力学概论

于全训　林明喜　薛成山　编著

科 学 出 版 社

力学概论

于全训　林明喜　薛成山　编著

科学出版社

2000

内 容 简 介

本书涵盖了力学、理论力学(分析力学部分除外)的基本内容,共分九章:质点运动的描述及数学方法的运用;质点的基本运动定律和运动定理,重力场中的约束运动;相对运动和参考系;有心力场中的运动;质点系和守恒定律;特殊的质点系——刚体;线性回复力(或力矩)作用下的运动;力学知识的综合运用——碰撞;平面简谐波,理想流体.

每章均设有题目类型解法研究专题,各章末有练习题,书末附有答案.

本书适用于高等院校物理系及相关专业教与学及考研参考.

图书在版编目(CIP)数据

力学概论/于全训等编著. -北京:科学出版社,2000
ISBN 7-03-007842-X

Ⅰ.力… Ⅱ.于… Ⅲ.力学 Ⅳ.03

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 41258 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
科地亚印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

2000 年 1 月第 一 版 开本:850×1168 1/32
2000 年 1 月第一次印刷 印张:11 7/8
印数:1—3 000 字数:312 000

定价: 23.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

前　　言

本书是作者在长期从事力学、理论力学授课及为考研开设的力学讲习班等课程的讲稿、讲义的基础上系统整理编写的．和现行力学教科书相比，在选材和编写方式上作了一些新的尝试．

全书内容涵盖高校理科普通物理力学及理论力学的矢量力学部分．与通常教科书以研究对象划分章节不同，全书按运动形态分章．以一条基本运动定律、三个基本运动定理为主线，贯穿始终．这样做便于读者将力学的基本规律和实际运动结合起来．

对于力学课程因高等数学课程滞后难以深化讨论、理论力学课程因学时紧缺而无法仔细讨论的两课衔接区域的某些章节内容，本书给予了足够重视和恰当处理．如定长旋转矢量的微商及其应用；约束运动的特点及一般解法；经典力学的两个基本观点、非惯性系中的能量方程和机械能守恒定律；有心运动的特点及一般解法；内力作功的讨论、势能定义式的给出及应用、外势能和内势能的计算；定轴转动动力学基本方程及其讨论；纯滚动静摩擦力不作功的推证；系统偏离稳定平衡位置的微振动；碰撞共性的归结及回复系数定义式的推广应用等等．

每章均含有“题目类型解法研究”专题．一是将繁多的题目归类，二是通过解法剖析，归结解同类问题的共性方法及不同类问题的个性差异．对于有代表性的题目，通过一题多解与解答前后的“按语”、“想一想”小栏目，启迪思维、解答疑难，起到举一反三的作用．

本书适用面广．既可作为高等学校有关专业教与学的参考书；亦可供报考研究生者复习应考之用；同时也可用作自学考试、业余教育的参考资料．

山东师大校长张庆刚，山东大学杨丕华，山东师大王启玲、沈

景昭等专家、教授认真审阅了本书原稿，提出许多宝贵意见，使本书增色不少．在此向他们表示衷心感谢．

本书在编写过程中还得到了山东师范大学物理系领导和许多老师的热情关心和真诚支持，在此表示诚挚谢意．

本书出版获得山东师范大学出版基金资助，深表谢意．

鲁东亮先生对本书的编写和出版，给予了诚挚的协助和支持．借此机会，深表衷心感谢．

本书的例题和习题，其中一部分是自编的，一部分选自书末的参考书目．对于这些著作的作者、译者，这里一并致谢．

由于水平有限，书中难免会有缺点和错误，渴望读者批评指正．

作者

1999年6月于济南

目　　录

第一章　质点运动的描述及数学方法的运用

本章首先简述矢量微商；接着概述描写质点运动的几个物理量；然后借助坐标系，讨论矢量微商转化为代数量微商的基本方法，并给出速度、加速度在几个正交系中的分量表示；最后，着重从数学方法和技巧出发，研讨题目类型和解法.

