计算流体动力学

P. J. 罗奇 著

钟锡昌　刘学宗 译

李荫藩 校

科 学 出 版 社

1 9 8 3

内 容 简 介

本书用直接而且易使读者了解的方式介绍了计算不可压缩流动和可压缩流动的内点差分方法，分析了它们的稳定性、格式误差等；同时讨论了数值边界条件的重要性，分析了它们的实用性和正确性；并对程序设计、调试和试算等提出了一些建议。它的特点是取材广泛且紧密联系实际问题，具有较高的实用价值。

本书适合于从事力学工作的工程技术人员以及物理学、化学、气象学、宇航科研方面的工作者阅读，同时亦可作为计算数学专业的教学参考书。

Patrick J. Roache
COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS
Hermosa Publishers, 1976

计算流体动力学

P.J.罗奇 著

钟锡昌 刘学宗 译

李荫藩 校

责任编辑 陈大宁 谈德颜

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1983年6月第一版 开本：850×1168 1/32
1983年6月第一次印刷 印张：17 3/4
印数：0001—8,900 字数：456,000

统一书号：13031·2268
本社书号：3108·13—2

定价：3.25 元

序　言

在写本书的时候，显然，计算机模拟物理过程的一般领域以及计算流体动力学这门特殊领域都在迅速扩展。人们只需浏览一下任何一种科学文摘索引的标题，就会看到计算流体动力学方面的博士论文实在是太多了。凡有计算机的人都在计算。

很遗憾，研究工作的进展已因文献来源太分散而受到阻碍。几乎是每过一个月，就有人重新发现上风差分，或有人以新入教的信徒那种劲头论述用渐近的非定常流动方法解定常流动问题如何完美。然而这些想法已存在很长时间了。希望本书将有助于使今后的一批新研究工作者不再搞大体上相同的问题，从而把研究工作推向前进。

现已有一些优秀的包含偏微分方程数值解的教科书，著名的有Forsythe 和 Wasow (1960)，Richtmyer (1957), Richtmyer 和 Morton (1967)，Ames (1965, 1969), 以及 Mitchell (1969)[1] 的。本书在所含题材及所用的方法上均与这些书不同。

就所包含的题材来说，提醒读者，这不是一本数学书（见Forsythe，1970；“计算中的陷坑，或数学书为何不够了”）。基本的内点差分方法是用一种直接的和可能易于了解的方式提出的。此外，还讨论了数值边界条件的重要性。这一论题至今在教科书中尚无人讨论，在研究论文中也注意得很少，虽然对它的起决定作用的重要性已有愈来愈多的认识。这本书还将讨论一些同样重要但被忽视的论题，它们是特殊的有限差分网格系统，微分方程的特殊形式，初始条件问题及收敛性准则，绘图方法及其它信息处

1）参考文献按它们第一个作者名字的字母次序和年限编排，列于书末。至于另外的一些教科书和对他们的简要评价，可参看Price (1966) 做的文献汇编。

理技巧，以及甚至关于程序设计实践的一些具体建议。简言之，本书是讲述那些与实际求得流体动力学问题数值解有关的凌乱的问题，而不是讲仅与有关问题相联系的完美的数学命题。

就所用的方法来说，再次提醒读者，这不是一本数学书。虽然数学书不常用直观的、启发式的或试验的方法，但即使如此，它们也承认在此领域中需要物理直观、启发式的推理以及数值试验。有些数学研究肯定是有价值的，但是我们关心的是工程师、物理学家和化学家们所主要关心的，也即我们首先关心的是物理现象以及仅与物理有关的数学。方法上的这种差别不仅具有主观上的价值，而且常常已导致完全不同的问题描述，尤其是关于边界条件。一般来说，物理模拟方法比较成功。

在这方面，有趣地注意到，计算流体动力学方面的大多数熟练的实际工作者是由一些理论工作者转过来的，而这些人仍然认为他们是理论工作者。本书作者的经历基本上是实验方面的。希望我的倾向能与以前的作者们的倾向结合起来，产生一些新的东西。本作者的论点是，计算流体动力学是一门独立的学科，它既不同于实验流体动力学，也不同于理论流体动力学，而有它自己的技巧，它自己的困难，以及它自己的用途。

