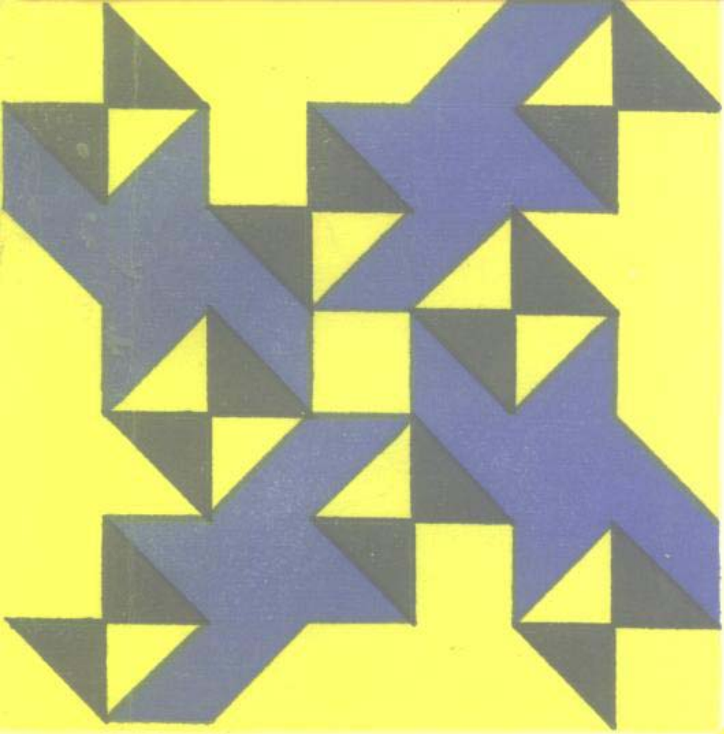

上海交通大学出版社

工科研究生教材

大新　编著

矩阵理论〔修订版〕

JU ZHEN LI LUN

工科研究生教材

矩 阵 理 论

（修订版）

陈大新 编著

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书是根据国家教委课程指导委员会制定的工科硕士研究生《矩阵论》课程教学基本要求编写的。本书主要讲述特征值与特征向量、内积空间与特殊矩阵、Jordan标准型、矩阵分析初步和广义逆矩阵等内容。为了使读者加深理解和巩固知识，本书列举大量的题目，并在每章后都安排一定量的习题。本书可作为大专院校工科研究生的教材，也可作为工程技术人员进一步提高和更新知识的自修教材。

矩阵理论（修订版）
上海交通大学出版社出版、发行
上海市番禺路877号　　邮政编码 200030
全国新华书店经销
上虞市科技外文印刷厂印刷
开本：850×1168（毫米）1/32　　印张：7.625　　字数：195000
版次：1997年4月　第2版　　印次：1997年6月　第1次
印数：1—1800
ISBN 7-313-01753-7/O·110　　定价：11.00 元

修 订 版 前 言

本教材是根据国家教委课程指导委员会制定的工科硕士研究生《矩阵论》课程教学基本要求编写的。由于36学时的限制(＊号部分为学时外参考用)以及学习对象实践性强的特点,在授课时,采取重点讲解;讲清数学论证的思想、几何背景、方法的含义和应用。不拘泥于繁琐的推导。

本书自1992年初版以来,经历了4届研究生的应用,这次修订有如下的改动。

1. 删除了“广义逆矩阵”的过多内容,只保留了 A^+与A^-的材料。同时,A^+的讲授是从一个映射的逆映射的角度出发,给出了A^+的另一个等价的定义。而不是通常由Penrose-Moore四个方程出发。

2. “正定矩阵”的性质方面,给出了实对称矩阵,在k维子空间正定的一个性质:实对称阵A 在k维子空间W上正定$\Longleftrightarrow A$至少有k 个正的特征值。并用它改进了正定矩阵的行列式判别法则的证明。

3. 核对了全部习题的提示及解答,并将课文中部分内容,以习题形式作为补充。取消了练习题的 A, B 分类。

4. 在文字叙述方面作了修改,并删除了一些较繁琐的内容。

本书修订之时,得到本系黄骏敏教授、陆少华教授、李为民博士和系领导的关心与重视,在此谨表示谢意。本着国家教委加强基础教材建设的精神,本书再次作了新的尝试,不足之处望能得到同行的批评、指正。