§1.1　矢量微商

（一）矢量的增量

设矢量 $\boldsymbol{A}$ 是时间 t 的单值、连续、可微的函数，记为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t),$$

从 t 到 $t+\Delta t$ 时间内，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的增量定义为

$$\Delta\boldsymbol{A}\equiv\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t). \tag{1.1}$$

$\Delta\boldsymbol{A}$ 是一个矢量，它反映了矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 Δt 时间内的变化，其大小为 $|\Delta\boldsymbol{A}|$，其方向沿割线从 P 指向 Q，参见图 1.1. 矢量 $\boldsymbol{A}$ 的大小 A 的增量记为

$$\Delta A\equiv A(t+\Delta t)-A(t), \tag{1.2}$$

它反映了矢量 $\boldsymbol{A}$ 的大小在 Δt 时间内的变化，如图 1.1 $\overline{DQ}$所示.

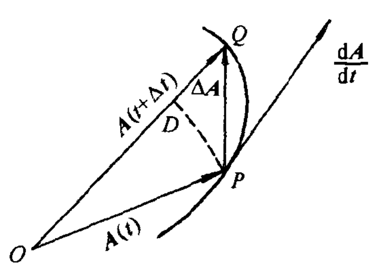

图 1.1　矢量微商

应特别留心一个矢量函数的

增量，它既包含矢量大小变化的贡献，又包含矢量方向变化的贡献，不像标量函数的增量那样单纯.

矢量的方向不变，仅大小变化，其增量不为零，如自由落体运动中的速度矢量.

矢量的大小不变，仅方向变化，其增量亦不为零，如圆运动中质点对圆心的位置矢量及匀速率圆运动中的速度矢量.

必须清楚：矢量 $\boldsymbol{A}$ 增量的大小 $|\Delta\boldsymbol{A}|$ 一般不等于矢量 $\boldsymbol{A}$ 大小的增量 ΔA. 以 O 为圆心，$\overline{OP}$ 为半径画圆弧与 $\overline{OQ}$ 相交于 D，由图 1.1 可见，$|\Delta\boldsymbol{A}| = \overline{PQ}$，$\Delta A = \overline{OQ} - \overline{OP} = \overline{OQ} - \overline{OD} = \overline{DQ}$.

（二）矢量微商

我们知道，标量函数的一级微商定义为增量比的极限值. 类似，我们将矢量 $\boldsymbol{A}$ 的增量 $\Delta\boldsymbol{A}$ 与相应的自变量的增量 Δt 之比的极限值定义为矢量 $\boldsymbol{A}$ 对变量 t 的一级微商，记为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)}{\Delta t}. \tag{1.3}$$

增量比 $\frac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}$ 是一个矢量，大小为 $\left|\frac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}\right|$，方向与 $\Delta\boldsymbol{A}$ 同向，$\frac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}$ 是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 Δt 时间内的平均变化率. $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$ 的方向是 $\Delta\boldsymbol{A}$ 的极限方向，当 $\Delta t\to 0$ 时，割线 $\overline{PQ}$ 趋于过 P 点的切线，所以 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$ 的方向沿 t 时刻 $\boldsymbol{A}(t)$ 端点 P 处的切线，并指向前进一侧，见图 1.1. 作为平均变化率 $\frac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}$ 的极限值 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$ 显然是矢量 $\boldsymbol{A}$ 的瞬时变化率. 为了便于讨论矢量函数微商和标量函数微商的异同，我们将矢量 $\boldsymbol{A}$ 写为

$$\boldsymbol{A} = A\boldsymbol{A}^{\circ}, \tag{1.4}$$

其中 $\boldsymbol{A}^{\circ}$ 为沿 $\boldsymbol{A}$ 方向的单位矢量. 根据微商的计算公式，有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A\boldsymbol{A}^{\circ}) = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}^{\circ} + A\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}^{\circ}}{\mathrm{d}t}, \tag{1.5}$$

其中$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$是矢量$\boldsymbol{A}$的数值变化率，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}^\circ}{\mathrm{d}t}$反映了$\boldsymbol{A}$的方向变化快慢.

如果$\boldsymbol{A}$的方向不变，即$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}^\circ}{\mathrm{d}t}$为零，则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}^\circ.$$

在这种情况下，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$仅由矢量$\boldsymbol{A}$的数值变化引起.

如果$\boldsymbol{A}$的数值不变，即$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=0$，则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=A\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}^\circ}{\mathrm{d}t}.$$

这时，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$除了与$\boldsymbol{A}$的数值$A$有关外，还与$\boldsymbol{A}$的方向变化率有关.

那么，单位矢量$\boldsymbol{A}^\circ$的变化率$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}^\circ}{\mathrm{d}t}=$？试看下面的推导.

