

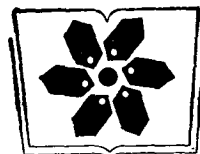
纯粹数学与应用数学专著 第28号

多元样条函数 及其应用

王仁宏 等著

科学出版社

378344

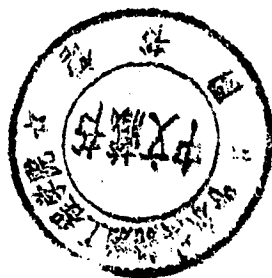


中国科学院科学出版基金资助项目

纯粹数学与应用数学专著 第 28 号

多元样条函数及其应用

王仁宏 等 著



科学出版社

1994

(京)新登字 092 号

内 容 简 介

本书系统地介绍了多元样条函数的基础理论、基本方法和它们在科学与工程计算中的应用。内容包括：多元样条函数引论，多元样条空间的维数与基函数，研究多元样条函数的各种方法，高维样条，非线性插值样条，分段代数曲线，分片代数曲面，以及多元样条函数在科学与工程计算中的应用等。

本书可供从事应用数学、计算数学以及科学与工程计算的科学技术人员、研究生和大学高年级学生阅读、参考。

纯粹数学与应用数学专著 第 28 号

多元样条函数及其应用

王仁宏 等 著

责任编辑：林 鹏 徐宇星

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100071

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1994 年 4 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1994 年 4 月第一次印刷 印张：15 7/8

印数：平 1—700 插页：精：2

精 1—400 字数：420 000

ISBN 7-03-003809-6/O · 669 (平)

ISBN 7-03-003810-x/O · 670 (精)

平 装 17.30 元

布面精装 19.50 元

《纯粹数学与应用数学专著》丛书

主 编 杨 乐

副主编 (以姓氏笔画为序)

王 元 王梓坤 石钟慈

严士健 张恭庆 胡和生

潘承洞

序 言

多项式样条函数,作为分段多项式,其特例早已出现于一些数学研究工作中,例如阶梯函数,折线函数等等。比较系统地建立样条函数一般理论的论文是 I. J. Schoenberg (Contribution to the problem of application of equidistant data by analytic functions, Quart. Appl. Math., 4(1946), 45—99; 112—141), 以及 W. Quade 与 L. Collatz (Zur Interpolations theorie der reellen periodischen function, Press. Akad. Wiss. (Phys-Math. Kl), 30(1938), 383—429) 等完成的。W. Quade 与 L. Collatz 的工作主要是针对周期函数的情况展开的,而 I. J. Schoenberg 的工作则比较系统和完整。I. J. Schoenberg 深刻地指出了研究一元样条函数的三种观点,它们分别是 Fourier 变换的观点,截断多项式差商的观点,以及 Taylor 展开的观点。按前两种观点, I. J. Schoenberg 导出了 B 样条及其各种基本性质,特别是它的基函数性质。按后一种观点,他还导出了样条函数的截断多项式型的表现形式。这些观点和方法对于样条函数的发展产生了极其深远的影响。

鉴于客观事物的复杂多样性,开展多元样条函数的研究,无论在理论上还是在应用上都有着十分重要的意义。由于多元样条函数严重依赖于定义域剖分的几何性质,因而呈现十分复杂的情况。以致于在一个较长时期内,多元样条函数,尤其是非 Cartesian 乘积型多元样条函数的研究没有实质性的进展。G. Birkhoff, H. L. Garabedian, C. de Boor, M. H. Schultz 和 R. S. Varga 等人讨论了 Cartesian 乘积型双 3 次样条函数及其在偏微分方程数值解中的应用。

从分析相邻胞腔上两个多项式之间的关系入手,我们引入了

光滑余因子及其必须满足的协调条件。从而沟通了多元样条函数与代数问题的等价转换关系,为用代数方法研究多元样条函数提供了条件。在这个基础上,我们曾在多元样条函数空间的维数、基函数组,特别是具有局部支集的样条基函数组,光滑曲面插值,非线性插值样条,高维样条函数,计算机辅助几何设计中的多元样条函数方法等方面作了比较有系统的研究工作。

