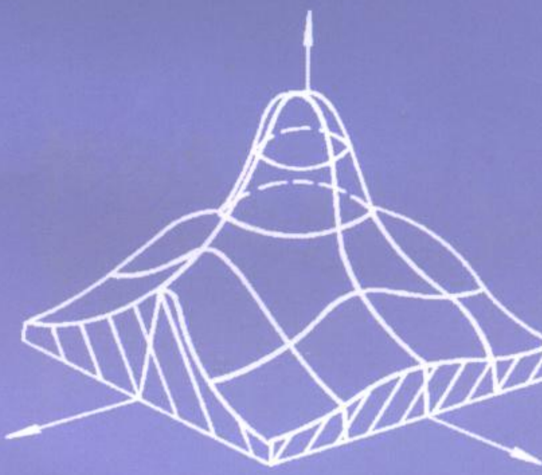
高等院校选用教材系列

应用概率论

孙荣恒 编著



科学出版社

应用概率论

孙荣恒 编著

科学出版社

1998

EA01/18

内 容 简 介

本书为高等学校理工科教材，曾在重庆大学使用过10多年.内容包括：随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、特征函数与概率母函数、极限定理等，本书内容丰富，有大量的例题和习题，书后面有习题答案.

本书适于高等学校理工科大学数学系和有关专业大学生、教师和研究生阅读.

图书在版编目(CIP)数据

应用概率论/孙荣恒编著.-北京：科学出版社，1998
ISBN 7-03-006824-6

Ⅰ.应…　Ⅱ.孙…　Ⅲ.概率论-应用　Ⅳ.0211

中国版本图书馆CIP数据核字（98）第16566号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
科地亚印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1998年10月第 一 版　开本：850×1168　1/32
1998年10月第一次印刷　印张：11 3/8
印数：1-3000　字数：301 000

定价:23.00元

序　言

概率论起源于机会游戏．它的某些思想在公元前 220 年就已出现于中国的文献里．不过它的真正历史被公认为从 17 世纪中叶开始．1654 年法国有个叫 De Mere 的赌徒向数学家 Pascal (1623—1662) 提出了一个如何分赌注的问题（也叫分点问题）：简略地说，就是甲、乙两个赌徒下了赌注就按某种方式赌了起来，规定甲胜一局甲就得一分，乙胜一局乙也得一分，且谁先得到某个确定的分数谁就赢得所有赌注．但是，在谁也没获得确定的分数之前赌博因故中止了．如果甲需得 n 分才获得所有赌注，乙需得 m 分才获得得所有赌注，问该如何分这些赌注呢？为解决这一问题，Pascal 与当时享有很高声誉的数学家 Fermat (1601—1665) 建立了联系，从而使当时很多有名的数学家对这一问题产生了浓厚的兴趣，并使得概率论这个新领域得到了迅速的发展．对概率论的发展作出杰出贡献的还有：17—18 世纪的惠更斯（Huygens）、贝努里（Bernoulli）、德莫佛尔（De Moivre）、辛普生（Simpson）、蒲丰（Buffon）、19 世纪的拉普拉斯（Laplace）、高斯（Gauss）、泊松（Poisson）、契比晓夫(Chebyshev)、马尔柯夫（Markov），20 世纪的柯尔夫莫哥洛夫(Kolmogorov)、辛钦（Khintchine）等等．

本书是为应用数学专业的大学生学习概率论而编著的教材，曾在重庆大学应用数学系使用过多年．撰写过程中参考了教育部 1980 年颁发的综合大学数学专业《概率论与数理统计教学大纲》．本书的特点是：概念的直观背景较强，材料系统丰富，理论推导严谨，同时注意实际应用，书中有大量的应用例题．故它既可作为教材，也可作为参考书．本书的另一特点是起点低，一般只需具有数学分析知识就可阅读，因此便于初学者自学．经适

当选择后，也可作为理科其他专业和工科有关专业的教材.

全书共五章，每章后附有适量的习题. 书后附有答案.

初稿完成后，李虹同志、刘琼荪同志、何良材教授仔细览阅了全书，提出了许多宝贵意见，李育英同志为初稿的打印出了不少力. 作者在此向他们表示衷心感谢.

由于作者水平所限，书中缺点错误肯定不少，恳请读者批评指正.

编著者

1998年4月于重庆

目　录

第一章　随机事件及其概率

随机事件与随机事件的概率都是概率论中最基本的概念.它们是逐步形成与完善起来的,本章先给出它们的描述性定义,然后再给出它们的严格的数学定义.

