# 彈性力學問題的變分解法

Л. С. 列賓遜

科 學 出 版 社

# 彈性力學問題的變分解法

Л. С. 列 賓 遜 著
葉開沅 盧文達 譯

科 學 出 版 社
1958

Л. С. ЛЕЙБЕНЗОН

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Издательство Академии наук СССР

Москва 1951

## 內 容 介 紹

在彈性力學中，近似解法佔着很重要的位置。一些工程技術上很重要的問題，若要根據彈性理論來求它們的準確解，那是非常困難甚至是不可能的事。而許多近似法中最有成效的要算變分法。

作者Л.С.列賓遜院士是Н.Е.儒厠夫斯基和В.Г.什赫夫的學生，他繼承並發展了他的老師們的傳統。在本書中他較詳盡和有系統地介紹了彈性力學變分近似解法的理論基礎，在這方面有拉格朗日和卡斯提也努變分原理、伽遼金法、放鬆邊界條件法(屈列弗滋法)以及M.康托洛維奇提出的混合法。

本書最大的興趣是在應用方面而不在純粹數學方面，書中大部分篇幅介紹了航空工程上的柱體扭轉和彎曲問題，結構力學中的桿件與平板問題，地球物理學所需要的彈性球體問題等。

閱讀本書不需要高深的數學基礎，凡是有一些彈性力學基礎的讀者，都可以閱讀本書。本書可供科學工作者、技術工作者和大學高年級學生參考、進修之用。

本書第一至第五章由葉開沅翻譯，以後爲盧文達翻譯，由葉開沅校訂。

2P6/11

**彈性力學問題的變分解法**

Л. С. 列賓遜 著

葉開沅 盧文達 譯

*

科 學 出 版 社 出 版 (北京朝陽門大街 117 號)

北京市書刊出版業營業許可證出字第 061 號

科學出版社上海印刷廠印刷 新華書店總經售

*

1958年 8 月第 一 版　　書號：1284　字數：324,000

1958年 8 月第一次印刷　　開本：787×1092 1/18

(滬)0001—1,854　　印張：14 1/3

定價：(11)2.50 元

# 原　　序

自從 1821 年偉大的法國工程師納維建立了彈性體的平衡和運動的一般方程式後，在給定邊界和起始條件下求出問題的解，自哥西和泊松開始便成爲許多著名數學家研究的對象．然而無論他們怎樣的努力，到今天爲止，對於工程技術上許多十分重要的彈性力學問題，仍然不可能得到準確的解．因此彈性力學問題的近似解法便具有很重要的意義．在這些近似法中最有成效的要算變分法，瑞利和李滋的工作，首先奠定了這方面的基礎．但是以後進一步發展了這種方法的却是我國許多學者所做的工作，其中尤其是 C. П. 鐵摩辛柯（鐵摩辛柯方法），Б. Г. 伽遼金（伽遼金方法），H. M. 克雷洛夫，A. H. 傑尼克和本書的作者等的工作．

在這本書中講述變分法和它在求解一系列很有意義的問題上的應用，如地球物理學、結構力學和航空上的問題．

爲了實際應用的目的，作者在本書中不準備討論解彈性力學問題變分法的純粹數學方面（對於這方面的問題請參考 H. M. 克雷洛夫院士和 M. B. 愷爾特沙的工作）。書中主要是講述作者自己的工作"彈性力學問題的變分解法"，這些內容 1940 年曾發表於"中央儒闊夫斯基航空研究所叢刊（No. 495）上"．

除了伽遼金、李滋和鐵摩辛柯方法以外，我們也涉及到最近才提出的"放鬆邊界條件"方法，這個方法的原始觀念也就是所謂聖維南原理。在書中最後的部分還講述到求解機翼剖面的扭轉和彎曲問題的變分法（其中有各向同性的，也有各向異性的）．

在出版這本書的時候承蒙 C. A. 列賓遜和 H. B. 斯弗林斯基的幫助，作者在此表示謝意．

Л. C. 列賓遜

1943 年於博羅沃耶療養地

# 目　　錄

# 第 一 章

## 彈性理論的變分方程

**§1. 基本公式** 假定彈性應變是微小的，它們可爲六個分量所決定：

$$\left.\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ e_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, & e_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & e_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中 $u$, $v$, $w$ 是彈性位移分量.