本书将系统地介绍多元样条函数的基础理论和基本方法。为使读者便于了解多元样条函数研究的前沿工作,书中还将介绍多元样条函数及其在科学与工程应用方面的近代进展。具体说来,本书第一章介绍多元样条函数的一些基本定义、事实和结果。第二章着重介绍多元样条空间的维数与基函数的理论及构造性方法。第三章重点介绍著名的箱(box)样条、单纯形样条,以及B网方法等一些有特色的工作。第四章介绍高维样条函数的基本理论及方法。第五章介绍非线性插值样条的理论及具体构造方法。第六章介绍了分段代数曲线及分片代数曲面的基本问题和结果。第七章介绍了多元样条函数在科学与工程计算、特别是在有限元与计算机辅助几何设计中的应用。

施锡泉、罗钟铉、苏志勋同志也参加本书的撰写工作,由于我们水平所限,不足与谬误之处在所难免,敬请读者不吝赐教。

本书的出版得到了中国科学院出版基金委员会的资助。谨对他们的帮助表示衷心的感谢。如果没有他们的帮助,本书是难以问世的。

大连理工大学数学科学研究所 王仁宏

1993年3月于大连

目 录

第一章 多元样条函数引论	1
§ 1. 多元样条函数的基本框架.....	2
§ 2. 广义截断多项式与多元样条函数一般表达式.....	8
§ 3. 多元样条函数插值.....	11
§ 4. 异度样条与带权样条.....	16
§ 5. 多元有理样条函数简介.....	19
§ 6. n 维样条函数	20
第二章 多元样条函数空间	25
§ 1. 贯穿剖分上的多元样条函数空间.....	25
§ 2. 矩形剖分与简单贯穿剖分上的样条函数空间.....	40
§ 3. $\bar{1}$ -型三角剖分上的样条函数空间.....	56
§ 4. 2 -型三角剖分上的样条函数空间.....	70
§ 5. 某些非均匀三角剖分上的样条函数空间.....	88
§ 6. 均匀 1 -型与 2 -型三角剖分下带有边界条件的样条函数空间.....	100
§ 7. 非均匀 2 -型三角剖分下的带有边界条件的样条函数空间	116
§ 8. 关于三角剖分下 $S_k^*(\Delta)$ 空间的维数	120
第三章 研究多元样条的其它方法	140
§ 1. B 样条法.....	140
§ 2. B 网方法.....	156
§ 3. 构造二元样条的积分方法.....	170
第四章 高维样条	186
§ 1. 协调插值法.....	186
§ 2. 高维样条空间的维数.....	209

§ 3. 高维样条中一点维数·····	222
§ 4. 求维数的参数引入技巧·····	236
§ 5. 二维有洞区域的剖分及三维 2-型剖分上的多元样条 ·····	255
第五章 有理样条函数 ·····	271
§ 1. 任意凸多边形上的 C^0 有理函数 ·····	273
§ 2. 三角剖分上的 C^1 插值有理样条函数 ·····	283
§ 3. 三角剖分上的 C^2 插值有理样条函数 ·····	293
§ 4. 三角剖分下 C^k 插值有理样条函数·····	301
§ 5. 正则四边形剖分上的插值有理样条·····	309
第六章 分片代数曲线曲面 ·····	327
§ 1. 代数簇·····	328
§ 2. 代数簇的光滑拼接条件·····	334
§ 3. 分片代数簇·····	342
§ 4. 代数曲线、曲面的逼近 ·····	350
第七章 多元样条在有限元及 CAGD 中的应用 ·····	377
§ 1. 多元样条光滑插值格式·····	379
§ 2. 参数曲面·····	418
§ 3. 散乱数据的曲面拟合·····	444
§ 4. 高维 HCT 和 PS 格式·····	456
§ 5. 有限元空间中的谱基·····	470
参考文献 ·····	491