上海交通大学应用数学系

陈大新

1996于交大百年校庆

主要符号表

$(A)_{ij}$	矩阵A在第i行与第j列交叉处的元。
$A^{(j)}$	矩阵A的第j列。
$A_{(i)}$	矩阵A的第i行。
$e^{(j)}$	$(0,\cdots,1,0,\cdots,0)^T$　第j个分量为1的列向量。
$e_{(i)}$	$(0,\cdots,1,0,\cdots,0)$　第i个分量为1的行向量。
$r(A)$	矩阵A的秩。
$\mathrm{tr}A$	矩阵A的迹。
$r(\sigma)$	线性变换σ的秩。
$\eta(\sigma)$	线性变换σ的零度。
C^n	n维有序复数组构成的线性空间。
R^n	n维有序实数组构成的线性空间。
F^n	n维有序数组构成的线性空间，数取自域F上。
$C_{[a,b]}$	区间$[a,b]$上全体实变量连续函数构成的线性空间。
$R^{m\times n}$	全体$m\times n$型实矩阵构成的线性空间。
$C^{m\times n}$	全体$m\times n$型复矩阵构成的线性空间。
$\mathrm{adj}\ A$	矩阵A的伴随矩阵。
$A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_k \\ j_1\cdots j_k \end{pmatrix}$	矩阵A的k阶子式，它的行标为$i_1\cdots i_k$，列标为$j_1\cdots j_k$。
$N(A)$	矩阵A的零空间。
$R(A)$	矩阵A的像空间（矩阵A的列空间）。
$N(A^T)$	矩阵A^T的零空间。
$R(A^T)$	矩阵A^T的像空间（矩阵A的行空间）。

$\mathrm{Im}\,\sigma$	线性变换σ的像空间。
$\mathrm{Ker}\,\sigma$	线性变换σ的核空间。
$\dim V$	线性空间V的维数。
$\mathrm{diag}(\lambda_1\cdots\lambda_n)$	对角元为$\lambda_1\cdots\lambda_n$的对角阵。
V_λ	由对应于特征值λ的特征向量生成的特征子空间。
$\lambda(A)$	矩阵A的谱。
E_{ij}	位置在(i,j)处为1，其余位置均为零的矩阵。
H_A	矩阵A的Hermite标准型。
$\mathrm{Hom}(V,W)$	由线性空间V至W的线性变换全体构成的集合。
$[\alpha_1\cdots\alpha_k]$	由向量$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_k$生成的子空间。
$J_k(\lambda)$	特征值为λ的k阶Jordan块。
$\Longleftrightarrow$	充分必要。
$\forall$	对所有。
$\exists$	存在有。
◍	证明完毕。

目　录

主要符号表……………………………………………………1

第一章　基础知识……………………………………………1
第一节　矩阵的乘法…………………………………………1
第二节　矩阵的初等变换……………………………………3
第三节　线性空间与线性子空间……………………………12
第四节　线性变换……………………………………………21
习题……………………………………………………………36

第二章　特征值与特征向量…………………………………41
第一节　线性变换的特征值与特征向量……………………41
第二节　特殊矩阵的特征值与 Hamilton-Cayley 定理的应用……48
第三节　最小多项式…………………………………………52
第四节　特征值的圆盘定理…………………………………58
习题……………………………………………………………63

第三章　内积空间与特殊矩阵………………………………69
第一节　内积…………………………………………………69
第二节　正交性………………………………………………74
第三节　Gram-Schmidt正交过程的应用………………………77
第四节　与矩阵A相联系的四个重要子空间…………………83
第五节　复内积空间…………………………………………87
第六节　Schur 定理……………………………………………89
第七节　正规矩阵……………………………………………91

第八节　实对称阵与Hermite阵 ……………………… 95
第九节　正交阵与酉阵 ……………………………………105
*第十节　选定基下内积的表示式 …………………………109
习题 …………………………………………………………111

第四章　Jordan标准型 ………………………………………117
第一节　引言 ………………………………………………117
第二节　不变子空间与导出算子 …………………………119
第三节　幂零矩阵的 Jordan 标准型的计算 ……………123
第四节　Jordan 标准型的计算(一般情形) ……………128
习题 …………………………………………………………138

第五章　矩阵分析初步 ………………………………………144
第一节　矩阵序列 …………………………………………144
第二节　矩阵的幂级数 ……………………………………145
第三节　矩阵函数 …………………………………………154
第四节　e^{At} 的性质与应用 …………………………………158
第五节　矩阵函数的计算 …………………………………164
习题 …………………………………………………………170

第六章　广义逆矩阵 …………………………………………175
第一节　预备知识 …………………………………………175
第二节　A^+ 的定义及其性质 ……………………………177
第三节　A^+ 的计算 ……………………………………………179
第四节　广义逆 A^- 及相容方程的解 ……………………185
习题 …………………………………………………………195