在彈性體的單位體積中，應變勢能 $W$ 是上面六個量的函數，因此

$$\begin{aligned} \delta W = \frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\,\delta e_{xx} + \frac{\partial W}{\partial e_{yy}}\,\delta e_{yy} + \frac{\partial W}{\partial e_{zz}}\,\delta e_{zz} + \\ + \frac{\partial W}{\partial e_{yz}}\,\delta e_{yz} + \frac{\partial W}{\partial e_{zx}}\,\delta e_{zx} + \frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\,\delta e_{xy}. \end{aligned} \tag{2}$$

由另一方面來看，我們有下面用以決定 $W$ 的基本關係：

$$\delta W = X_x\delta e_{xx} + Y_y\delta e_{yy} + Z_z\delta e_{zz} + Y_z\delta e_{yz} + X_z\delta e_{zx} + X_y\delta e_{xy}. \tag{3}$$

比較(2)和(3)，我們得到格林的基本關係

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{\partial W}{\partial e_{xx}}, & Y_y &= \frac{\partial W}{\partial e_{yy}}, & Z_z &= \frac{\partial W}{\partial e_{zz}}, \\ Y_z &= \frac{\partial W}{\partial e_{yz}}, & X_z &= \frac{\partial W}{\partial e_{xz}}, & X_y &= \frac{\partial W}{\partial e_{xy}}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

整個彈性體的應變勢能的表達式是

$$V = \iiint W\,dx\,dy\,dz, \tag{5}$$

這裏積分是在整個彈性體體積中進行的.

當物體變形時，所有彈性力的元功具有數值 $\delta V$.

均勻各向同性體的特性爲兩個拉梅常數 $\lambda$ 和 $\mu$ 所表徵，它們和著名的常數—胡克模數 $E$，剪切模數 $G$，以及泊松比 $\sigma$ 有下列的關係：

$$\left.\begin{aligned} \mu &= G = \frac{E}{2(1+\sigma)}, \\ \lambda &= \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \\ E &= \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \\ \sigma &= \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

體積膨脹率爲下面的公式所決定：

$$\Delta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \tag{7}$$

對於均勻各向同性體，有下列的應力應變關係：

$$X_x = \lambda\Delta + 2\mu e_{xx},\ Y_y = \lambda\Delta + 2\mu e_{yy},\ Z_z = \lambda\Delta + 2\mu e_{zz}; \tag{8}$$

$$Y_z = \mu e_{yz}, \qquad X_z = \mu e_{zx}, \qquad X_y = \mu e_{xy}. \tag{8'}$$

以 $e_{xx}$, $e_{yy}$, $e_{zz}$ 爲未知量，解方程(8)，並且利用(6)的關係，我們得到

$$\left.\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E}[X_x - \sigma(Y_y + Z_z)], \\ e_{yy} &= \frac{1}{E}[Y_y - \sigma(X_x + Z_z)], \\ e_{zz} &= \frac{1}{E}[Z_z - \sigma(X_x + Y_y)]. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

將(8)和(8′)代入(3)，我們得到

$$2W = (\lambda + 2\mu)\Delta^2 + \mu[e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2 - 4e_{xx}e_{yy} - 4e_{yy}e_{zz} - 4e_{xx}e_{zz}], \tag{10}$$

上式可以表示成下面的樣子：

$$2W = \lambda\Delta^2 + 2\mu(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + \mu(e_{xy}^2 + e_{xz}^2 + e_{yz}^2), \tag{11}$$

§ **2. 均勻各向同性體的卡斯提也努公式** 將(8′)和(9)代入(10)，我們得到重要的公式

$$W = \frac{1}{2E}[X_x^2 + Y_y^2 + Z_z^2 - 2\sigma(X_xY_y + X_xZ_z + Y_yZ_z)] + \\ + \frac{1}{2\mu}(X_y^2 + X_z^2 + Y_z^2). \tag{12}$$

將上式微分並應用關係(8)，(8′)和(9)，我們得到下列的公式：

$$\frac{\partial W}{\partial X_x} = \frac{1}{E}[X_x - \sigma(Y_y + Z_z)] = e_{xx},\quad \frac{\partial W}{\partial Y_z} = \frac{1}{\mu}Y_z = e_{yz},$$

$$\frac{\partial W}{\partial Y_y} = \frac{1}{E}[Y_y - \sigma(X_x + Z_z)] = e_{yy},\quad \frac{\partial W}{\partial X_z} = \frac{1}{\mu}X_z = e_{xz},$$

$$\frac{\partial W}{\partial Z_z} = \frac{1}{E}[Z_z - \sigma(Y_y + X_x)] = e_{zz},\quad \frac{\partial W}{\partial X_y} = \frac{1}{\mu}X_y = e_{xy}.$$