第一章 多元样条函数引论

众所周知,样条函数无论在理论上还是在应用中都具有十分重要的意义。鉴于客观事物的多样性和复杂性,开展有关多元样条函数方面的理论研究无疑是极为重要的。60年代至70年代初,G. Birkhoff, H. L. Garabedian 和 Carl de Boor 等研究并建立了一系列关于 Cartesian 乘积型的多元样条理论。Cartesian 乘积型多元样条虽然有一定的应用价值,但有很大的局限性,且在本质上可以看作是一元样条函数的简单推广。

1975年,本书著者采用函数论与代数几何的方法,建立了任意剖分下多元样条函数的基本理论框架,并提出了所谓的光滑余因子协调法。从这种基本观点出发,多元样条函数的任何问题均可转化为与之等价的代数问题来研究。

设 D 为二维 Euclid 空间 R^2 中的给定区域。以 P_k 记二元 k 次实系数代数多项式集合:

$$P_k := \left\{ p = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} c_{ij} x^i y^j \mid c_{ij} \text{ 为实数} \right\}.$$

一个二元多项式 $p \in P_n$ 称为是不可约多项式,如果除常数和该多项自身外没有其它多项式可整除它(在复域中)。代数曲线

$$\Gamma: l(x, y) = 0, l(x, y) \in P_n$$

称为是不可约代数曲线,如果 $l(x, y)$ 是不可约多项式。显然直线是不可约代数曲线。

今用有限条不可约代数曲线对区域 D 进行剖分 Δ , 于是 D 被剖分为有限个子区域 $D_1, D_2, \dots, D_N$, 它们被称为 D 的胞腔。形成每个胞腔边界的线段称为网线,网线的交点称为网点或顶点。若两个网点为同一网线的两端点,则称该两网点是相邻网点。

对区域 D 施行剖分 Δ 以后,所有以某一网点 V 为顶点的胞腔

的并集称为网点 V 的关联区域或星形区域, 记为 $\text{St}(V)$.

多元样条函数空间定义为

$$S_k^{\mu}(\Delta) := \{s \in C^{\mu}(D) \mid \mathcal{S}|_{D_i} \in P_k, i = 1, \dots, N\}.$$

事实上, $s \in S_k^{\mu}(\Delta)$ 为一个在 D 上具有 μ 阶连续偏导数的分片 k 次多项式函数.

§ 1. 多元样条函数的基本框架

为建立多元样条函数的基本理论框架, 我们需要如下的引理.

引理 1.1^[1] 设 $p(x, y) \in P_k$, 若一次多项式

$$l(x, y) = ax + by + c, \quad a^2 + b^2 \neq 0$$

的某 n 个零点 (x_i, y_i) ($i = 1, \dots, n$), $n \geq k+1$, 也是 $p(x, y)$ 的零点, 则 $p(x, y)$ 必可被 $l(x, y)$ 所整除. 即存在多项式 $q(x, y) \in P_{k-1}$, 使得

$$p(x, y) = l(x, y) \cdot q(x, y). \quad (1.1)$$

证明 因为 a 与 b 不同时为 0, 不妨设 $b \neq 0$. 将 $p(x, y)$ 按 y 的降幂次序整理为

$$p(x, y) = a_0(x)y^k + a_1(x)y^{k-1} + \dots + a_{k-1}(x)y + a_k(x),$$

其中 $a_j(x)$, $j = 0, \dots, k$ 为 x 的 j 次多项式. 用一次多项式 $l(x, y)$ 除 $p(x, y)$, 得到

$$p(x, y) = l(x, y) \cdot q(x, y) + r(x), \quad (1.2)$$

其中 $q(x, y) \in P_{k-1}$, 余式 $r(x)$ 为 x 的次数不超过 k 的多项式. 按引理所给的条件, 可知

$$r(x_i) = 0, i = 1, \dots, n; n \geq k+1. \quad (1.3)$$

由于 $b \neq 0$, 所以 $x_i \neq x_j$ ($i \neq j$). 于是 (1.3) 表明 $r(x)$ 有多于其次数的互异零点, 从而 $r(x) \equiv 0$. 这就证明了 (1.1) 式成立. $\square$

引理 1.2^[1] 设 $p(x, y) \in P_k, q(x, y) \in P_m$, 且 $q(x, y)$ 是不可约代数多项式. 若 $p(x, y)$ 与 $q(x, y)$ 有多于 km 个公共零点, 则 $p(x, y)$ 可被 $q(x, y)$ 所整除. 即存在 $r(x, y) \in P_{k-m}$, 使

得 $p(x, y) = q(x, y) \cdot r(x, y)$.