(三)定长平面旋转矢量的微商

设矢量$\boldsymbol{A}$为定长(其大小不变)平面旋转矢量，在t到$t+\mathrm{d}t$时间内，$\boldsymbol{A}$的元增量为$\mathrm{d}\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}$的方位角θ的元增量为$\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$，如图1.2(a)所示.设$\boldsymbol{A}$的方位角的变化率为$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}$，也就是$\boldsymbol{A}$旋转的角速

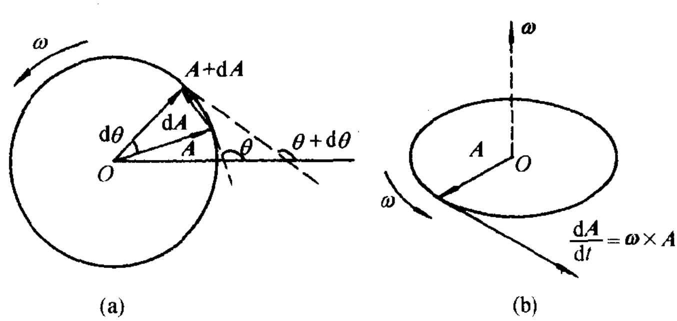

图1.2　定长平面旋转矢量的微商

度$\boldsymbol{\omega}$. $\boldsymbol{\omega}$ 是一个矢量,其方向遵从右手螺旋法则,见图 1.2(b).其代数值为

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \tag{1.6}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 旋转的角加速度为

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}, \tag{1.7}$$

或用沿转轴的投影式表示

$$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}. \tag{1.8}$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 为定长矢量,由图 1.2(a)可见,$|\mathrm{d}\boldsymbol{A}|=A\mathrm{d}\theta$,所以

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right|=\left|A\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|=|A\omega|,$$

$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$的方向为过$\boldsymbol{A}$ 的端点的切线并指向θ 增加的方向,见图 1.2(b),同时由图(b)知:$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$,$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{\omega}$ 三者互为正交且服从右手螺旋法则,所以

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}. \tag{1.9}$$

这表明:一个定长平面旋转矢量的一级微商等于其旋转的角速度与它自身的矢积.这一结论也适用于定长空间旋转矢量的微商,只是 $\boldsymbol{\omega}$ 应理解为绕瞬时轴旋转的角速度.

将(1.9)式再对时间微商一次,则有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t^2}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\\&=\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}).\end{aligned} \tag{1.10}$$

§1.2 质点运动的描述

(一) 位置矢量

要描写质点的运动,首先要确定质点的位置,这可由参考点引向质点所在位置的向量 $\boldsymbol{r}$ 来表示. $\boldsymbol{r}$ 称为质点的位置矢量,简称位矢. 随着时间的延续,一般说来 $\boldsymbol{r}$ 的大小和方向都随时间发生变化,因而记为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t), \tag{1.11}$$

上式称为质点的运动方程.

(二) 位移

其次要描写质点位置的变动,我们引入位移这一物理量. 变动有两方面的含义:其一是向何方向变动;其二是在一定时间内变动了多大距离. 因而将 t 到 $t+\Delta t$ 时间内质点的位移记为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t), \tag{1.12}$$

这实际上是位矢 $\boldsymbol{r}$ 的增量. 在该段时间内,质点通过的路程是质点实际所经过的路径的长度. 显然,一般说来,在同一时间间隔内,位移的大小和路程并不相等.

(三) 速度

紧接着要描写质点运动的快慢和方向,这个物理量就是速度. 速度是描写质点运动状态的基本量,它精确地刻画了质点在某时刻运动的快慢和方向. 为达此目的,需分两步走,先引入平均速度的概念,以便对运动粗略描述,然后利用由近似到精确的数学工具——取极限.

在 t 到 $t+\Delta t$ 时间内,质点的平均速度记为

$$\boldsymbol{v}_{平}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}, \tag{1.13}$$

这实际是增量比. 其大小为$\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}\right|$,方向与$\Delta \boldsymbol{r}$同向.

平均速率是质点所经过的路程和经过此路程所用时间之比.