得到的基本關係

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial X_x} &= e_{xx}, & \frac{\partial W}{\partial Y_y} &= e_{yy}, & \frac{\partial W}{\partial Z_z} &= e_{zz}, \\ \frac{\partial W}{\partial Y_z} &= e_{yz}, & \frac{\partial W}{\partial X_z} &= e_{xz}, & \frac{\partial W}{\partial X_y} &= e_{xy}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

稱爲卡斯提也努公式．這公式和格林公式(4)是相關的．由基本公式(12)，我們有

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial X_x}\delta X_x + \frac{\partial W}{\partial Y_y}\delta Y_y + \frac{\partial W}{\delta Z_z}\delta Z_z + \frac{\partial W}{\partial Y_z}\delta Y_z + \frac{\partial W}{\delta X_z}\delta X_z + \\ + \frac{\partial W}{\partial X_y}\delta X_y.$$

將(13)代入上式,我們得到和(3)相關的重要關係

$$\delta W = e_{xx}\delta X_x + e_{yy}\delta Y_y + e_{zz}\delta Z_z + e_{yz}\delta Y_z + e_{xz}\delta X_z + e_{xy}\delta X_y \tag{14}$$

這裏必須注意,公式(13)和(14)只當胡克定律能够應用的條件下才存在.

**§3. 各向異性體的卡斯提也努公式** 在胡克定律能够應用的情形下,我們可以用六個應力分量的綫性函數來表示六個應變分量. 假定在沒有應力時,所有的應變分量爲零,我們有

$$\left.\begin{array}{l} e_{xx} = b_{11}X_x + b_{12}Y_y + b_{13}Z_z + b_{14}Y_z + b_{15}X_z + b_{16}X_y, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_{xy} = b_{41}X_x + b_{42}Y_y + b_{43}Z_z + b_{44}Y_z + b_{45}X_z + b_{46}X_y, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{15}$$

這裏的常係數具有下面的性質:

$$b_{ik} = b_{ki}, \tag{16}$$

將(15)代入(3)並且利用(16),我們得到以六個應力分量爲自變量的二次齊次函數$W$:

$$W = \tfrac{1}{2} b_{11}X_x^2 + b_{12}X_xY_y + b_{13}X_xZ_z + \cdots + \tfrac{1}{2} b_{66}X_y^2. \tag{17}$$

現在我們來計算$W$對於應力分量的偏微商. 首先我們來決定$\dfrac{\partial W}{\partial X_x}$, 這裏必須記得,$W$是一個多元函數,也就是說它是下面六個應變分量

$$e_{xx},\ e_{yy},\ e_{zz},\ e_{yz},\ e_{zx},\ e_{xy}$$

的函數,這些應變分量依靠(15)和六個應力分量

$$X_x,\ Y_y,\ Z_z,\ Y_z,\ X_z,\ X_y$$

相連繫. 我們得到

$$\frac{\partial W}{\partial X_x} = \frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\frac{\partial e_{xx}}{\partial X_x} + \cdots\cdots\cdots\cdots \frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\frac{\partial e_{xy}}{\partial X_x}. \tag{18}$$

由(15),我們有

$$\frac{\partial e_{xx}}{\partial X_x} = b_{11},\quad \frac{\partial e_{yy}}{\partial X_x} = b_{21},\quad \frac{\partial e_{zz}}{\partial X_x} = b_{31},$$

$$\frac{\partial e_{yz}}{\partial X_x} = b_{41},\quad \frac{\partial e_{xz}}{\partial X_x} = b_{51},\quad \frac{\partial e_{xy}}{\partial X_x} = b_{61}.$$

將這些表達式代入(18),並且利用關係(4),我們有

$$\frac{\partial W}{\partial X_x} = b_{11}X_x + b_{21}Y_y + b_{31}Z_z + b_{41}Y_z + b_{51}X_z + b_{61}X_y,$$