按代数几何中的 Bezout 定理, $p(x, y)$ 与 $q(x, y)$ 只要有多于 $k \cdot m$ 个公共零点, 则它们必有公共因子存在. 但 $q(x, y)$ 不可约, 故 $q(x, y)$ 必为 $p(x, y)$ 的因子.

定理 1.3^[1] 设 $z = s(x, y)$ 在两相邻胞腔 D_i 和 D_j 上的表达式分别为

$$z = p_i(x, y) \text{ 和 } z = p_j(x, y),$$

其中 $p_i(x, y), p_j(x, y) \in P_k$. 为使 $s(x, y) \in C^{\mu}(D_i \cup D_j)$, 必须且只须存在多项式 $q_{ij}(x, y) \in P_{k-(\mu+1)d}$, 使得

$$p_i(x, y) - p_j(x, y) = [l_{ij}(x, y)]^{\mu+1} \cdot q_{ij}(x, y), \quad (1.4)$$

其中 $\bar{D}_i$ 与 $\bar{D}_j$ 的公共内网线为

$$\Gamma_{ij}: l_{ij}(x, y) = 0, \quad (1.5)$$

且不可约代数多项式 $l_{ij}(x, y) \in P_d$.

证明 设 μ 为指定的正整数, $0 \leq \mu \leq k \cdot d^{-1} - 1$. 按所给的条件, $s(x, y)$ 于 Γ_{ij} 上处处连续. 所以 $\eta(x, y) = p_i(x, y) - p_j(x, y)$ 于 Γ_{ij} 上处处为 0. 由引理 1.2, 存在多项式 $q_1(x, y) \in P_{k-d}$, 使得

$$\eta(x, y) = p_i(x, y) - p_j(x, y) = l_{ij}(x, y) \cdot q_1(x, y). \quad (1.6)$$

再根据 $\eta(x, y)$ 于 Γ_{ij} 上一阶偏导数为零的性质, 可知

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial q_1}{\partial x} l_{ij}(x, y) + q_1(x, y) \cdot \frac{\partial l_{ij}}{\partial x} \right) \Big|_{\Gamma_{ij}} &= 0, \\ \left(\frac{\partial q_1}{\partial y} l_{ij}(x, y) + q_1(x, y) \cdot \frac{\partial l_{ij}}{\partial y} \right) \Big|_{\Gamma_{ij}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

由 $l_{ij}(x, y)$ 的不可约性, 从(1.7)可推得 $q_1(x, y)$ 于 Γ_{ij} 上处处为 0. 再次利用引理 1.2, 知存在 $q_2(x, y) \in P_{k-2d}$, 使得

$$q_1(x, y) = l_{ij}(x, y) \cdot q_2(x, y). \quad (1.8)$$

于是

$$\eta(x, y) = p_i(x, y) - p_j(x, y) = [l_{ij}(x, y)]^2 \cdot q_2(x, y). \quad (1.9)$$

依此类推, 根据 $s(x, y)$ 于 $\bar{D}_i \cup \bar{D}_j$ 上的 2 阶、3 阶、...、 μ 阶偏导数的连续性, 最后得到

$$\eta(x, y) = p_i(x, y) - p_j(x, y) = [l_{ij}(x, y)]^{\mu+1} \cdot q_{ij}(x, y), \quad (1.10)$$

其中 $q_{ij}(x, y) \in P_{k-(\mu+1)d}$. $\square$

由定理 1.3 中 (1.4) 式所定义的多项式因子 $q_{ij}(x, y)$ 称为内网线 $\Gamma_{ij}; l_{ij}(x, y) = 0$ 上的 (从 D_j 到 D_i 的) 光滑余因子^[1]. 说明内网线 Γ_{ij} 上的光滑余因子存在, 恒指形如 (1.4) 的等式成立.