§1.1　随机事件

1.1.1　随机现象

在自然界中人们碰到的现象大体可分为两类.一类是当某些条件实现时必然发生和必然不发生的现象.例如“纯水在一个大气压下加热到100℃就沸腾”、“同性电荷必然不互相吸引”、“在恒力作用下质点作等加速运动”等等,这一类现象称之为确定性现象或必然现象.但是,人们还碰到另一类现象,这一类现象在相同一组条件实现时它可能发生也可能不发生,事前不能准确预言它是否发生.例如,“抛一枚硬币,每次抛掷之前无法肯定正、反面哪一面会出现”.又如,“同一人用同一枝枪射击同一目标,每次射击的着弹点不尽相同”、“同一地区同一日期可能下雨,也可能不下雨”等等.这一类现象称之随机现象.随机现象虽然在相同条件实现时可能的结果不止一个,以及每次事前不能准确预言哪一种结果会出现,但是经过长期的观察与实践,人们逐步发现所谓随机现象不可预言,只是对一次或少数几次观察与实践而言,当在相同条件下进行大量的观察与实践时,不确定现象的每个可能的结果都呈现出某种规律性.例如,多次抛一枚均匀的硬币,正、反面出现的次数大致相等.又如,在相同条件下多次射击同一目标,着弹点在目标附近就形成某种明显的规律性.综上所述,随机现象是具有如下特征的现象:在一定条件实现时,有不止一种结果会出现,对每一次来

说，事前人们不能准确预言哪一种结果会出现，但是进行大量的重复观察与实践时，每一种结果又呈现出某种规律性．这种规律性称之为随机现象的统计规律性．概率论就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科．

1.1.2 随机试验

在这里我们把对自然现象的一次观察或进行一次科学试验统称为一个试验．所谓随机试验就是具有如下特性的试验：

1) 可在相同条件下重复进行；

2) 每次试验的可能结果不止一个，但是能事先明确确定所有可能结果的范围；

3) 每次试验之前不能准确预言哪个结果会出现．

例如：E_1（重复摸球试验）：设一袋中有编号分别为 $1,2,\cdots,n$ 的 n 个同类球，从中任摸一球，观察其号码后又放回袋中，然后再从中任摸一球，观察其号码后又放回袋中（这样的摸球方法称为"有放回"）．多次重复这一试验，各次摸得的球的号码不会全同．虽然每次摸得的球的号码总是 $1,2,\cdots,n$ 之一，但是每次摸球前却不能准确预言哪个球被摸得．

E_2（旋转均匀陀螺的试验）：在一个均匀陀螺的圆周上均匀地刻上区间$[0,3)$上的诸数字．多次旋转这个陀螺，当它停下时其圆周与桌面接触处的刻度未必全同．虽然每次总是区间$[0,3)$上一个数字与桌面接触，但是每次旋转之前却无法准确预言哪个数字与桌面接触．

E_3（射击试验）：多次用步枪射击靶上的目标，由于各种因素的影响，子弹击中的位置未必一样．虽然每次击中的位置总是靶平面上的一点，但是每次射击前也不能准确预言击中的位置．

E_4（抛一枚均匀硬币的试验）：多次抛一枚均匀的硬币，出现的结果未必会全同．虽然每次出现的结果不是正面 h，就是反面 t，但是每次抛前也不能准确预言哪个面会出现．

上述的四个试验都是随机试验．随机试验简称为试验．

1.1.3 随机事件

随机试验的每个可能的结果称为该试验的随机事件，简称为事件.一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$来表示.

例如，在试验 E_1 中，“摸得的球的号码小于3”这是试验 E_1 的一个可能结果，故它是 E_1 的一个随机事件.在试验 E_2 中，“陀螺圆周与桌面接触处的刻度在区间$[1,2)$中”这是试验 E_2 的一个可能的结果，故它是 E_2 的一个随机事件.在试验 E_4 中，“正面出现”是试验 E_4 的一个可能结果，故它是 E_4 的一个随机事件.

对于一个试验来说，在每次试验中必然要发生(出现)的结果称为此试验的必然事件，记为 Ω，在每次试验中必然不发生(出现)的结果称为此试验的不可能事件，记为$\varnothing$.例如，在 E_1 中，“摸得的球的号码大于0”这结果是 E_1 的必然事件，而“摸得的球的号码小于1”这结果是 E_1 的不可能事件.

必须指出，必然事件与不可能事件，都没有随机性，但是为了讨论问题方便起见，我们把它们当作一种特殊的随机事件.