习题的提示与答案 ……………………………………………197

主要参考书目 …………………………………………………233

第一章　基础知识

本章带有复习性质，目的是帮助读者整理一下学习矩阵理论的一些有用的定理与方法。有些定理当作已知，只讲其应用。要求读者仔细学习本章，为后几章学习打下良好的基础。

第一节　矩阵的乘法

矩阵的乘法是矩阵的重要运算之一。如果有$AB=C$，除了要知道如何进行乘法运算之外，还需将重点放在矩阵C的行向量与列向量的结构上，这点在理论上与计算上都是很重要的。下面的矩阵A是$m\times n$型。用$A^{(j)}$表示A的第j列，而$A_{(i)}$表示A的第i行。先从一个简单的结果开始。

1．矩阵乘列向量

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n\end{bmatrix}=$$

$$x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{bmatrix}+\cdots+x_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn}\end{bmatrix}=x_1A^{(1)}+x_2A^{(2)}+\cdots+x_nA^{(n)}。$$

上面的结果表明：矩阵乘一个列向量，其结果是将这个矩阵的列向量进行线性组合。以后，当看到乘积Ax时，便将它看成由A的列向量线性组合而成的向量。组合系数是向量x的各个分量$x_1,\cdots,x_n$。同样，如果将一个行向量左乘矩阵，便得出下面的结果：

$$(y_1\cdots y_m)\begin{bmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1}\cdots a_{mn}\end{bmatrix}=y_1A_{(1)}+y_2A_{(2)}+\cdots+y_mA_{(m)}。$$

共结果是将A的各个行向量进行线性组合，而组合的系数是行向量y的各个分量$y_1, \cdots, y_m$。

例1 (i) $3\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}0\\6\\7\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}5\\-4\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23\\-31\\-26\end{bmatrix}$,

它可写成

$$\begin{bmatrix}1&0&5\\-1&6&-4\\0&7&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23\\-31\\-26\end{bmatrix};$$

(ii) $(-1,0,2)-7(1,1,1)+6(1,2,3)=(-2,5,13)$,

它可写成

$$(1,\ -7,\ 6)\begin{bmatrix}-1&0&2\\1&1&1\\1&2&3\end{bmatrix}=(-2,5,13)。$$

2. $AB=C$,矩阵C的行向量与列向量的结构

由矩阵的乘法可得:

$$C^{(j)}=AB^{(j)}, C_{(i)}=A_{(i)}B。$$

即矩阵C的第j个列向量是由A的列向量线性组合而成，组合系数由B的第j个列向量的各个分量给出。C的第i个行向量是由B的行向量线性组合而成，组合系数由A的第i个行向量的各个分量给出。特别,如果用$e^{(j)}$表示第j个标准单位列向量,$e_{(i)}$表示第i个标准单位行向量,则$Ae^{(j)}=A^{(j)}$, $e_{(i)}A=A_{(i)}$。知道了矩阵乘积的行向量与列向量的构成后，有些矩阵的乘积就很容易得出。

例2 (i) $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&k&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{13}&ka_{12}&a_{11}\\a_{23}&ka_{22}&a_{21}\\a_{33}&ka_{32}&a_{31}\end{bmatrix}$;

(ii) $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\1&b&0\\0&1&-c\end{bmatrix}=$

$$\begin{bmatrix} a_{12} & ba_{12}+a_{13} & -ca_{13} \\ a_{22} & ba_{22}+a_{23} & -ca_{23} \\ a_{32} & ba_{32}+a_{33} & -ca_{33} \end{bmatrix}。$$

下面举例说明上面方法的一些应用。

例3 上三角阵的乘积仍是上三角阵。

现有矩阵：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix}。$$

$AB=C$，只要按C的列向量的构成即可得出结果。因为$C^{(1)}$的第二，三个分量均为零，$C^{(2)}$第三个分量为零。

例4 $AB=O$的意义。

由于$AB^{(j)}=o$，它表明 B 的各个列向量是齐次线性方程组$Ax=o$的解向量。同样，由$A_{(i)}B=o$，它表明A的各个行向量是齐次线性方程组$B^Ty=o$的解向量。

例5 (i) $Ax=b$有解的充要条件。

由方程的等式可知：如果方程有解，表明向量 b 是矩阵A的各个列向量的线性组合。反之，如果 b 是矩阵A 的各个 列向量的线性组合，则可知方程一定有解。因此，方程有解的充要条件是：b是$A^{(1)}A^{(2)}\cdots A^{(n)}$的线性组合。