平均速度的定义式表明,在t到$t+\Delta t$这段时间内,质点以相同的速度大小$\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}\right|$、始终沿$\Delta \boldsymbol{r}$的方向运动. 实际上在这段时间内,就一般情况而言,质点运动的快慢和运动方向时刻在变化. 因此,用平均速度来描写质点的运动快慢和运动方向是粗略的. 为了达精确描写的目的,我们将质点在t时刻的速度定义为$\Delta t \to 0$时平均速度的极限值,或说是位矢对变量t的一级微商,即

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.14}$$

速度的大小$|\boldsymbol{v}|=v$称为速率,它描写质点运动的快慢. 速度的方向是$\Delta t \to 0$时,$\Delta \boldsymbol{r}$的极限方向,参考§1.1(二). 速度的方向代表质点在t时刻实际运动的方向.

(四) 加速度

最后为了描述质点运动速度$\boldsymbol{v}$的变化情况,引入加速度的概念. 用数学的语言来说,加速度是速度矢量$\boldsymbol{v}$对变量t的变化率,或说是位矢$\boldsymbol{r}$对变量t的二级微商. 记为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}. \tag{1.15}$$

§1.3 坐标系的运用

前面讨论的速度、加速度的定义式都是矢量式，它不仅给人以简洁明快之感，而且能全面、深刻地展现出矢量式中各矢量所表示的物理量间的内在关系. 但另一方面，由于矢量的大小和方向同时变化，致使在某些具体问题的运算中，不像代数运算哪样

方便.

如果我们借助坐标系，将矢量式中各矢量向各坐标轴作投影，将矢量式转化为沿各个坐标轴的投影式(或说将矢量式分解为沿各坐标轴方向的分量式).那么对某一个坐标轴的投影式而言，不就是大家熟悉的代数运算了吗!

坐标系不仅是将矢量运算转化为代数运算的得力工具，而且由于坐标系和你选定的参考系固连在一起，它还可以起到参考系的作用.另一方面，借助坐标系便于对某些问题进行定量研讨.既然坐标系是一个工具，则可视问题的方便灵活地运用.

下面给出力学中经常用到的三种坐标系，讨论速度、加速度在各坐标系中的表示式及有关将矢量化为代数运算的基本方法.

(一) 笛卡儿坐标系

1. 运动方程 在该坐标系中，质点在空间的位置用 x,y,z 表示，质点的运动方程为

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t). \tag{1.16}$$

将上式消去参量 t，得质点运动的轨迹方程

$$f_1(x,y)=0;\quad f_2(x,z)=0. \tag{1.17}$$

分别沿三个坐标轴引入单位矢量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，则(1.11)式为

$$\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}. \tag{1.18}$$

2. 速度 对该系而言，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 都是恒矢量，所以将上式对变量 t 取一级微商，得质点的速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k}. \tag{1.19}$$

又因速度矢量可以分解成沿三个坐标轴的三个分量，即

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k},$$

所以对以上两式，对比 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 前面的系数，得速度沿三个坐标轴

的投影分别为

$$v_x=\dot{x}\,,\ v_y=\dot{y}\,,\ v_z=\dot{z}\,. \tag{1.20}$$

由(1.19)式可求出速度的大小和方向,

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,, \tag{1.21}$$

其方向可用 $\boldsymbol{v}$ 的方向余弦表示,即

$$\cos\alpha=v_x/v\,,\ \cos\beta=v_y/v\,,\ \cos\gamma=v_z/v\,. \tag{1.22}$$

3. 加速度

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\ddot{x}\boldsymbol{i}+\ddot{y}\boldsymbol{j}+\ddot{z}\boldsymbol{k}\,. \tag{1.23}$$

又因

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\,,$$

所以加速度沿三个坐标轴的投影式分别为

$$a_x=\ddot{x}\,,\quad a_y=\ddot{y}\,,\quad a_z=\ddot{z}\,. \tag{1.24}$$

根据(1.23)式,可具体求出加速度的大小和方向.

由以上讨论可见:借助坐标系已将矢量微商$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$转化为代数量$x=x(t)$,$y=y(t)$,$z=z(t)$对变量 t 的微商.

4. 特例

(1) 直线运动　作直线运动的质点的位置,可用位置坐标 x(或者 y)来表示,因此其运动方程、速度及加速度可分别写为

$$x=x(t)\,,\ v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,,\ a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\,.$$

在直线运动中,速度和加速度的矢量性可用正、负号来表示.如果 $v_x>0$,说明质点沿 x 轴正向运动;反之,说明质点沿 x 轴负向运动.如果 $a_x>0$,表明质点加速度的方向与 x 轴正向一致;反之,