1.1.4 基本事件空间

对一个试验来说，我们把其最简单的不能再分的事件称为该试验的基本事件，常以小写字母 $e,\omega,\cdots$来表示.而把由所有基本事件组成的集合称为该试验的基本事件空间，记为 Ω.

例如，在 E_1 中，“摸得号码为 i 的球”，$i=1,2,\cdots,n$，均为 E_1 的基本事件，有 n 个.在 E_2 中，设 $x\in[0,3)$，则“陀螺圆周与桌面接触处的刻度 x”是 E_2 的基本事件，有无穷不可数多个.在 E_3 中，设 $x,y\in(-\infty,+\infty)$，则“击中点(x,y)”是 E_3 的基本事件，有无穷不可数多个.在 E_4 中，“出现正面”与“出现反面”都是 E_4 的基本事件，有两个.如果设 Ω_i 为E_i 的基本事件空间，$i=1,2,3,4$，则有

$\Omega_1=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，其中 e_i 表示“摸得号码为 i 的球”，

$$i=1,2,\cdots,n$$

$\Omega_2=\{x:x\in[0,3)\}$

$\Omega_3=\{(x,y):x,y\in(-\infty,+\infty)\}$

$\Omega_4=\{h,t\}$,其中 h,t 分别表示“出现正面”与“出现反面”.

因为随机事件要么是基本事件,要么是由基本事件组成的集合,所以引入基本事件空间 Ω 后,随机事件就是基本事件空间的子集(注意,反之不成立,即基本事件空间的子集不一定是随机事件).而一个事件 A 出现当且仅当 A 中一个基本事件出现.基本事件空间又叫做样本空间,所以基本事件又叫做样本点.

§1.2 事件之间的关系与运算

由于事件是样本空间的子集,所以事件之间的关系就是集合之间的关系,事件的运算就是集合的运算,只是述语不同和赋于概率的涵义罢了.

1.2.1 事件之间的关系与简单运算

1) 子事件.如果属于事件 A 的样本点也属于事件 B,则称 A 为 B 的子事件或 A 为 B 的特款,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.其概率涵义是:A 出现 B 必出现.对任意事件 A,显然有

$$A\subset\Omega,\varnothing\subset A,A\subset A$$

设 A,B,C 均为事件,如果 $A\subset B$,且 $B\subset C$,则 $A\subset C$.

2) 事件相等.如果事件 A 与事件 B 满足:$A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A=B$.其概率涵义是:A,B 中有一个出现另一个也必出现.

3) 和(并)事件.事件 A 与事件 B 的和事件定义为:由至少属于 A,B 之一的样本点全体组成的集合,记为 $A\cup B$.其概率涵义是:A,B 至少一个出现.事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件定义为:由至少属于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 之一的样本点全体组成的集合,记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 的和事件定义为:由至少属于 $A_1,A_2,$

$A_3,\cdots$之一的样本点全体组成的集合,记为$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$. $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 与 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 的概率涵义与$A\cup B$ 的概率涵义类似.

4) 积(交)事件.事件 A 与 B 的积事件定义为:由既属于 A 又属于 B 的样本点全体组成的集合,记为 $A\cap B$ 或 AB.其概率涵义是:A 与 B 同时出现.事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件定义为:由属于所有事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的样本点全体组成的集合,记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$.事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots$的积事件定义为:由属于所有事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots$的样本点全体组成的集合,记为$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$. $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 与 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 的概率涵义类似于$A\cap B$ 的概率涵义.

如果事件 A 与 B 满足:$AB=\varnothing$,则称 A 与 B 为互斥(或互不相容)事件.其概率涵义是:A,B 不同时出现.

如果事件 A 与 B 满足:$AB=\varnothing$且 $A\cup B=\Omega$,则称 A 与 B 为对立(或互逆)事件.其概率涵义是:A,B 中有且仅有一个出现.

如果事件 A 与 B 互斥,则记 $A\cup B$ 为 $A+B$,即 $A+B=A\cup B$.

由上述知,两事件对立则它们一定互斥,反之,未必成立.

5) 差事件.属于事件 A 而不属于事件 B 的样本点全体组成的集合称为 A 与 B 差事件,记为 $A\setminus B$.其概率涵义是:A 出现而 B 不出现.如果 $B\subset A$,则称 $A\setminus B$ 为 A 与 B 的正常差,记为 $A-B$,即 $A-B=A\setminus B$.

记 $\Omega-A$ 为 $\overline{A}$,即 $\overline{A}=\Omega-A$.显然有

事件 A 与 B 对立$\Leftrightarrow$ $A=\overline{B}$.