(ii) $Ax=o$有非零解与唯一解的充要条件。

由等式$Ax=o$，说明要将矩阵A的各个列向量线性组合为零向量。因此，如果A的各个列向量是相关的，则一定有非零解。如果矩阵A的列向量是独立的，则它仅可有零解。显然这些都是充要条件。

第二节　矩阵的初等变换

1．矩阵的初等变换与初等矩阵

矩阵的初等变换，实际上是线性方程组消去法运算的一种 抽象。它包括对矩阵的行(列)施行下面 3 种运算：

(i) 交换矩阵的两行(列)；

(ii) 用一个非零的数乘一行(列)；

(iii) 用一个数乘一行(列)，然后加到另一行(列)去。

在矩阵理论中重要的一点，就是将矩阵施行初等变换，与矩阵乘初等矩阵联系起来。

定义1 对单位矩阵施行一次行或列的初等变换后所得的矩阵称为初等矩阵。

下面是初等矩阵的例子(以三阶矩阵为例)：

$$E_{12}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad E_3(k)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&k\end{bmatrix},$$

$$E_{23}(k)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&k\\0&0&1\end{bmatrix}。$$

E_{12}表示单位阵交换第一、二两行后所得的矩阵(交换第一、二两列得同样的矩阵)。$E_3(k)$表示用一不为零的常数k乘单位阵的第三行(列)所得的矩阵。$E_{23}(k)$表示用k乘单位阵的第三行加到第二行后所得的矩阵(亦为用k乘单位阵的第二列加到第三列)。如果A是一个3阶方阵，由前面所讨论矩阵的乘法容易知道：

($E_{12}A$、$E_3(k)A$、$E_{23}(k)A$的结果为将原施于单位阵的行初等变换施于矩阵A的行上。同样AE_{12}、$AE_3(k)$、$AE_{23}(k)$为将原施于单位阵的列变换施于矩阵A的列上。)

2. 矩阵初等变换的若干结论

命题1 矩阵左乘一个初等矩阵，相当于对矩阵施行行初等变换。矩阵右乘一个初等矩阵，相当于对矩阵施行列初等变换。

如果我们将一个矩阵 A 的非零子式的最大阶定义为矩阵的秩，并记为$r(A)$或r，则有下面的命题。

命题2 施行初等变换，不改变矩阵的秩。

定理1 (初等变换的标准型) 任何一个秩为r的 $m\times n$ 型矩阵A，总存在有非奇异矩阵P、Q使得

$$PAQ=\begin{bmatrix} I_r & \\ & O \end{bmatrix}_{m\times n}。\qquad (1\text{-}1)$$

命题3 A是非奇异矩阵$\Longleftrightarrow A$是初等矩阵的乘积。

3．初等变换的标准型的应用

下面通过实例说明初等变换的标准型的应用。另一方面这些实例在矩阵理论里是一些有用的结果。

例6 矩阵的满秩分解定理。

设A是$m\times n$型矩阵，$r(A)=r$，则一定存在一个$m\times r$型矩阵L与一个$r\times n$型矩阵R，有$r(L)=r(R)=r$，$A=LR$。

证 由初等变换的标准型可以知道：

$$A=\underset{m\times m}{P}\begin{bmatrix} I_r & \\ & O \end{bmatrix}_{m\times n}\underset{n\times n}{Q}=\underset{m\times m}{P}\underset{m\times r}{\begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix}}\underset{r\times n}{[I_r \ \ O]}\underset{n\times n}{Q}=LR。$$

其中L是由P的前r列构成，而R是由Q的前r行构成。

例7 矩阵满秩分解的数值例。

设有矩阵：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 14 \\ 4 & 9 & 3 & 24 \end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

则

$$PAQ=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

以

$$A = P\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}Q^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\4 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 5\\0 & 1 & -1 & 4\\0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\4 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 5\\0 & 1 & -1 & 4\\0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\\4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 5\\0 & 1 & -1 & 4\end{bmatrix}。$$

一般而言，一个矩阵的满秩分解，并不是唯一的。如矩阵A还可写成：

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 5\\2 & 5 & 1 & 14\end{bmatrix}。$$

下面讨论标准型在估计矩阵秩方面的应用。现先将一些有关矩阵的秩的一些结论罗列如下。

命题4 (Sylvester)

$$r(A) + r(B) - n \leqslant r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\},$$