由於關係(16)這就給出了

$$\frac{\partial W}{\partial X_x} = b_{11}X_x + b_{12}Y_y + b_{13}Z_z + b_{14}Y_z + b_{15}X_z + b_{16}X_y.$$

和方程組(15)的第一式比較,我們有

$$\frac{\partial W}{\partial X_x}=e_{xx}.$$

同樣地將 $W$ 對 $Y_y, \cdots, X_y$ 微分,並應用胡克定律,我們得到公式

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial W}{\partial X_x}=e_{xx}, \quad \frac{\partial W}{\partial Y_y}=e_{yy}, \quad \frac{\partial W}{\partial Z_z}=e_{zz},\\&\frac{\partial W}{\partial Y_z}=e_{yz}, \quad \frac{\partial W}{\partial X_z}=e_{xz}, \quad \frac{\partial W}{\partial X_y}=e_{xy},\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

它們和公式(13)相同,並且表示了各向異性體的卡斯提也努公式. 顯然地,在這種情形存在關係(14).

§ 4. **聖維南的恆等關係**(即協調條件—譯者)

由公式(1),六個應變分量

$$e_{xx},\ e_{yy},\ e_{zz},\ e_{yz},\ e_{zx},\ e_{xy}$$

可用三個函數 $u, v, w$ 對坐標 $x, y, z$ 作偏微分來決定,因此這些應變分量不是獨立的,在它們中間存在下列由聖維南得出的關係:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\partial y},\\&\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y\partial z},\\&\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial x\partial z};\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y\partial z},\\&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z\partial x},\\&\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial e_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial e_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

微分關係(20)和(21)的實現,就保證了可用六個已給的微小變形的應變分量

$$e_{xx},\ e_{yy},\ e_{zz},\ e_{yz},\ e_{zx},\ e_{xy}$$

決定三個彈性位移分量 $u, v, w$ 的可能性.

在均勻各向同性體的情形,我們可以根據(8′)和(9),把公式(20)和(21)中的六個應變分量的表示式改變成六個應力分量的表示式. 假如利用了彈性平衡方程,這就給出了著名的拜爾脫拉密公式

$$\left.\begin{aligned}
&(1+\sigma)\nabla^2 X_x+\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=-2\rho(1+\sigma)\frac{\partial X}{\partial x}-\Omega,\\
&(1+\sigma)\nabla^2 Y_y+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=-2\rho(1+\sigma)\frac{\partial Y}{\partial y}-\Omega,\\
&(1+\sigma)\nabla^2 Z_z+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=-2\rho(1+\sigma)\frac{\partial Z}{\partial z}-\Omega,\\
&(1+\sigma)\nabla^2 Y_z+\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z}=-\rho(1+\sigma)\left(\frac{\partial Y}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial y}\right),\\
&(1+\sigma)\nabla^2 X_z+\frac{\partial^2\theta}{\partial z\partial x}=-\rho(1+\sigma)\left(\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial z}\right),\\
&(1+\sigma)\nabla^2 X_y+\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}=-\rho(1+\sigma)\left(\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial y}\right),
\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

其中$\rho$是密度，$X$，$Y$，$Z$是單位質量上的力的分量，並且除此以外，還引進下面的符號

$$\Omega=\frac{\rho\sigma(1+\sigma)}{1-\sigma}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right),\tag{22'}$$

$$\nabla^2(\quad)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\quad)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\quad)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\quad).\tag{23}$$

方程(22)只是在彈性平衡的情形下才適合.

在不存在質量力的情形下，我們有

$$X=Y=Z=0,$$

因此，公式(22)的右端為零.

**§5. 哥西和拉梅的彈性力學方程**　六個應力分量適合三個哥西方程：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+\rho\left(X-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=0,\\
&\frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+\rho\left(Y-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)=0,\\
&\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\rho\left(Z-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)=0.
\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

在彈性平衡的情形，這些方程有下列的形式：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+\rho X=0,\\
&\frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+\rho Y=0,\\
&\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\rho Z=0.
\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

在均勻各向同性體的情形，將關係(8)和(8′)代入方程(24)，我們便得到所謂拉梅方程

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x}+\mu\nabla^2u+\rho\left(X-\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right)=0,\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y}+\mu\nabla^2v+\rho\left(Y-\frac{\partial^2v}{\partial t^2}\right)=0,\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z}+\mu\nabla^2w+\rho\left(Z-\frac{\partial^2w}{\partial t^2}\right)=0,\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

其中$\Delta$是由公式(7)决定的.