$\overline{A}=\Omega-A$ 为事件 A 的对立事件.

6) 对称差·设 A,B 为两个事件,记 $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.则称 $A\Delta B$ 为 A 与 B 的对称差事件,其概率涵义是:仅 A,B 之一出现.

因为事件是集合,所以由集合运算的性质与关系式不难证明事件运算的性质与关系式.设 $A,B,C,A_1,A_2,A_3,\cdots$均为事件,

Ω 为必然事件,$\varnothing$为不可能事件,则有

1) $A \cup A = A, A \cap A = A$

$A \setminus A = \varnothing, A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing$

2) $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A, A \Delta B = B \Delta A$

3) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), (AB)C = ABC = A(BC)$

$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap C = \bigcup_{i=1}^{\infty}\left(A_i \cap C\right)$

$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cup C = \bigcap_{i=1}^{\infty}\left(A_i \cup C)\right)$

4) $AB \subset A, AB \subset B, A \subset A \cup B, A \subset A, A \setminus B \subset A$

5) $A \subset B \Leftrightarrow AB = A \Leftrightarrow A \cup B = B$

6) $A = A, \overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$A \setminus B = A\bar{B} = A - (AB)$

7) $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

8) $\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}, \left(\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$

9) $A \Delta B = A\bar{B} + B\bar{A} = (A \cup B) - AB = (A \cup B)\overline{AB}$

上述关系式的证明留给读者自己去完成.

1.2.2 事件序列的极限

设$\{A_n\}$为样本空间 Ω 中的事件序列,我们定义:

1) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ 为$\{A_n\}$的上极限,记为$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$,即

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

2) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ 为$\{A_n\}$的下极限,记为$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$,即

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

3) 如果$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$,则称事件序列$\{A_n\}$的极限存在且称$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 为其极限,记为$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$,即

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n$$

定理1.2.1 设$\{A_n\}$为样本空间 Ω 中的事件序列,则

1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\{e:e$ 属于无穷多个$A_n\}$

2) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\{e:e$ 属于几乎一切$A_n\}$.

其中“e 属于几乎一切A_n”意思是:除事件序列$A_1,A_2,A_3,\cdots$中的有限个事件外,e 属于其余一切事件.

证明 1)设 $e_0\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$,则对任意正整数 n,$e_0\in\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$,所以 e_0 属于无穷多个 A_n,如果不然,则必存在 n_0,使得 $m>n_0$ 时均有 $e_0\overline{\in}\bigcup\limits_{k=m}^{\infty}A_k$,矛盾. 于是证得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\subset\{e:e\text{ 属于无穷多个}A_n\}$$

反之,设 $e_0\in\{e:e$ 属于无穷多个$A_n\}$,则对任意正整数 n 有 $e_0\in\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$,从而 $e_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$,于是得,$\{e:e$ 属于无穷多个$A_n\}\subset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$,从而 1)得证.

2)设 $e_0\in\{e:e$ 属于几乎一切$A_n\}$,则存在正整数 m,使得 $e_0\in\bigcap\limits_{k=m}^{\infty}A_k$,故 $e_0\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$,即

$$\{e:e\text{ 属于几乎一切}A_n\}\subset\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n$$

反之,设 $e_0\in\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$,则至少存在一个正整数 m 使 $e_0\in\bigcap\limits_{k=m}^{\infty}A_k$,故对一切 $k\geqslant m$,均有 $e_0\in A_k$,即 e_0 属于几乎一切 A_n,所以有$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\subset\{e:e$ 属于几乎一切$A_n\}$,从而 2)得证.

推论 1. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\subset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.

推论 2. 改变事件序列$\{A_n\}$中的有限多项不影响$\{A_n\}$的上

下极限.

推论 3. 1) $\left(\overline{\varliminf_{n\to\infty} A_n}\right)=\varlimsup_{n\to\infty}\overline{A}_n$

2) $\left(\overline{\varlimsup_{n\to\infty} A_n}\right)=\varliminf_{n\to\infty}\overline{A}_n$

证明 1) 由德摩根对偶定律[即 1.2.1 的 8)式]得

$$\left(\overline{\varliminf_{n\to\infty} A_n}\right)=\left(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_n}\right)=\bigcap_{n=\infty}^{\infty}\left(\overline{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k}\right)$$

$$=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\overline{A}_k=\varlimsup_{n\to\infty}\overline{A}_n$$

同理可证 2).

定理1.2.2 设$\{A_n\}$为样本空间 Ω 中的事件序列.

