1(x=0) = u^*$ 可知

$$a_0 = u^*$$

又由总势能的极值条件

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = \frac{3EA_0 a_1 l}{2} - Pl = 0$$

得

$$a_1 = \frac{2P}{3EA_0}$$

如果 $u^* = 0$, 则有

$$u_1(x) = 0.6667 \frac{Px}{EA_0}$$

而 $x=l$ 处的精确解是 $0.6932 \frac{Pl}{EA_0}$ 。

如果选用二阶的位移场近似函数

$$u_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

可得到较为精确的解答

$$u_2(x) = \frac{12Px}{13EA_0} - \frac{3Px^2}{13EA_0 l}$$

其在 $x=l$ 处的值为

$$u_2(l) = 0.6923 \frac{Pl}{EA_0}$$

显然较 $u_1(l)$ 精确得多了。

1.4.2 加权余数法

里兹法提供了一个非常有效的、寻求泛函极值问题近似解的方法。这对复杂工程的结构分析具有重要意义。但是它的应用首先取决于类似于总势能的泛函的存在, 加权余数法是里兹法的推广, 应用加权余数法可以从描述工程问题的微分方程直接获得近似解。

设描述工程问题的微分方程为

$$L[u(x)] - g(x) = 0 \quad (1-31)$$

其中 L 是一个微分运算符, $g(x)$ 为一给定的函数。

加权余数法是寻找这样的一组解

$$u_n = \sum_{j=1}^n a_j \phi_j$$

或

$$u_n = \sum_{j=1}^n a_j \phi_j + \phi_0 \quad (1-32)$$

其中 ϕ_0 须满足问题指定的边界条件, 如为齐次边界条件, 则令 $\phi_0 = 0$, 对 ϕ_j 的要求同里兹法的式(1-30)。

由于寻求而得的解答是近似的, 把解式(1-32)代入原微分方程将产生余差(即是方程的误差)

$$E = L(u_n) - g(x) \neq 0 \quad (1-33)$$

当 ϕ_0, ϕ_j 选定后, E 仅仅是基本变量与参数 a_j 的函数。加权余数法是用设近似解的加权余差的积分为零的方法来确定参数 a_j 的, 即

$$\int_0^l E(x, a_j) \psi_r(x) dx = 0 \quad r = 1, 2, \dots, p \quad (1-34)$$

式中 ψ_r 是权函数。一般说来, 权函数 ψ_r 与近似解 ϕ_j 可以分别选取为不同形式的函数。显然 ψ_r 必须是一组相互线性独立的函数, 否则所提供的方程组(1-34)将不是线性独立的, 问题无解。

当权函数选为与近似解函数 ϕ_j 相同时, 这就是著名的伽辽金法。此时式(1-34)为

$$\int_0^l L(\phi_0(x) + a_1 \phi_1(x) + \dots + a_n \phi_n(x)) - g(x) \phi_r(x) dx = 0 \quad (1-35)$$

例 1.3 等截面悬臂梁的伽辽金解

设等截面悬臂梁承受有均布的横向荷载 q 的作用, 另在悬臂端作用有力矩 M_0 。

由材料力学知道, 问题的微分方程为

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) + q = 0$$

而边界条件为

$$v(0) = \frac{dv}{dx}(0) = 0, \quad \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \Big|_{x=l} = M_0,$$

$$\left[\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \right]_{x=l} = 0$$

按式(1-34)取解的加权余差为零

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^l \psi \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) + q \right] dx \\ &= \int_0^l \left[\left(-\frac{d\psi}{dx} \right) \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) + \psi q \right] dx + \left[\psi \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \right]_0^l \\ &= \int_0^l \left[EI \frac{d^2 \psi}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} + \psi q \right] dx + \left[\psi \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - \frac{d\psi}{dx} EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right]_0^l. \end{aligned}$$

上式最后一项中, 对 v 和 dv/dx 的指定构成了问题的几何边界条件, 而对 $(d/dx)(EI d^2 v/dx^2)$ (剪力)和 $EI d^2 v/dx^2$ (弯矩)的指定构成了问题的自然边界条件。在本题中的几何边界

条件是

$$v(0) = \frac{dv}{dx}(0) = 0$$

因而就要求权函数

$$\Psi(0) = \frac{d\Psi}{dx}(0) = 0$$

自然边界条件是

$$\left[\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \right]_{x=l} = 0 \quad \left(EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \Big|_{x=l} = M_0$$

于是得到

$$0 = \int_0^l \left[EI \frac{d^2 \Psi}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} + \Psi q \right] dx - \frac{d\Psi}{dx} \Big|_{x=l} M_0$$

或简记为

式中

$$B(\Psi, v) = L(\Psi)$$

$$B(\Psi, v) = \int_0^l EI \frac{d^2 \Psi}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx$$

$$L(\Psi) = - \int_0^l \Psi q dx + \frac{d\Psi}{dx} \Big|_{x=l} M_0 \quad (1)$$

根据边界条件, 设近似解 v_n 和权函数 Ψ_i 为

$$v_n(x) = \sum_{j=1}^n a_j \phi_j, \quad \Psi_i = \phi_i = x^{i+1} \quad (2)$$

将式(2)代入式(1), 当 q 为常数时, 有

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \int_0^l EI(i+1)ix^{i-1}j(j+1)x^{j-1}dx a_j \\ &= \left(\frac{EIij(i+1)(j+1)(l)^{i+j-1}}{i+j-1} \right) a_j \end{aligned}$$

$$L(\phi_i) = -\frac{ql^{i+2}}{i+2} + M_0(i+1)(l)^i$$

对于 $n=2$ 时, 有下列方程组

$$EI(4la_1 + 6l^2a_2) = -\frac{ql^3}{3} + 2M_0l$$

$$EI(6l^2a_1 + 12l^3a_2) = -\frac{ql^4}{4} + 3M_0l^2$$

解得

$$a_1 = -\frac{5ql^2 - 12M_0}{24EI}, \quad a_2 = \frac{ql}{12EI}$$

近似解为

$$v_2(x) = \frac{12M_0 - 5ql^2}{24EI}x^2 + \frac{ql}{12EI}x^3$$