目　　录

第I章 引 论

“流体力学中非线性问题特别多”（Ames，1965），这是从事这方面工作的人都熟知的。它还含有混合型（双曲型和椭圆型）偏微分方程，各种阶的数学奇异性，以及在无穷远处具有边界条件的问题。在过去，流体动力学已极大地推动了偏微分方程理论、复变函数论、向量和张量分析以及非线性方法的发展。今天，流体动力学既从有限差分数值分析的近代进展中得益，又大大地促进着它的发展，对此人们是不会感到惊奇的。

但是，本书不涉及流体动力学问题中用到的数值分析的所有分枝。我们不讨论有意义的常微分方程的两点边值问题（在边界层理论中这些方程对计算相似解是很基本的），我们甚至也不讨论很重要的特征线法。而我们想论述的这门新的并正在兴起的学科，称之为流体动力学的“数值模拟”也许最为恰当。现在“计算流体动力学”这一名称正被采用，以将它与范围更广的“数值流体动力学”稍加区别。

I-A 计算流体动力学的范畴

在早期，流体动力学象其它物理科学一样，被分成理论和实验两大分枝。问题是计算流体动力学相对于这些比较老的分枝处于什么地位？回答是尽管它两者兼有，但与每一个分枝都不同，它补充它们而不是替代它们。

计算流体动力学肯定不是纯理论分析——如果说它有什么纯理论性的话，它是更接近于实验的分枝。非线性偏微分方程数值解的现有数学理论尚不充分，还没有严格的稳定性分析、误差估

计或收敛性证明。虽然关于存在性和唯一性问题已取得了一些进展，但还不足以对一些感兴趣的具体问题给出明确的回答。所以在计算流体动力学中，仍必须极大地依靠一些较简单的、线性化了的、与原问题多少有点关系的问题的严格的数学分析，以及依靠启发性的推理、物理直观、风洞试验和边试边改的方法。

有一次应用数学家Biot（Biot，1956）关于应用数学说过这样一些话，这些话今天似乎特别适用于计算流体动力学，他在引用了H. Bateman将应用数学家说成是“没有数学良心的数学家”这段话后，Biot继而讨论应用数学家与严格的数学科学之间的关系，他说：“一个艺术家无疑从有关颜色的科学研究中获得好处，但若有人不断提醒他应该严格遵循物理学和心理学来从事创作，你可以理解他对此会有什么样的感受。”要预先提醒新从事计算流体动力学的人，在这一领域里，至少艺术和科学是并重的。

流体动力学的数值模拟与其说接近理论流体动力学，不如说它更接近实验流体动力学。在计算机上进行一次特定的计算非常象进行一次物理实验，因为分析家“打开”方程且等着看产生什么结果，这与实验工作者所做的完全相似。用计算机发现物理现象是确实可能的。例如Campbell和Mueller(1968)在数值实验中发现了亚音速斜坡引起的分离现象，以后他们在风洞中作了证实。而且数值实验工作者有很多有利条件。他对诸如密度、粘性等流体性质可以完全加以控制。他的实验探头不会使流动发生扰动，他能进行真正的二维试验，但这些事在实验室中实际上是不可能做到的.他在选择流动参数上有巨大的灵活性，例如他可以任意选取初始边界层厚度和速度剖面，而不依赖每英尺的Reynolds数以及Mach数，这在风洞中是不可能做到的。也许最重要的还是，数值实验工作者可以做理论工作者和物理实验工作者都做不到的事。他能检验物理现象对一些独立的理论近似（例如常粘性系数、忽略浮力、单位Prandtl数、边界层近似等）的敏感性。

(这使人想起关于风洞实验新手的一个滑稽故事，他要订购一满车无粘性的，无热传导的理想气体。）他也能检验基本的本构方程的正确性，例如关于一新的非 Newton 流体模型的这种方程的正确性。

但是，数值试验绝不能代替物理试验或理论分析.一个明显的理由是连续的本构方程决不能认为是准确的。另一个理由是数值试验工作者不能用连续的方程进行工作。在网格步长变零的极限情况下模拟成为准确的这一点(对于数值试验)是无关紧要的，因为我们永远不会达到这种极限.离散化不仅改变方程的定量精度，而且常常改变其定性性质。因此，尽管数值工作者想用无粘方程，但一定形式的离散模拟将引进一类粘性作用。另一非常重要的限制是数值试验不能正确地计算湍流，或更一般地说，它对诸如湍流、滑移线、拐角涡流等物理现象无能为力，这些现象所占范围太小以致在有限差分网格中不能将其精确地分辨，但是他们却能影响较大范围的流动特性。边界层中湍流对分离点的影响就是这样一个例子。还有一些实际流动的例子，它们看起来是二维流动但实际上并不是，例如“平面”流动分离后的再附线，以及空穴上的平面流动。在这些情况中，真正的二维数值试验的明显优点可能是靠不住的。