1) 如果$\{A_n\}$单调不减,即 $A_1\subset A_2\subset A_3\subset\cdots$,则$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在且$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

2) 如果$\{A_n\}$单调不增,即 $A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots$,则$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在且$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

证明 1) 设 $e_0\in\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n$,由定理1.2.1 知 e_0 属于无穷多个 A_n,故总存在正整数 m,使得 $e_0\in A_m$. 因为$\{A_n\}$单调不减,所以当$k\geqslant m$时均有$e_0\in A_k$,即 e_0 属于几乎一切 A_n,所以 $e_0\in\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n$,此示$\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n\subset\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n$,又由推论 1 知$\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n\subset\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n$,于是$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在. 因为$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$,所以证得 1).

2) 因为$\{A_n\}$单调不增,所以$\{\overline{A}_n\}$单调不减,由 1)知$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在且

$$\varliminf_{n\to\infty}\overline{A}_n=\varlimsup_{n\to\infty}\overline{A}_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n.$$

由定理1.2.1 的推论 3,对上式两边取逆得

$$\varlimsup_{n\to\infty}A_n=\varliminf_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

为了便于学习,现把概率论中与集合论中的一些术语对照列表如下.

表 1-1

符号	集合论	概率论	概率含义
Ω	空间	基本事件(样本)空间,必然事件	
$\varnothing$	空集	不可能事件	
e(或 ω)	元素	基本事件(样本点)	
A	子集	事件	
$\overline{A}$	A 的余集	A 的对立(逆)事件	$A,\overline{A}$ 中有且只有一个出现
$A\subset B$	A 为 B 的子集	A 是 B 的子事件	A 出现 B 必出现
$A=B$	A 与 B 相等	A 与 B 相等	A,B 中一个出现另一个也出现
$A\cup B$	A 与 B 的并	A 与 B 的和(并)事件	A,B 中至少一个出现
$A\cap B$	A 与 B 的交	A 与 B 的积事件	A 与 B 同时出现
$A\setminus B$	A 与 B 的差	A 与 B 的差事件	A 出现而 B 不出现
$A\cap B=\varnothing$	A 与 B 不相交	A 与 B 为互斥(互不相容事件)	A 与 B 不同时出现
$A\triangle B$	A 与 B 的对称差	A 与 B 的对称差事件	A 与 B 仅有一个出现

§1.3 事件的概率及其计算

随机事件有其偶然性的一面,即在一次试验中它可能出现也可能不出现.但是在大量重复试验中它又呈现出内在的规律性,即它出现的可能性大小是确定的,且是可以度量的.所谓随机事件的概率,概括地说就是用来描述随机事件出现的可能性大小的数量指标.它是概率论中最基本的概念之一,且是逐步形成完善起来的.我们先介绍在简单情形下,如何合理地定义概率的方法,然后,

从这些定义出发，引出一般情形下概率的严格的定义．介绍的顺序依照“概率”这个概念的历史发展过程进行．

1.3.1 古典概型

最初人们研究的试验是一类很简单的试验，其特征是：

1） 基本事件总数有限；

2） 每个基本事件等可能出现．

我们称具有这两个特征的试验是古典概型的．例如 1.1.2 中的试验 E_1 与 E_4 都是古典概型的．

定义1.3.1 设试验 E 是古典概型的，其样本空间为 $\Omega=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，其一事件 $A=\{e_{n_1},e_{n_2},\cdots,e_{n_r}\}$，其中 $n_1,n_2,\cdots,n_r$ 为 $1,2,\cdots,n$ 中任意 r 个不同的数，$r\leqslant n$，则定义事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点数}}=\frac{r}{n}$$

并称这样定义的概率为古典概率．

由定义知，基本事件 $\{e_1\},\{e_2\},\cdots,\{e_n\}$ 的概率为

$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\})=\frac{1}{n}$$

例1.3.1 从一批1250件正品 10 件次品组成的产品中任抽一件，求抽得次品的概率．

解 设 $A=$“抽得次品”．因为抽得的一件产品只能是 1260 件产品之一．所以样本点总数为 1260，又因每件产品都等可能被抽得．故此抽样试验是古典概型的．“抽得次品”只能是 10 件次品之一，故 A 中基本事件数为 10，从而 $P(A)=\frac{10}{1260}=\frac{1}{126}$．

例1.3.2 设一袋中有85个白球，8 个黑球，接连无放回地从袋中摸取三个球，求下列事件的概率：

1） $A=$“摸得的三个球依次为黑白黑”；

2） $B=$“摸得的三个球都是黑球”；

3） $C=$“摸得的三个球中有两个是黑球”．