在彈性平衡的情形,方程(26)的形式如下:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x}+\mu\nabla^2u+\rho X=0,\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y}+\mu\nabla^2v+\rho Y=0,\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z}+\mu\nabla^2w+\rho Z=0.\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

面積元素上的面力分量,當其法綫與坐標軸 $x$, $y$, $z$ 所成的夾角的餘弦爲 $l$, $m$, $n$ 時,我們有下列的公式:

$$\left.\begin{aligned}X_\nu=X_xl+X_ym+X_zn,\\Y_\nu=X_yl+Y_ym+Y_zn,\\Z_\nu=X_zl+Y_zm+Z_zn.\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

**§6. 彈性平衡情形的拉格朗日變分方程** 假定 $\delta u$, $\delta v$, $\delta w$ 是彈性可能位移(即虛位移—譯者),即在彈性平衡情形下彈性體上的幾何約束所允許的位移(在運動情形則爲運動約束). 根據拉格朗日的可能位移原理,當物體在彈性平衡時,我們就有

$$\iiint(X\delta u+Y\delta v+Z\delta w)\,\rho\,dx\,dy\,dz+$$
$$+\iint(\overline{X}_\nu\delta u+\overline{Y}_\nu\delta v+\overline{Z}_\nu\delta w)\,d\Sigma-\delta v=0\tag{29}$$

其中 $d\Sigma$ 是物體表面的元素, $\overline{X}_\nu\,d\Sigma$, $\overline{Y}_\nu\,d\Sigma$, $\overline{Z}_\nu\,d\Sigma$ 是作用在彈性體表面元素 $d\Sigma$ 上的面力的分量,最後的 $\delta V$ 是由公式(5)决定的. 體積分是對於整個彈性體的體積的積分. 面積分是對它的整個表面積分.

方程(29)就是彈性平衡情形下的拉格朗日變分方程. 這個方程內包含三個彈性平衡方程(25),同時也包含由公式(28)所决定的三個邊界條件,如果在(28)式中假定

$$X_\nu=\overline{X}_\nu,\ \ Y_\nu=\overline{Y}_\nu,\ \ Z_\nu=\overline{Z}_\nu,$$

這就給出

$$\left.\begin{aligned}lX_x+mX_y+nX_z=\overline{X}_\nu,\\lX_y+mY_y+nY_z=\overline{Y}_\nu,\\lX_z+mY_z+nZ_z=\overline{Z}_\nu,\end{aligned}\right\}\tag{30}$$

(同時,作用在彈性體上的質量力與面力力系,彼此平衡如同在絕對剛體上的平衡一樣). 事實上,由公式(5)我們有

$$\delta V=\iiint\delta W\,dx\,dy\,dz;$$

將(3)式中的 $\delta W$ 代入,我們得到下式

$$\delta V = \iiint (X_x\delta e_{xx} + Y_y\delta e_{yy} + Z_z\delta e_{zz} + Y_z\delta e_{yz} + \\ + X_z\delta e_{xz} + X_y\delta e_{xy})\, dx\, dy\, dz. \tag{31}$$

由公式(1),我們有

$$\left.\begin{aligned} &\delta e_{xx} = \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\delta u),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\delta e_{yz} = \delta\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(\delta w) + \frac{\partial}{\partial z}(\delta v),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

將(32)代入(31)並經部分積分,我們得到下列形式的三個關係式

$$\iiint X_x\, \delta e_{xx}\, dx\, dy\, dz = \iiint X_x \frac{\partial}{\partial x}(\delta u)\, dx\, dy\, dz = \\ = \iint X_x\, l\delta u\, d\Sigma - \iiint \frac{\partial X_x}{\partial x}\delta u\, dx\, dy\, dz \tag{33}$$

與下列形式的三個關係式

$$\iiint Y_z\, \delta e_{yz}\, dx\, dy\, dz = \iiint Y_z\left[\frac{\partial}{\partial y}(\delta w) + \frac{\partial}{\partial z}(\delta v)\right] dx\, dy\, dz = \\ = \iint (m\delta w + n\delta v)\, Y_z\, d\Sigma - \iiint\left(\frac{\partial Y_z}{\partial y}\delta w + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\delta v\right) dx\, dy\, dz, \tag{34}$$