最后，应当指出，数值试验和物理实验一样是有限制的，因为对一特定的参数组合它仅给出离散的数据。除了由控制方程的量纲分析得到的关系外，它并不提供任何函数关系。因此它不能替代哪怕是最简单的理论。

计算流体动力学是一门独立的学科，它与实验流体动力学和理论流体动力学既有区别又相互补充，它有它自己的技巧，它自己的困难以及它自己的适用范围，并且为研究物理过程提供了新的前景。

I-B 计算流体动力学的历史概况

1910年，L. F. Richardson 向皇家学会提出了一篇 50 页的论文，这篇论文必须被认为是偏微分方程的近代数值分析的奠基石。尽管在此之前 Sheppard 在有限差分算子方面曾做过一些基础性工作，但 Richardson 的贡献使上述的工作黯然失色了。他论述了 Laplace 方程、重调和方程以及其它方程的迭代解。“根据积分能否从一部分边界起步”，他区分了二类定态问题，即，用现代术语来说，区分了双曲型和椭圆型问题。他仔细地论述了数值边界条件，包括在尖拐角处和无穷远处的条件.他得到了误差估计以及给出了一个将结果外推到格点间距为零的极限情况的精确方法。他还提出了用如圆柱那样简单的几何形状的准确解来检验数值方法的精度。最后，他第一个将这些方法实际应用到一个大尺度的实际问题上，即确定一个石坝的应力[1]。

在椭圆型方程的 Richardson 迭代法中，在顺序的第 n 次迭代中，网格中的每个点都满足这样的有限差分方程，它包含邻点的从第 $n-1$ 次迭代得到的“老的”值。1918年Liebmann 证明了，采用只要有新值可用就都用新值的办法，就可大大改进收敛速率。在这种“连续替代”格式中，每个第 n 次迭代包含了某些邻点第 $n-1$ 次迭代的“老的”值和某些邻点第 n 次迭代的“新的”

1）Richardson 还提出了在现代词汇里称之谓方法的“成本-效果”研究，当时他是用人工进行计算的。

“至今我对（Laplace）运算已付出了大约每个坐标点为$\frac{n}{18}$辨士（Pence）的价格，n 是数字位数。计算员的主要麻烦是加减号相混杂。至于工作速度，最快的人每周平均完成2000个（Laplace）运算，用三位数字，扣去算错的。”（Richardson，1910，p.325）。

我们都很高兴，自1910年以来社会条件已经改变。对于不少计算流体动力学工作者，假如给他规定每次计算的报酬，而且要“扣去算错的”，那他到头来只能上贫民收容所。

值。在每一 Liebmann 迭代循环中最不易下降的误差，下降的程度相当于 Richardson 迭代进行两个循环（Frankel，1950）。

这一比较说明了偏微分方程数值分析的特色。有限差分公式，迭代格式或边界条件的似乎是很小的修改却能引起很大的改进。反之亦然——似乎是合理的且看起来是精确的方法却能导致数值计算失败。历史上经典的例子是抛物型热传导方程的 Richardson 显式方法。虽然对空间和时间导数，它都有精确的中心差分逼近，但已证明对一切时间步长它都是不稳定的[1]。(O'Brien 等，1950)

在电子计算机问世前，研究重点是椭圆型方程或所谓“判定问题”。关于用 Liebmann 方法迭代求解椭圆型方程的收敛性和误差界的一个早期的严格的数学论述是由 Phillips 和 Wiener (1923) 给出的。1928年 Courant，Friedrichs 和 Lewy 发表了经典性论文。作者们本来的兴趣在于用有限差分公式作为纯粹数学的工具（Lax，1967）。他们首先将连续的方程离散化，然后证明离散系统收敛到连续系统，最后用代数方法确立了有限差分解的存在性，通过这种方法他们证明了连续的椭圆型、抛物型和双曲型方程组的存在性和唯一性定理[2]。他们的工作后来却成了实际应用有限差分解的指南。