作为定理 1.3 的一个直接推论, 我们有

推论 1.4^[1] 设剖分 Δ 的内网线 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ 的次数分别为 $n_1, \dots, n_m$. 为使 $S_k^a(\Delta)$ 中存在非蜕化 (即真正“分片”) 的函数, k 与 μ 必须满足

$$k \geq (\mu + 1) \cdot \min_i n_i. \quad (1.11)$$

定理 1.3 表明多元样条函数 $s(x, y) \in S_k^a(\Delta)$ 具有一种所谓半解析延拓的性质. 即两相邻胞腔上 $s(x, y)$ 的表达式之间只差一个形如 (1.4) 式右端所示的修正项. 然而定理 1.3 尚不能完全表征多元样条函数的内在性质. 为给出多元样条函数的完整的理论框架, 我们还须作进一步的探讨.

记两相邻胞腔 D_i 与 D_j 的公共内网线为 $\Gamma_{ij}; \pm l_{ij}(x, y) = 0$. 虽然 Γ_{ij} 的方程既可写为 $l_{ij}(x, y) = 0$, 又可写为 $-l_{ij}(x, y) = 0$, 但为讨论方便计, 在整个讨论过程中我们将取定它的一种形式. 并且我们规定

$$\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}; l_{ij}(x, y) = l_{ji}(x, y). \quad (1.12)$$

由 (1.4), Γ_{ij} 上的光滑余因子 $q_{ij}(x, y)$, 与 Γ_{ji} 上的光滑余因子 $q_{ji}(x, y)$ 满足关系式

$$q_{ij}(x, y) \equiv -q_{ji}(x, y). \quad (1.13)$$

设 A 为任一给定的内网点. 今按下列顺序将过 A 的所有内网线 $\{\Gamma_{ij}\}$ 所涉及的 i 和 j 进行调整: 使当一动点沿以 A 为心的逆时针方向越过 Γ_{ij} 时, 恰好是从 D_j 跨入 D_i .

设 A 为一内网点, 定义 A 点处的“协调条件” (Conformality Condition) 为^[1]

$$\Sigma_A[l_{ij}(x,y)]^{\mu+1} \cdot q_{ij}(x,y) \equiv 0, \quad (1.14)$$

其中 Σ_A 表示对一切以内网点 A 为一端的内网线所求的和, 而 $q_{ij}(x,y)$ 为 Γ_{ij} 上的光滑余因子.

设 Δ 的所有内网点为 $A_1, \dots, A_M$, 则“整体协调条件”(Global Conformality Condition) 为^[1]

$$\Sigma_{A_v}[l_{ij}(x,y)]^{\mu+1} \cdot q_{ij}(x,y) \equiv 0, v = 1, \dots, M, \quad (1.15)$$

其中相应于内网点 A_v 的协调条件之 $q_{ij}(x,y)$ 满足(1.14)中所作的规定.

下述定理建立了多元样条的基本理论框架:

定理 1.5^[1] 对给定的剖分 Δ , 多元样条函数 $s(x,y) \in S_k^\mu(\Delta)$ 存在, 必须且只须 $s(x,y)$ 在每条内网线上均有一光滑余因子存在, 并且满足由(1.15)所示的整体协调条件.

事实上, 各内网线上光滑余因子的存在性等价于该分片多项式的 C^μ 光滑连续性. 各内网点处的协调条件被满足, 即整体协调条件被满足, 又等价于该分片多项式函数在整个区域上的单值性. 所以定理 1.5 成立. 有关细节请读者自行给出(参考文献 [1]).