其中 $l, m, n$ 是外法綫與坐標軸之間的夾角的餘弦. 將由(33)和(34)的六個公式所決定的數值代入(31)中,我們就得到

$$\delta V = \iint [(X_xl + X_ym + X_zn)\delta u + (X_yl + Y_ym + Y_zn)\delta v + \\ + (X_zl + Y_zm + Z_zn)\,\delta w]\, d\Sigma - \\ - \iiint\left[\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right)\delta u + \left(\frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)\partial v + \\ + \left(\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right)\delta w\right] dx\, dy\, dz. \tag{35}$$

把(35)代入(29),同時合併變量 $\delta u$, $\delta v$, $\delta w$ 諸項,我們就得到下列方程

$$\iiint\left[\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X\right)\delta u + \left(\frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y\right)\delta v + \\ + \left(\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z\right)\delta w\right] dx\, dy\, dz - \\ - \iint [(X_xl + X_ym + X_zn - \overline{X}_\nu)\,\delta u + (X_yl + Y_ym + Y_zn - \overline{Y}_\nu)\delta v + \\ + (X_zl + Y_zm + Z_zn - \overline{Z}_\nu)\,\delta w]\, d\Sigma = 0. \tag{36}$$

因為可能位移 $\delta u, \delta v, \delta w$ 之間沒有任何聯繫,而且完全是任意的,所以可令每個積分

式括號內的係數等於零，這樣就得到三個平衡方程和三個邊界條件(30)．這些邊界條件我們稱爲靜力邊界條件．

因此，在採用變分方程(29)時無需預先適合靜力邊界條件(30)，因爲它們會自動適合的．在應用變分方程(29)時，我們給出彈性位移 $u, v, w$ 的表達式．符合於彈性體上的約束，這樣六個聖維南的恆等關係(20)與(21)就可以滿足．但是，如果我們給出的是六個應力分量

$$X_x, Y_y, Z_z, Y_z, X_z, X_y,$$

那麼，在均勻各向同性體的情形，就應該預先滿足拜爾脫拉密的六個恆等關係．

**§7. 卡斯提也努的變分公式** 假定物體由於變形在彈性平衡狀態下的特性，可以用三個彈性位移分量 $u, v, w$ 以及六個應力分量

$$X_x, Y_y, Z_z, Y_z, X_z, X_y$$

所表徵．這些實際存在的應力分量適合三個彈性平衡方程(25)與三個邊界條件．在面力已知的情況下，這些分量具有(30)的形式．顯然，上述六個應力分量在均勻各向同性體的特殊情況下，要適合拜爾脫拉密的六個恆等關係(22)，而在服從胡克定律的各向異性體的一般情況，則必須適合聖維南的恆等關係(20)與(21)．

我們給出應力的任意變分力，要使得以下列六個分量

$$X_x + \delta X_x,\ Y_y + \delta Y_y,\ Z_z + \delta Z_z,\ Y_z + \delta Y_z,\ X_z + \delta X_z,\ X_y + \delta X_y \tag{37}$$

所表徵的新應力是靜力上可能的．因此，使應力分量(37)適合彈性平衡方程(25)，便得出了

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(X_x + \delta X_x) + \frac{\partial}{\partial y}(X_y + \delta X_y) + \frac{\partial}{\partial z}(X_z + \delta X_z) + \rho X = 0,\\
\frac{\partial}{\partial x}(X_y + \delta X_y) + \frac{\partial}{\partial y}(Y_y + \delta Y_y) + \frac{\partial}{\partial z}(Y_z + \delta Y_z) + \rho Y = 0,\\
\frac{\partial}{\partial x}(X_z + \delta X_z) + \frac{\partial}{\partial y}(Y_z + \delta Y_z) + \frac{\partial}{\partial z}(Z_z + \delta Z_z) + \rho Z = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

但是，物體中實際存在的應力分量是

$$X_x, Y_y, Z_z, Y_z, X_z, X_y.$$

它們適合方程(25)，由(38)減去(25)，我們便得到下列三個方程

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(\delta X_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\delta X_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\delta X_z) = 0,\\
\frac{\partial}{\partial x}(\delta X_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\delta Y_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\delta Y_z) = 0,\\
\frac{\partial}{\partial x}(\partial X_z) + \frac{\partial}{\partial y}(\delta Y_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\delta Z_z) = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