关于粘性流体动力学问题的偏微分方程的第一个数值解是由 Thom在1933年给出的.最复杂精致的形式是由Shortley和Weller于1938年提出的，它在本质上仍然是 Liebmann 方法。他们建立了块松弛方法、尝试函数方法、误差松弛方法、网格加密法以及误差外推方法。他们也是首先精确地鉴定和分析收敛速率的人。

Southwell (1946) 建立了一种解椭圆型方程的更为有效的

1）这种不稳定性在 Richardson 的计算例子中并未显出，因为计算的步数很少。

2）讨论1928年 Courant-Friedrichs-Lewy 的论文的意义的三个姊妹篇以及该文的英文译稿登在1967年 3 月的 IBM Journal 上（Lax，1967；Parter，1967；Widlund，1967）。

松弛方法。在这一剩余松弛法中[1]，并不按次序计算网格中的每一个点。而是先挑出"剩余"较大的网格点，然后对这些点计算新值。(在定常态热传导方程中，"剩余"正比于有限差分格子中能量的积累速率，因此当所有"剩余"趋于零时就达到了定常态。) Fox (1948) 叙述了Southwell剩余松弛法的更为完善的变形，其中包括超松弛和低松弛的规则(在这些方法中并不使"剩余"准确地等于零)，选取需松弛的网格点，以及块松弛。

Allen 和 Southwell (1955) 应用Southwell剩余松弛法，用手工计算，解出了绕圆柱的不可压缩粘性流动。这在数值流体动力学中，在许多方面是件创新的工作。作者用了保角变换将圆周边界表示在一正方形网格中。他们得到了Reynolds数为1000的一个计算上稳定的解，此值已超过了物理上能稳定的极限值。在他们的手工计算中，他们还获得了当Reynolds数为100时的"不稳定性的清晰的印象"，他们将这与物理上的不稳定性趋势相连系，从而预示了数值模拟的近代原理。他们的工作也可作为获得研究基金来源的范例，Worshipful Company of Clothworkers 在1945年赠予 London's Imperial College 一笔款，他们的研究基金就是由此提供的。

Southwell 方法并不非常适合电子计算机。计算员扫描矩阵挑出最大剩余要比他完成算术运算快得多。对电子计算机而言，扫描速度比起算术运算速度来远没有那么快了，从而简单地依次将每一个网格点的剩余松弛到零反而更有效，这就是Liebmann方法.

于是，电子计算机推动了Liebmann类型方法的进一步发展，它可利用Southwell剩余松弛法的超松弛概念的优点.1950年Frankel (Young 在1954年也独立地) 提出了一个方法，他称之

1) 较早的文章仅对Southwell剩余松弛法使用术语"松弛"。我们使用"剩余松弛"的说法，是为了清楚地与诸如Liebmann等的迭代法相区别，而这些迭代法今天也被称为松弛法。

谓“外推 Liebmann 方法”，后来又被称谓“逐次超松弛法”(Young，1954)或“最优超松弛法”。Frankel 还注意到了椭圆型方程迭代解与抛物型方程的时间步进解之间有相似之处，从这点将得到重要的结果。

电子计算机的发展还使注意力集中到了抛物型问题，因为求整个时间过程的解现在是可能的了。Richtmyer 的第一本书(1957)对一维流体动力学的发展作出了巨大贡献，在书中他提出了抛物型方程的十多种数值格式。对于多维问题的第一个隐式方法是1947年发表的 Crank-Nicolson 方法，它在每一时间步都需要迭代求解。这个方法仍然是最通用的方法之一，而且是最广泛地使用着的非相似边界层计算方法的基础(Blottner, 1970)。

用非定常流动方程的渐近时间解来求得定常解的想法的起源已无法确定。在电子计算机诞生以前，恐怕没有人能认真地考虑它。

计算流体动力学方面的许多先驱工作是在 Los Alamos 科学实验室中完成的。在第二次世界大战中，正是在 Los Alamos, J. von Neumann 建立了抛物型有限差分方程的稳定性准则并且提出了分析线性化方程的方法。直到1950年，他的方法的简要描述才在公开的文献中出现[1](Charney 等，1950)。这篇重要的文章还给出了非线性涡度方程的第一个大尺度的气象计算。作者们说明了涡度方程的稳定性比原始方程的优越，并且对于他们对不定常问题的上游和下游边界条件(数学上不完全的问题)所做的处理给出了启发式的论证。