若样条函数 $s(x,y) \in S_k^\mu(\Delta)$ 于某一网点 V 的关联区域 $\text{St}(V)$ 上处处为同一 k 次多项式, 则称 $s(x,y)$ 于 $\text{St}(V)$ 处是蜕化的. 如果 $s(x,y)$ 在所有胞腔上均为同一个 k 次多项式, 则称它是整体蜕化的. 根据定理 1.5, $s(x,y)$ 于 $\text{St}(V)$ 是蜕化的, 意指相应于网点 V 的协调条件(1.14)只有零解; 而整体蜕化则意味着整体协调条件(1.15)只有零解.

鉴于人们的目的是利用多元样条函数来研究一些理论或实际问题, 因而感兴趣的是如何适当选择剖分 Δ , 次数 k , 以及光滑度 μ , 使得非蜕化的多元样条函数存在. 定理 1.5 表明, 多元样条函数同一元样条函数之间存在着质的差别. 区域 D , 剖分 Δ , 分片多项式的次数 k , 以及光滑度 μ 之间的微妙关系, 即整体协调条件(1.15)影响和最终决定了多元样条函数. 事实上, 定理 1.5 指出, 多元样条函数在一定意义上等价于由(1.15)所对应的线性

代数问题: 关于光滑余因子中各系数间的一个齐次线性方程组问题。而这一类齐次线性方程组的解的存在性及其性质, 自然就成为多元样条函数研究的关键所在。

若区域 D 的边界 ∂D 由一些不可约代数曲线所组成。今以这些不可约代数曲线作为对整个平面 $\mathbf{R}^2$ 的一些剖分内网线, 它们连同原来对 D 的剖分 Δ 一起, 构成了对 $\mathbf{R}^2$ 的一个剖分 $\bar{\Delta}$, 称之为整体剖分。此时 $\mathbf{R}^2 \setminus D$ 也是 $\bar{\Delta}$ 的一个胞腔。

作为定理 1.5 的一个直接推论, 我们有^[1]

推论 1.6 对整体剖分 $\bar{\Delta}$, 存在 $s(x, y) \in S_k^*(\bar{\Delta})$, 必须且只须 $s(x, y)$ 于每条网线上均有光滑余因子存在, 并且形如 (1.15) 的整体协调条件于一切网点处均被满足。

不难看出, 协调条件保证了 $s(x, y)$ 在 Δ 和 $\bar{\Delta}$ 上的单值性。如果区域 D 不是单连通域, 例如 D 是一个具有 h 个“洞”的复连通域, 则定理 5 和推论 6 仍然成立, 只须再添加一组附加的“洞协调条件”

$$\sum_{H_r} [l_{ij}(x, y)]^{\mu+1} \cdot q_{ij}(x, y) \equiv 0, \quad r = 1, \dots, h \quad (1.16)$$

就可以了, 其中 $\sum_{H_r}$ 表对过第 r 个洞的一切网线求和, 而 (1.16) 中其它符号的意义同 (1.14)、(1.15)。

$\mathbf{R}^2$ 上任一条直线 $\Gamma: l(x, y) \equiv ax + by + c = 0$ 显然是一条不可约代数曲线。因此对于一切以直线作为网线的剖分来说, 上述的所有结论仍然是成立的。例如

定理 1.7^[1] 设 $z = s(x, y)$ 于两相邻胞腔 D_i 与 D_j 上的表达式分别为 k 次多项式 $z = p_i(x, y)$ 与 $z = p_j(x, y)$ 。为使 $s(x, y) \in C^{\mu}(\overline{D_i \cup D_j})$, 必须且只须存在多项式 $q_{ij}(x, y) \in P_{k-\mu-1}$, 使得

$$p_i(x, y) - p_j(x, y) = [l_{ij}(x, y)]^{\mu+1} \cdot q_{ij}(x, y), \quad (1.17)$$

其中 $\Gamma_{ij}: l_{ij}(x, y) \equiv a_{ij}x + b_{ij}y + c_{ij} = 0$ 为 D_i 与 D_j 的公共内网线。

定理 1.8^[1] 对给定直线剖分 Δ , 样条函数 $s(x, y) \in S_k^*(\Delta)$, 必须且只须 $s(x, y)$ 于每一条内网线上均有一光滑余因子存在,

并且满足整体协调条件

$$\Sigma_{A_i} [l_i(x, y)]^{\mu+1} \cdot q_i(x, y) \equiv 0, \quad (1.18)$$

其中 A_i 取遍一切内网点 $l_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i = 0$ 为过 A_i 的内网线, $q_i(x, y)$ 为 $P_{k-\mu-1}$ 中与之相应的光滑余因子.