爲了使得它們(指(37)式的應力分量—譯者)是靜力可能的，那麼在彈性體內實際存在的六個應力分量的變分

$$\delta X_x,\ \delta Y_y,\ \delta Z_z,\ \delta Y_z,\ \delta X_z,\ \delta X_y \tag{40}$$

就應該適合上面三個方程．其次，為了使得應力狀態(37)是靜力可能的，這就必須使之適合邊界條件(30)，由分量

$$\overline{X}_\nu,\ \overline{Y}_\nu,\ \overline{Z}_\nu$$

所表徵的實際表面力系變成

$$\overline{X}_\nu+\delta\overline{X}_\nu,\ \overline{Y}_\nu+\delta\overline{Y}_\nu,\ \overline{Z}_\nu+\delta\overline{Z}_\nu. \tag{41}$$

力系(41)必須適合邊界條件

$$\left.\begin{aligned}(X_x+\delta X_x)l+(X_y+\delta X_y)m+(X_z+\delta X_z)n&=\overline{X}_\nu+\delta\overline{X}_\nu,\\(X_y+\delta X_y)l+(Y_y+\delta Y_y)m+(Y_z+\delta Y_z)n&=\overline{Y}_\nu+\overline{Y}_\nu,\\(X_z+\delta X_z)l+(Y_z+\delta Y_z)m+(Z_z+\delta Z_z)n&=\overline{Z}_\nu+\delta\overline{Z}_\nu,\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

其中 $l, m, n$ 和前面一樣是外法綫和 $x, y, z$ 軸所成夾角的餘弦．因為邊界條件(30)必須適合，所以由(42)減去(30)，我們就得到給出那些外力變分 $\delta\overline{X}_\nu, \delta\overline{Y}_\nu, \delta\overline{Z}_\nu$ 的公式，為了使得為(37)中的六個應力分量所規定的應力狀態是靜力可能的，這些外力變分便必須如此作

$$\left.\begin{aligned}\delta\overline{X}_\nu&=l\delta X_x+m\delta X_y+n\delta X_z,\\\delta\overline{Y}_\nu&=l\delta X_y+m\delta Y_y+n\delta Y_z,\\\delta\overline{Z}_\nu&=l\delta X_z+m\delta Y_z+n\delta Z_z.\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

顯然，在彈性體的應力狀態的變分情況下，所有幾何約束條件必須適合．

在彈性體中實際存在的應力狀態，相當於為公式(5)所決定的應變勢能，和靜力可能的應力狀態相當的應變勢能等於

$$V+\delta V$$

然後根據(5)，我們有

$$\delta V=\iiint\delta W\,dx\,dy\,dz. \tag{44}$$

這裏 $\delta W$ 是公式(14)所列出的，這就給出

$$\delta V=\iiint[e_{xx}\delta X_x+e_{yy}\delta Y_y+e_{zz}\delta Z_z+e_{yz}\delta Y_z+e_{xz}\delta X_z+e_{xy}\delta X_y]\,dx\,dy\,dz, \tag{45}$$

這裏的積分在彈性體整個體積中積分．這裏引進了六個以關係(1)和實際存在的微小彈性位移 $u, v, w$ 相聯繫的實際存在的微小彈性應變分量

$$e_{xx},\ e_{yy},\ e_{zz},\ e_{yz},\ e_{xz},\ e_{xy}$$

將它們代入(45)，在右邊部分積分然後應用格林公式，我們得到三個如下列形式的關係

$$\begin{aligned}\iiint e_{xx}\,\delta X_x\,dx\,dy\,dz&=\iiint\frac{\partial u}{\partial x}\,\delta X_x\,dx\,dy\,dz=\\&=\iint lu\,\delta X_x\,d\Sigma-\iiint u\,\frac{\partial}{\partial x}\,(\delta X_x)\,dx\,dy\,dz\end{aligned} \tag{46}$$

和三個如下列形式的關係

$$\begin{aligned}\iiint e_{yz}\,\delta Y_z\,dx\,dy\,dz&=\iiint\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\delta Y_z\,dx\,dy\,dz=\\&=\iint[mw+nv]\,\delta Y_z\,d\Sigma-\iiint\left[w\,\frac{\partial}{\partial y}\,(\delta Y_z)+v\,\frac{\partial}{\partial z}(\delta Y_z)\right]dx\,dy\,dz.\end{aligned} \tag{47}$$