在五十年代中，Peaceman 和 Rachford (1955) 以及 Douglas和Rachford (1956) 提出了允许以任意大的时间步长求解隐式抛物型方程的有效方法，称之为“交替方向”(简称 ADI)方法，它也可应用于求解椭圆型问题，它们间的转换是基于 Frankel 所提过的抛物型方程的时间步数和椭圆型方程的迭代次数之间有

1) 更为完整的说明是由 O'Brien, Hyman 和 Kaplan 在1950年给出的。

相似之处。在使用涡度输运方程的不可压缩流动问题中，ADI方法大概是用得最普遍的方法。

1953年，Dufort 和 Frankel 对抛物型方程提出了“跳点”方法，象 ADI 方法一样它也允许任意大的时间步长（在没有平流项的情况下），而且具有全显式的优点。Harlow 和 Fromm(1963)在他们著名的不定常涡街的数值解中，用了这个方法。他们发表在杂志 Scientific American 上的文章(Harlow和 Fromm, 1965)特别激起了美国科学界对计算流体动力学的潜力的广泛兴趣。几乎在同时，Macagno 写的一篇类似的文章登在法国杂志 La Houille Blanche(Macagno, 1965)上。在这两篇文章中，首次清楚地叙述了数值模拟或计算机试验的概念。由于这两篇文章的出现，计算流体动力学作为一门独立学科出现的日子我们就能确定了。

至今所提到的所有不定常解法为使计算稳定，Reynolds 数都有一个上限。（从根本上说，是对有限差分格子间距的 Reynolds 数加的限制。）1966 年 Thoman 和 Szewczyk 对平流项用上风差分，同时细致地处理了边界条件得到了看来是无限制的计算稳定性。他们的绕圆柱流动的计算使 Reynolds 数可达到一百万，而且他们甚至能使圆柱“自旋”且得到 Magnus 升力，而没有发生计算不稳定性。尽管方法只有一阶精度，但他们的计算与实验值很相符，这使得对偏微分方程的形式截断阶的重要性不得不进行重新估价。关于这点，Cheng (1968) 的工作是相当重要的，它阐明了数值边界条件的极为重要的影响。

求解椭圆型 Poisson 方程的直接（非迭代的）Fourier 方法已经知道一段时间了（例如见 Forsythe 和Wasow，1960)，但在流体动力学问题中一直未被应用。Hockney (1965) 用了一个有关的（但较快的）方法非常有效地解出了大型 Poisson 问题。自他的文章以后，对 Poisson 方程已比较广泛地使用直接法了。

至今所描述的方法已用于亚音速不可压缩体的流动问题。超音速流动问题在许多重要的方面不同于亚音速流动，最重要的

是在超音速流动中可能形成激波（解发生间断）。

双曲型方程的数值处理方面的奠基性文章是在1928年由Courant，Friedrichs和Lewy发表的。他们讨论了"特征"性质并且提出了著名的特征线法。他们还提出且说明了有名的Courant-Friedrichs-Lewy稳定性必要条件；也就是在网格线不与特征方向相一致的数值网格中，有限差分依赖域至少要包含连续的（微分方程）依赖域。此CFL稳定性要求（用现代术语来说，就是简单地要求"Courant数"小于1）在Lagrange参考系和Euler参考系中都成立。

"跟踪质点"的Lagrange方法已被Los Alamos的一个小组发展得具有相当高的水平（Fromm，1961）。对二维问题通常喜欢用Euler方法，但在Euler参考系中激波分辨问题变得严重了。如果网格间距不比激波厚度小，那么将出现损坏精度的振荡。在有限网格中，这些振荡是有物理意义的（Richtmyer，1957）。跨过激波速度减小的有序的动能通过分子间的随机碰撞转化成内能，而计算中用的分子是有限差分格子。

在Euler网格中，最通用的处理激波的方法是通过引进人工耗散将激波抹平在几个格子上，人工耗散可以是显式的或是隐含的，且不损害激波以外的解。1950年von Neumann和Richtmyer提出了人工耗散格式，其中"粘性系数"正比于速度梯度的平方。Ludford，Polacheck和Seeger（1953）在Lagrange网格中简单地在粘性方程中用了大的物理粘性值，不过在此方法中，要求的粘性值大得不现实了。