其中n表示矩阵A的列数以及矩阵B的行数。

命题5 A是$m\times n$型矩阵，且$AB = O$则

$$r(B) \leqslant n - r(A)。$$

上面关于矩阵的秩的命题，可借助于定理1来证明。这里仅举两个命题的证明为例。

例8 A是$m\times n$型矩阵且$AB = O$，则$r(B) \leqslant n - r(A)$。

证 设$r(A) = r$，由标准型可知：

$$A=P\begin{bmatrix} I_r & \\ & O \end{bmatrix}Q,$$

又由$AB=O$,可得

$$\begin{bmatrix} I_r & \\ & O \end{bmatrix}QB=O。$$

由此可知矩阵QB的前 r 行一定都为零行，所以QB的非零行至多是$n-r$行，即$r(QB)\leqslant n-r$。而$r(QB)=r(B)$，故有 $r(B)\leqslant n-r(A)$。

例9 A是$m\times n$型矩阵，任取s行构成子阵B，则$r(B)\geqslant r(A)+s-m$。

证 因 $A=P\begin{bmatrix} I_r & \\ & O \end{bmatrix}Q$，而$B$是$A$的子阵，所以在求$A$的标准型的同时，对$B$亦施行初等变换，还可得出$B$的标准型。所以$B$的标准型中的零行的数目，不会超过$A$的标准型中零行的数目，即$s-r(B)\leqslant m-r(A)$。

其余命题的证明希望读者自己完成。

4．Hermite标准型

(1) Hermite标准型的定义

前面所讲的标准型是对矩阵施行行与列的初等变换后所获得的。这里所讨论的标准型，是对矩阵仅施行行初等变换后所获得(这变换相当于利用矩阵格式解线性方程组)。这种标准型同样在计算上有很广泛的用途。现在先给出如下定义：

定义2 一个 $m\times n$ 型矩阵，如果满足下面的条件便称它为Hermite梯形阵。

(i) 它的首 r 行是非零行，且每一个非零行的第一个非零元是1；

(ii) 设第 i 行的第一个非零元出现在 k_i 列上，则应有 $k_1<k_2<\cdots<k_r$；

(iii) 在第k_i列上除第 i 行外，其余的元均为零。

下面便是Hermite梯形阵

$$\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}。$$

任何一个 $m\times n$ 矩阵A，都可通过施行行变换的方法，变为Hermite梯形阵。

例10 将下面矩阵A变为Hermite梯形阵，并将初等变换的矩阵记录下来：

$$A=\begin{bmatrix}0&1&2&2&3&4\\0&2&4&-2&0&-4\\0&3&6&0&3&0\end{bmatrix}_{3\times 6}$$

解 为了要记录变换矩阵，要采用如下的格式。即在A的右边放一个3阶单位阵$[A|E]$，对整个矩阵施行行变换。只要将A变成Hermite梯形阵，在E块便会将变换矩阵记录下来。其理由如下：对分块矩阵$[A|E]$施行行初等变换，相当于左乘一个非奇异矩阵Q，即$Q[A|E]=[QA|QE]$，因而当$QA=H$时，E块处便得出变换矩阵Q。其变换过程如下：

$$\left[\begin{array}{cccccc|ccc}0&1&2&2&3&4&1&0&0\\0&2&4&-2&0&-4&0&1&0\\0&3&6&0&3&0&0&0&1\end{array}\right]\longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|ccc}0&1&2&2&3&4&1&0&0\\0&0&0&-6&-6&-12&-2&1&0\\0&0&0&-6&-6&-12&-3&0&1\end{array}\right]\longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|ccc}0&1&2&2&3&4&1&0&0\\0&0&0&1&1&2&\frac{1}{3}&-\frac{1}{6}&0\\0&0&0&0&0&0&-1&-1&1\end{array}\right]\longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]。$$

将A的Hermite梯形阵记为H_A。上面的例子便是

$$H_A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}。$$

(2) Hermite标准型的应用

Hermite标准型有很多应用。在谈它的应用之前，先介绍一个关于行初等变换的一个性质。

命题6 对一矩阵施行行初等变换，并不改变矩阵列的线性组合关系。

证 设$QA=B$，因而$QA^{(i)}=B^{(i)}$。

如果矩阵A的某些列向量有某个线性组合的关系：

$$c_1A^{(j_1)}+c_2A^{(j_2)}\cdots+c_kA^{(j_k)}=0,$$

便可得

$$c_1QA^{(j_1)}+c_2QA^{(j_2)}+\cdots+c_kQA^{(j_k)}=0,$$

即

$$c_1B^{(j_1)}+c_2B^{(j_2)}+\cdots+c_kB^{(j_k)}=0。$$

由于Q是非奇异矩阵，所以同理可得：如果在矩阵B的某些列向量，有某个线性组合的关系，则可推知A中相对应的列向量亦有相同的线性组合关系。

例11 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$，试指出矩阵$A$的最大独立列向量组，并将其余的列向量用它们表示出来。