文献[1]中给出的命题表明, 若于 D 的边界 ∂D 上有约束条件, 要想对任意三角剖分得到属于 C^1 的二元样条函数, 分片多项式的次数一般不低于 5, 除非对三角剖分加以特殊选择.

若区域 D 的剖分 Δ 是这样形成的: 其所有网线为一些贯穿区域 D 的直线切割而成. 则称这样的剖分 Δ 为“贯穿剖分”^[1]. 鉴于此类贯穿剖分的特殊性, 可证得

定理 1.9^[1] 若剖分 Δ 是贯穿剖分, 则非蜕化的多元样条函数 $s(x, y) \in S_k^r(\Delta)$, $k \geq \mu + 1$ 恒存在.

设 $\Gamma_i: a_i x + b_i y + c_i = 0$ 为任一条形成剖分 Δ 的直线. 定义

$$\Gamma_i^- = \{(x, y) \in D | a_i x + b_i y + c_i < 0\},$$

$$\Gamma_i^+ = \{(x, y) \in D | a_i x + b_i y + c_i > 0\}.$$

对于剖分 Δ 中任一由 Γ_i 派生的网线段 $\Gamma_{ij} \subset \Gamma_i$, 如果规定同一个非零多项式 $q_i(x, y) \in P_{k-\mu-1}$ 作为 Γ_i 的从 Γ_i^- 到 Γ_i^+ 的光滑余因子, 则不难看出相应的整体协调条件必然被满足. 故定理 1.9 成立. 特别地, 我们有

推论 1.10^[1] 若 Δ 为任一矩形剖分, 则非蜕化的多元样条函数 $s(x, y) \in S_k^r(\Delta)$, $k \geq \mu + 1$ 恒存在.

设 Δ 为给定的剖分. 对任意事先指定的非负整数 μ , 是否存在适当的正整数 k , 使得非蜕化的 $s(x, y) \in S_k^r(\Delta)$ 存在? 答案是肯定的. 即有

定理 1.11^[1] 任意给定非负整数 μ , 无论与区域 D 进行怎样的剖分 Δ , 总可以找到适当的正整数 k , 使得非蜕化的 $s(x, y) \in S_k^r(\Delta)$ 存在.

事实上, 对任一剖分 Δ , 内网点 A 处的协调条件形如

$$\Sigma_{A_i} [l_i(x, y)]^{\mu+1} \cdot q_i(x, y) \equiv 0, \quad (1.19)$$

其中 $\Gamma_i: l_i(x, y) = 0$ 为过 A 的内网线, $q_i(x, y) \in P_{k-\mu-1}$ 为与之相应的光滑余因子.

由(1.19)决定的一个关于 $q_i(x, y)$ 各系数的齐次线性方程组. 若以 N 记过 A 点的所有内网线的条数(自然 $N \geq 2$), 则该齐次线性方程组未知数的个数为

$$M = \frac{1}{2} N \cdot (k - \mu)(k - \mu + 1).$$

因此, 只要 k 适当地大, M 就可大于该方程组中方程个数

$$(k+1)(k+2)/2.$$

从而该齐次线性方程组必有非零解存在.

从理论和应用两个角度上看, 分片多项式的次数 k 越高, 则 $s(x, y) \in S_k^{\mu}(\Delta)$ 的参数就越多, 并且 $s(x, y)$ 的凸凹现象就越严重. 而这些正是人们所不期望的.