不使用显式粘性，有限差分隐含的耗散也足以能抹平激波。在著名的"格子中的质点"方法（即PIC方法，它是由Evans，Harlow以及其它一些人在Los Alamos[1]提出的）中，在Lax方法（Lax，1954）中和其它一些方法中都用了这点。

1）见Evans和Harlow（1957，1958，1956），Harlow等（1959），Evans等（1962），以及Harlow（1963）的工作。

在1954年Lax的文章中，所用的微分方程的形式(守恒型)比起所提出的数值格式来要远为重要得多。Lax指出，通过重新组合通常的以速度、密度和温度作为因变量的方程，可以导出包含动量，密度和滞止比内能的一组方程。这组新的方程显示了有关的物理守恒律的性质，而且使得全部积分性质在有限差分方程中恒能保持。这组方程现在被普遍地用于计算激波的形成和发展，而不管用什么有限差分方法，这是因为这时用任何稳定的方法都将产生准确的平面激波速度（见Longley，1960，和Gary，1964）。

在其他一些方法中，激波抹平也是通过隐含的耗散项实现的。现在广泛地使用着的Lax-Wendroff方法(1960)，或者它的两步形式的Richtmyer（1963）方法就是如此。PIC方法注[1]和经Mader（1964）变化得到的EIC（格子中的炸药)方法是用有限数目的计算质点来实现激波抹平的。这种概念还可用来刻画流体的交界面（Harlow和Welch 1965和1966；Daly，1967）。PIC方法与较早的Courant-Isaacson-Rees方法（1952）一样，对一阶空间导数采用单侧差分，从而引进了一种数值粘性（见Ⅱ章)；但是这些方法确实保持了正确的微分方程的特征意义。尽管这些方法都隐含有抹平激波的耗散项，但对一些特定的条件，为达到稳定还需另加显式人工耗散项。

人们可以实际上保持激波间断，以替换把激波抹平在几个计算格子上的办法。Moretti和Abbett（1966B）以及Moretti和Bleich（1967）用激波拟合法计算了无粘超音速流动，在七十年代初这种方法已极为流行。

关于非线性数值方法的内容广泛且出色的论述，我们推荐Ames的近著（1965，1969)。关于抛物型和双曲型方程组的数值处理的许多数学内容，我们推荐Richtmyer（1957）以及Richtmyer和Morton（1967）的书，这本书还包括激波问题和中子扩散问题。关于椭圆型方程，我们推荐Forsythe和Wasow（1960）的严谨的数学教科书。Academic Press即将出版的Moretti的书将详细地给出激波拟合法。

I－C 解的存在性和唯一性

关于流体流动的偏微分方程的解的存在性和唯一性的许多数学问题还远未解决，无论是连续的方程（PDE）还是模拟它们的有限差分方程（FDE）都是这样。Ladyzhenskaya（1963）已写了专著对定常不可压缩粘性流的这些问题进行了讨论。Ames（1965）给出了这本书的易读的摘要。在不可压缩Navier-Stokes方程同其他问题相比较的基础上，Ames（第480页）推断，仅在某一不明确规定的Reynolds数以下，才存在唯一的定常解，在此Re数以上的某一范围内，存在几个解，在另一不明确规定的Reynolds数以上没有解。（但是，他立即又怀疑定常Navier-Stokes方程在某一Re数以上的合法性，因为这时出现了湍流。）当边界条件不清楚时，在有限差分模拟中这样的问题可能更为严重。

对于完全是双曲型方程的可压缩流动（超音速流动）问题，无粘极限的存在性是容易证明的。Foy（1964）还证明了，在两种能由一相当弱的激波连接起来的状态之间，存在一连续的粘性解。对更为一般的状态和对混合流动问题，似乎还没有真正有用的东西[1]。

如果我们计算不定常方程，那么解的存在性问题就较小，这种方法对完全粘性流动方程已表明是最成功的。因为我们对时间相关的Navier-Stokes方程有一定把握，故我们就相信从一物理上合理的初始条件出发得到的数值解是正确的。如果不存在定常解，那么用时间相关的有限差分模拟，我们也可发现这点。但是

1）讨论这些问题的最近的研究文章可以在杂志*Archive for Rational Mecha-kics and Analysis*上找到，此杂志由C. Truesdll和J. Serrin主编，Springer-Verlag出版社出版。