所以在多元样条函数的理论和应用问题中的一个重要问题是: 对于给定的剖分 Δ 和指定的光滑度 μ , 如何选取尽可能低的次数 k , 使得非蜕化的 $s(x, y) \in S_k^{\mu}(\Delta)$ 得以存在? 这个问题是一个很复杂的问题. 虽然前面的推论 1.4 从一个侧面部分地回答了此问题, 但该问题远非如此简单. 事实上它还与剖分 Δ 本身的内在性质密切相关.

§ 2. 广义截断多项式与多元样条函数

一般表达式^[2]

在 § 1 定理 1.3 中已指出了多元样条函数的逐片半解析延拓性质. 由此人们不难建立多元样条函数的一般表达式.

设区域 D 被剖分 Δ 分割为如下有限个胞腔

$$D_1, D_2, \dots, D_N.$$

任意取定其中一个胞腔, 例如 D_1 作为“源胞腔”(相当于一河流的“源头”). 从源胞腔 D_1 出发, 画一流向图 $\vec{C}$, 使之满足:

1° $\vec{C}$ 流遍所有胞腔 $D_1, \dots, D_N$ 各一次;

2° $\tilde{C}$ 穿过每条内网线的次数不多于 1;

3° $\tilde{C}$ 不允许穿过网点.

形象地说,以上所定义的流向图 $\tilde{C}$, 相当于一条河流,它发源于 D 中的某个胞腔并且流遍一切胞腔.

应该指出,流向图 $\tilde{C}$ 允许有分支(相当于河流的支流),即 $\tilde{C}$ 可以不是“一笔画”.

显然, $\tilde{C}$ 的选择不是唯一的. 但这并不影响我们下面的讨论.

流线 $\tilde{C}$ 所经过的内网线称为相应于 $\tilde{C}$ 的本性内网线,其它内网线称为相应于 $\tilde{C}$ 的可去内网线. 显然所谓本性内网线与可去内网线都只是一个相对概念.

设 $\Gamma_{ij}: l_{ij}(x, y) = 0$ 为 $\tilde{C}$ 的任一条本性内网线. 将从源胞腔出发,沿 $\tilde{C}$ 前进时,只有越过 Γ_{ij} 后才能进入的所有闭胞腔的并集记为 $U(\Gamma_{ij}^+)$. 将从源胞腔出发沿 $\tilde{C}$ 前进时,在越过 Γ_{ij} 之前所经各闭胞腔的并集记为 $U(\Gamma_{ij}^-)$. 称 $U(\Gamma_{ij}^+) \setminus U(\Gamma_{ij}^-)$ 为网线 Γ_{ij} 的“前方”,记为 $f_r(\Gamma_{ij})$. 它相当于一条河流的下游.

定义 1.12^[2] 设 $\Gamma_{ij}: l_{ij}(x, y) = 0$ 为相应于流向 $\tilde{C}$ 的本性内网线. 多元广义截断多项式定义为

$$[l_{ij}(x, y)]_*^m = \begin{cases} [l_{ij}(x, y)]^m, & \text{当 } (x, y) \in f_r(\Gamma_{ij}), \\ 0, & \text{当 } (x, y) \in D - f_r(\Gamma_{ij}). \end{cases} \quad (1.20)$$

定理 1.13^[2] 任一 $s(x, y) \in S_k^n(\Delta)$ 均可唯一地表示为

$$s(x, y) = p(x, y) + \sum_c [l_{ij}(x, y)]_*^{n+1} \cdot q_{ij}(x, y), (x, y) \in D, \quad (1.21)$$

其中 $p(x, y) \in P_k$ 为 $s(x, y)$ 在源胞腔上的表达式, $\sum_c$ 表示对所有本性内网线求的和,而且沿 $\tilde{C}$ 越过 $\Gamma_{ij}: l_{ij}(x, y) = 0$ 的光滑余因子为 $q_{ij}(x, y) \in P_{k-\mu-1}$.

由光滑余因子的定义和定义 12, 不难直接证明定理 1.13.

按 (1.21) 给出的任一个函数 $s(x, y)$ 是否一定是 $S_k^n(\Delta)$ 中的多元样条函数呢? 回答是否定的. 事实上, 对于任意给定的